

板と骨要素よりなる構造解析

住友重機械工業株式会社 北原俊男

1. まえがき

国内における橋梁の需要は道路網の整備および改良、高速道路網の延伸、本州四国の連絡等により増大の一途を辿っている。そして、要求される橋梁の中には河川、用地等の外的条件により、構造形状から望ましくないと判断される橋梁が生じても、そのまま架橋される場合がある。ここでは、望ましくない橋梁の一例をプレート・ガーダー橋梁について考えてみる。一般に、プレート・ガーダー橋梁の設計は棒理論による構造解析を行い、それに耐え得る断面構造を示方書の規定に従って決定するという方法で行われている。棒理論は各断面部材を軸線が代表できるものとして理論展開がなされているため、横断面の影響（横断面の変形、せん断おくれ等）を考慮できない点に一つの欠点を持っているが、これに関する設計上の解決方法は示方書および各種文献の基による補正手法によって処理されている。しかし、Screw 支承よりなる箱桁橋梁においては、支承近傍の構造要素の応力性状が棒理論では代表できなくなる。また、変形も微妙になり、棒理論による置換法が成立しなくなり、正しい評価もなされないまま望ましくない構造の一例となっている。このような問題を処理するためには各板要素別に評価する解析手法による設計が要求されてくるが、実際の設計においては支承近傍の厳密な応力解析を放置し、また経験的補強法で処理しているのが現状である。

本研究では、このような箱桁構造の特殊問題を解決するため、箱構造を板要素と骨要素より構成される構造にモデル化されるものと仮定し、板要素の集合体を基本静定系として有限帯板要素法によって解析を行い、骨要素を不静定力として処理する方法を用いた。なお、板要素とはフランジ、ウェブのように一端から地端へと続いていく要素をいう。また骨要素とは軸力筋のことをいうが、ダイヤフラムも軸力筋に換算できるものと仮定して取り扱っている。本文は次の3点について述べる。

- 1) 有限帯板要素法および不静定骨要素の処理方法の概要
- 2) フーリエ級数展開項数と解の精度に関する一考察
- 3) 箱桁中間支承をScrew 支承にしたときの中間支点上の応力性状に関する考察

2. 解析手法の概要

2.1 解析上の仮定；1) 力とひずみの関係は線形である。2) 帯板要素内では平面保持の法則が保たれる。3) 帯板要素は長方形板であり、かつ一要素内では等厚である。4) 帯板要素の面内変形と面外変形の間には直交条件が保たれる。5) 直応力に関するpoisson's ratioの影響は考えないものとする。6) 各要素は等方性である。7) 端ダイヤフラムは剛であり、ダイヤフラム面内の変形を完全に拘束する。また端ダイヤフラム面外変形は自由である。8) 中間ダイヤフラムは骨要素よりなるかまたは骨要素に換算可能とする。

2.2 帯板要素の面内力と面内変位；

帯板要素の面内力と面内変位の間には次の境界条件が成立するものとする。（図-1参照）

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=l \end{array} \right\} \text{のとき} \rightarrow \begin{array}{l} u=0 \\ v_y=0 \text{ (すなわち } \frac{\partial v}{\partial y}=0 \text{)} \end{array} \quad (1)$$

$$x=0 \text{ のとき } u=u_i, v=v_i \quad (2)$$

$$x=l \text{ のとき } u=u_j, v=v_j \quad (3)$$

ここに仮定された境界条件を満足するよう関数をフーリエ級数を用いて表わすならば以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) u_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) u_{jm} \right] \sin k_m y \\ v(x,y) &= \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{b}\right) v_{im} + \left(\frac{x}{b}\right) v_{jm} \right] \cos k_m y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

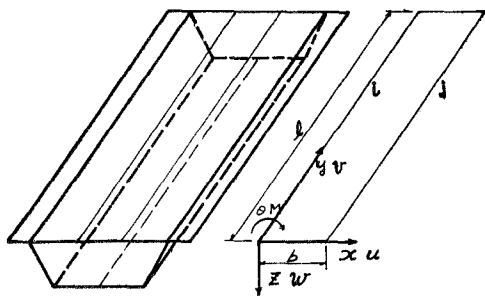


図-1 基本静定系と帯板要素

すなわち、 $u_i = \sum u_{im}$, $v_i = \sum v_{im}$, $k_m = m\pi/y$ 。次に任意点のひずみと応力の関係は次のようになる。

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5) \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \frac{\partial u}{\partial x} \\ E \frac{\partial v}{\partial y} \\ G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、図-1 に示した帯板要素の全ポテンシャル・エネルギー U_P を求めるならば、次のように表わされる。但し、 X および Y は nodal line に作用する力

$$U_P = \frac{t}{2} \int_0^b \int_0^l (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy - \int_0^l (X_i u_i + Y_i v_i + X_j u_j + Y_j v_j) dy \quad (7)$$

上式中の X , Y をフーリエ級数展開すると次のようになる。

$$X = \sum_{n=1,2,\dots} X_n \sin k_n y, \quad Y = \sum_{n=1,2,\dots} Y_n \cos k_n y \quad (8)$$

(7) 式に (4), (5), (6), (8), を代入して U_P を求め、最小エネルギー原理の適用の基に級数項別に整理するならば次式のようなマトリックス式が得られる。但し、物体力および nodal line 以外に作用する力は考えないものとする。

$$t \cdot \begin{bmatrix} \frac{tE}{2b} + \frac{tGb^2k_m^2}{6} & -\frac{tGbk_m}{4} & -\frac{tE}{2b} + \frac{tGb^2k_m^2}{12} & -\frac{tGbk_m}{4} \\ -\frac{tGbk_m}{4} & \frac{tGb^2k_mE}{6} + \frac{tG}{2b} & \frac{tE}{2b} + \frac{tGb^2k_m^2}{6} & \frac{tGbk_m}{4} \\ -\frac{tE}{2b} + \frac{tGb^2k_m^2}{12} & -\frac{tGbk_m}{4} & \frac{tE}{2b} + \frac{tGb^2k_m^2}{6} & \frac{tGbk_m}{4} \\ \frac{tGbk_m}{4} & \frac{tGb^2k_mE}{12} - \frac{tG}{2b} & \frac{tGbk_m}{4} & \frac{tGb^2k_mE}{6} + \frac{tG}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{im} \\ v_{im} \\ u_{jm} \\ v_{jm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b}{2} X_{im} \\ \frac{b}{2} Y_{im} \\ \frac{b}{2} X_{jm} \\ \frac{b}{2} Y_{jm} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

SYM

2.3 帯板要素の面外力と面外変位；帯板要素の面外力と面外変位の間には次の境界条件が成立するものとする。(図-1 参照)

$$x=0 \text{ のとき } \rightarrow w=w_i, \theta=\theta_i \quad (10)$$

$$x=l \text{ のとき } \rightarrow w=w_j, \theta=\theta_j \quad (11)$$

ここに仮定された境界条件を満足する関数は、一般に次式により表わされる。

$$W(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots} \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right) \theta_{im} + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right) w_{jm} + \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x^3}{b^3}\right) \theta_{jm} \right] \sin k_m y \quad (12)$$

面外力 M_y, M_{zy} は本論においては無視する。(13) 式を用いて面外力に関する全エネルギーを求め、面内の場合同様に最少エネルギー原理を適用するならば、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{b^3} & & & \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} & & \\ -\frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{12EI}{b^3} & \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{im} \\ \theta_{im} \\ w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{im} \\ M_{im} \\ W_{jm} \\ M_{jm} \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

2.4 基本静定系の力と変位； (9) と (15) を用いて帯板要素の力と変位の関係を次式のように表わすことができる。

$$F_m = \{ U_{im} \ V_{im} \ W_{im} \ M_{im} \ U_{jm} \ V_{jm} \ W_{jm} \ M_{jm} \}^T \quad (14)$$

$$\delta_m = \{ u_{im} \ v_{im} \ w_{im} \ \theta_{im} \ u_{jm} \ v_{jm} \ w_{jm} \ \theta_{jm} \}^T \quad (15)$$

$$F_m = S_m \cdot \delta_m \quad (16)$$

次に基本静定系の力と変位の関係を考えるならば全体座標系を (X, Y, Z) で表わし、帯板要素座標系を (x', y', z') で表わすと次式のようになる。但し、 R は座標変換テンソル

$$F_m = R F_m' \quad (17)$$

$$\delta_m' = R^T F_m \quad (18)$$

2.5 隔壁の骨部材への換算；ダイヤフラムが隔壁より薄い場合は右図のような置換が可能なものとする。板から骨への換算式は次式で求める。

長方形の場合

$$A_b = \frac{G t L_b}{2 E h_p} \quad (19)$$

台形の場合

$$A_b = \frac{G t h^2}{E(a+b)} \left\{ 1 + \left(\frac{a+b}{2h} \right)^2 \right\} \quad (20)$$

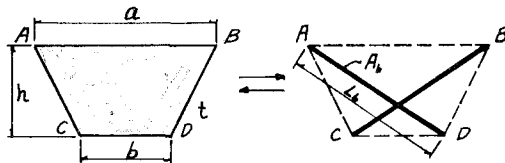


図-2 隔壁と骨要素の関係

A_b ；換算骨部材の断面積

A_p ；隔壁の面積

L_b ；換算骨部材の部材長

t ；隔壁の板厚

2.6 不静定力の処理；不静定力は変形の釣り合いから求める。 r 個の不静定力に対しては r 元の連立方程式を解くことになり、次のような一般式によって表わされる。

$$\delta_{m0} + \sum_{l=1}^r X_l \delta_{ml} - X_m \delta_{mm} = 0 \quad (21)$$

δ_{m0} ；基本静定系に外力を作用せしめたとき、 m 不静定部材点の部材方向の変位量

δ_{ml} ；基本静定系の l 不静定部材点に l 部材方向の単位不静定力 $X_l = 1$ が作用したときの m 不静定部材点の部材方向の変位量

δ_{mm} ；基本静定系の m 不静定部材点に m 部材方向の単位不静定力 $X_m = 1$ が作用したときの m 部

残点の部残方向の変位量

X_m ; 不静定部残力

なお、中間支点の支点反力は不静定部残同様に不静定外力として取り扱う。

3. 級数展開項数と精度について

フーリエ級数の応用の基に解を求める手法は厳密解が求まらな
い場合によく用いられる。本論における、有限帯校要素法の一つ
の特長は構造を帯校要素に分割して、個々の要素の変位と力の関
係をフーリエ級数を用いて確立し、そのときの係数を各要素間で
連続させて解く点にある。そこで、以下にフーリエ級数について
項数と精度という点からホローしてみる。

フーリエ級数を応用して解を得ようとする場合、級
数項は1から無限まで展開して、それを集合するらば、
厳密解が得られるであろう。しかし、実際において
は利用者が適当と判断するN項まで展開し、それを
解として用いる場合が多い。このようにして求めた解
の評価は、厳密解とN項までの解との差がN+1項から
無限項までの集合で求められるため、級数展開以外で
厳密解が得られない場合においてはかなり困難な問題
である。また、三角函数の応用であり、波形を応用して
いる関係上着目している解はある項数以上まで
展開するならば未知な厳密解を中心に振幅するだらうから、
その振幅の量で判断すること一つの方法であるが、
実用性に乏しいと思われる。そこで今回は外力がより正しく
評価されるならば、解析手法の特長からその解は相似的に
厳密解に近づくものと仮定されると思うから単純梁に外力
を作用させて、フーリエ級数の応用の基に曲げモーメント、
せん断力を求め、橋理論の解と比較し適用構造物
の解の評価の基準にすることを試みた。

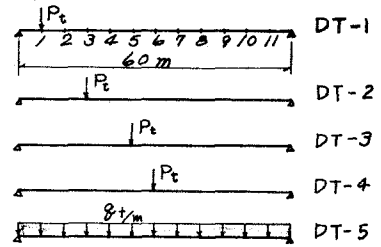


図-3 荷重ケース

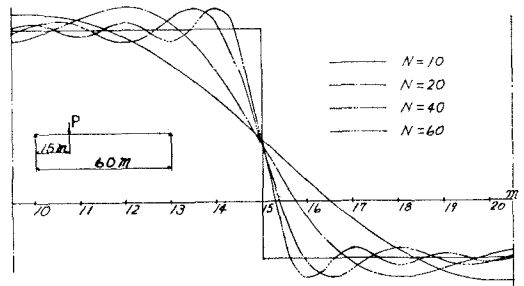


図-5 せん断力図

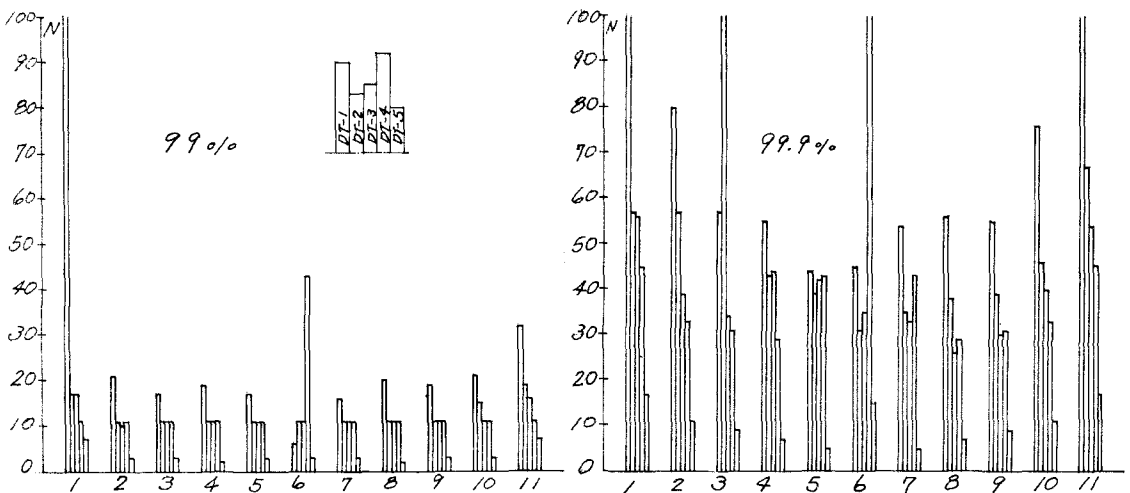


図-4 展開項数と曲げモーメントの精度

図-3は今回計算した単独梁と荷重ケースを示したものである。この各荷重ケースに対して、曲げモーメントにおいて99%の精度を得るためには何項まで展開すればよいか梁の12等分点について示したのが図-4(a)である。同様に99.9%の精度を得るためには何項まで展開すればよいか示したものが図-4(b)である。この結果より、集中荷重の場合99%の精度を要求するならば、スパン長(m単位)の $l/4$ 程度の項まで展開すれば局部的には不十分でも平均としてほぼ満足されることがわかった。また、99.9%の精度を要求するならば $2l/3$ 項以上展開する必要があることが明らかになった。

なお、等分荷重に対しては図中 $N=2N'-1$ (N' :実際の展開項数)と表わしたので99.9%の精度の要求にも10項以下の展開で得られることがわかった。図-5には集中荷重作用時のせん断力の分布状態を示した60mの梁に対して、60項まで展開しても棒理論の解とではまだまだ近づくことがわかった。しかし、せん断力の構造要素に対する伝達状態については棒理論で表わせない点があるので構造全体にどのように影響するか曲げモーメントとは性質が異なるのでさらに検討中である。

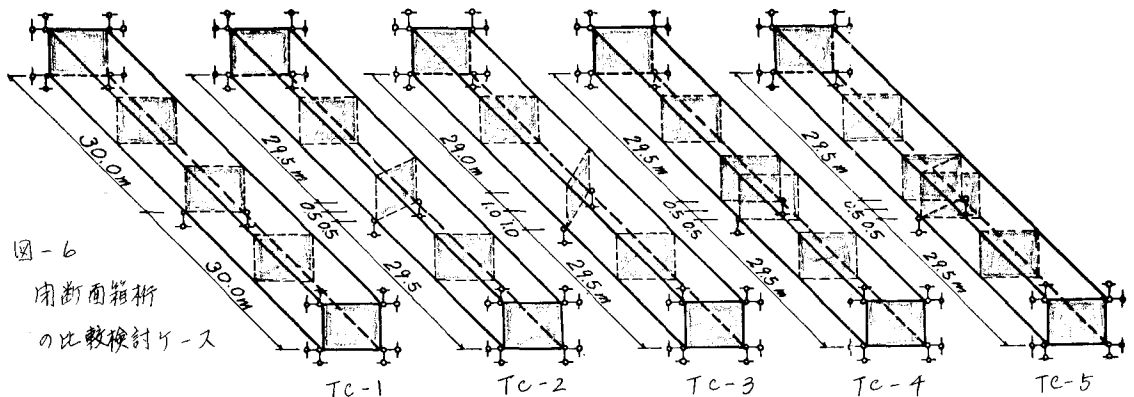
次に、重ね合せの誤差について検討する。個々の厳密解 $A_1, A_2, \dots$ がわかっていく、近似解群によって、 $d_1, d_2, \dots$ ($d_1 > d_2, d_3, \dots$)の誤差内の解が得られれば、重ね合せの結果生ずる誤差は次のようになる。

$$d_0 = \frac{(1-d_1)A_1 + (1-d_2)A_2 + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots} < d_1 \quad \bar{\alpha}_0 = \frac{-(1-d_1)A_1 + (1-d_2)A_2 + (1-d_3)A_3 + \dots}{-A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots} > d_1$$

d_0 は $A_1, A_2, \dots$ が独立関数であるとき生ずる誤差である。 $\bar{\alpha}_0$ は $A_1(A_2, A_3, \dots)$ のような関数関係にあるとき生ずる誤差である。中間支点曲げモーメントには $\bar{\alpha}_0$ の誤差が生ずるので、注意すべきである。

4. 中間支承部の応力性状について

図-6には今回検討した開断面箱桁のTc-1からTc-5までの長手方向の基本寸法および構造形状を示した。図-7には開断面箱桁の断面構成と有限帯域要素分割図を示した。図-8には偏載等分荷重 2 t/m とわいり等分布 2.5 t/m および等分荷重 2 t/m の各荷重状態に対するTC-1の中間支承上の直応力分布を示した。(a),(c)図において、フランジ端(ウェブ上下端)に応力の集中する原因はせん断変形に影響される点が多いと思われる。また、集中度は示方書等に用いられている文献より、かなり大きいようであることおよび上・下フランジで集中度の異なっていることがわかった。



フランジ端に集中する傾向があると考えられる。

中間支点の応力は静応力として有限帯板要素法より求めたが、棒理論で求めた値に対して99.5%であったことを付記する。

図-12には今回検討した開断面箱桁のT0-1からT0-3までの長手方向の基本寸法および構造形状を示した。図-13には開断面箱桁の断面構成と有限帯板要素分割図を示した。図-14には偏載等分布荷重 2 t/m とねじり等分布荷重 2.5 t/m および等分布荷重 2 t/m の各载荷状態に対するT0-1の中間支承上の直応力分布を示した。(a),(b)図において、図-8と比較するとウエブ端に現われる応力は開断面の場合の方が大きい。これはせん断流の違いに起因するものと判断してよいであろう。(c)においては図-8でも明らかになったが、せん断変形の影響により応力集中率が示方書に用いられている文献より大きいことがわかった。

図-15は、図-14と同様の荷重ケースに対してT0-2とT0-3の中間支点上の直応力分布を比較検討したものである。図-14と図-15(c)においてT0-1からT0-2へと中間支点が変化した場合のウエブ上下端の直応力増加率は上フランジで1.11, 下フランジで1.01であった。このことより中間支承をskewにした場合、上フランジに対しては開断面箱桁同様の応力増加傾向を示すが、下フランジにはほとんど変化のないことがわかった。図-15(c)における比較検討においては応力性状において開断面箱桁の場合と全く逆の傾向を示すことがわかった。この原因は偏載荷重状態図-15(a)とねじり荷重状態(b)の組み合わせにより等分布荷重状態(c)が求められる点に留意するならばT0-3タイプの隔壁は偏載等分布荷重には有効に働くが、等分布荷重には働きすぎるため応力性状を逆転させていると判断できる。なおこの点は開断面同様設計では十分注意すべきであろう。

図-16にはT0-1に等分布荷重を載荷したときのフーリエ級数展開項を $N=30$ の場合と $N=60$ の場合の中間支点上の応力分布を示した。この結果は開断面箱桁の性状とはほぼ同一の傾向と判断してよい。

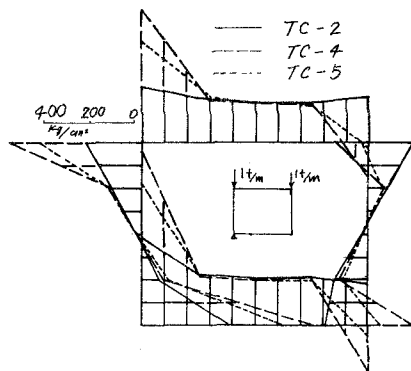


図-10 中間支点上直応力比較

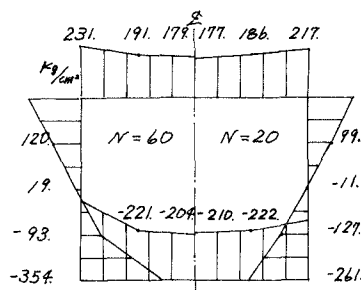


図-11 Nと応力値の関係

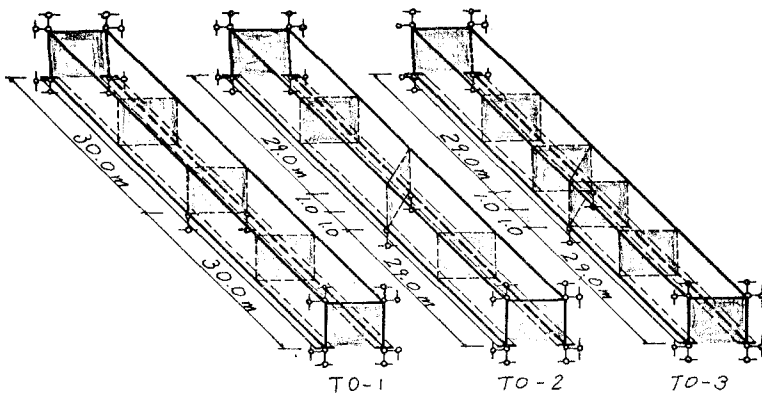


図-12 開断面箱桁の比較検討ケース

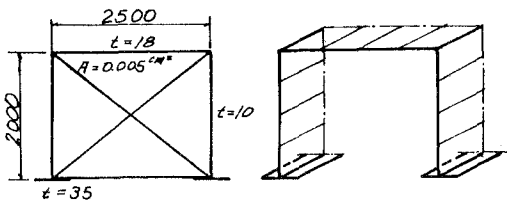


図-13 横断面と帯板要素

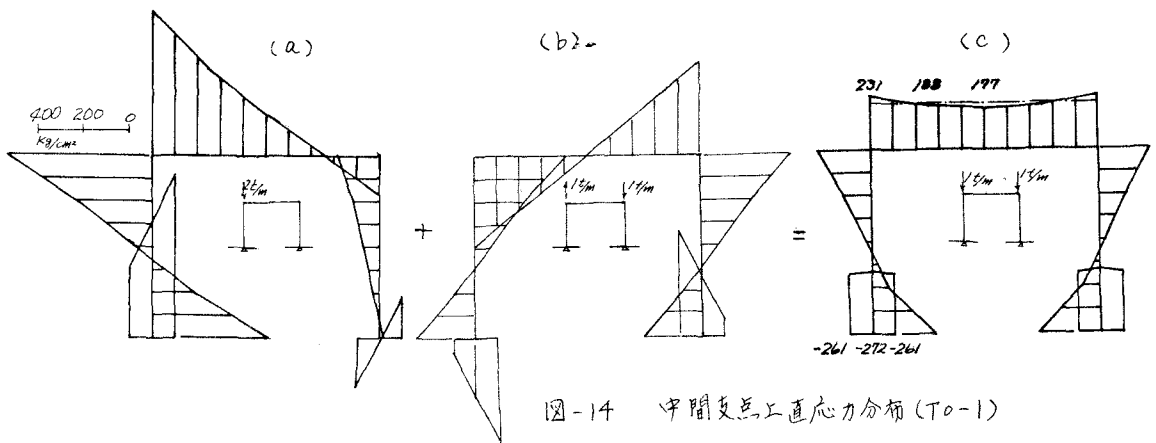


図-14 中間支点上直応力分布(T0-1)

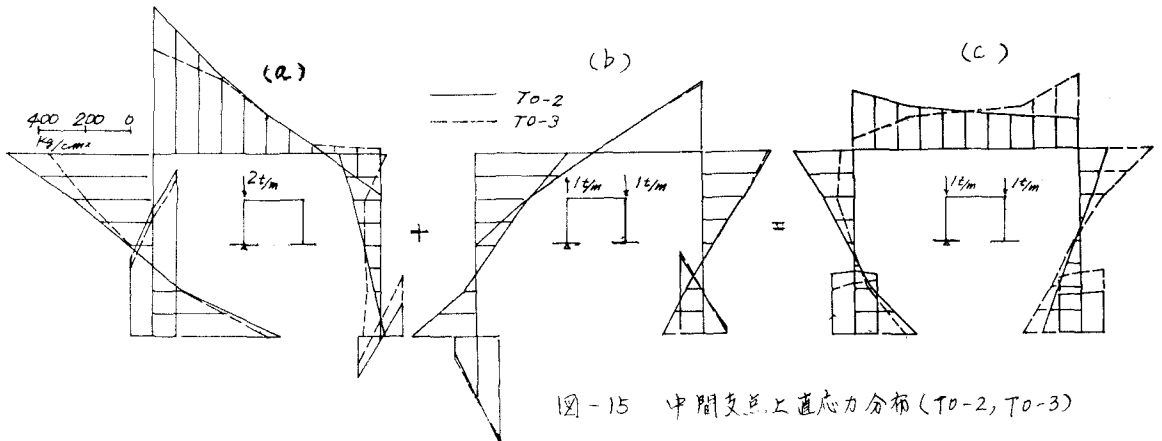


図-15 中間支点上直応力分布(T0-2, T0-3)

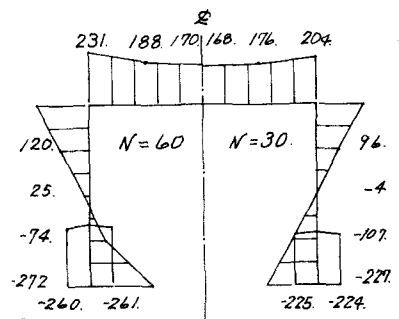
であらう。

5. おまけ

本論は有限要素法による応力の計算の基に中間支点部の応力状態の検討を行ったが、その結果以下のようなことが明らかになった。

- 1). 中間支点を skew にした場合上フランジに skew 0 の応力値より増加する傾向がわかった。この結果は設計に利用できると判断している。
- 2). skew 支点部の構造の補強は特に閉断面の場合注意しないと応力集中をまねく結果になることがわかった。
- 3). セン断わくれ現象も本解法においては考慮でき、有効中が比較的簡単に検討できる。
- 4). 本解法はフーリエ級数項をある項数以上で展開すれば中間支点という境界部でも十分利用できる。

図-16 N と応力値の関係



また、本論においてはセン断力の性状分析、隔壁の抵抗状態およびねみ等に関する検討は省略したが発表当日すくには整理しく追加したいと思っている。