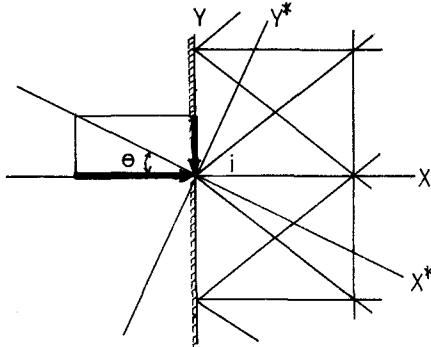


1. まえがき

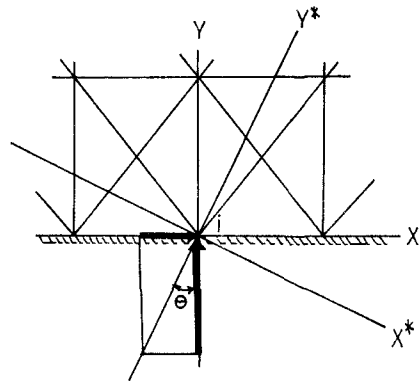
有限要素法において、摩擦力を取扱う手法は、ほとんど発表されていない。本論文では、摩擦係数を導入する方法について述べられている。摩擦力が働く節点力についてのみ座標変換することにより摩擦係数を導入している。この場合、変位と力の座標が異なる節点が存在するので、剛性マトリックスは、非対称となる。本論文では、非対称マトリックスの有効な解法についても述べられている。例題として、砂の受動土圧について計算し、その結果について評価を加えている。

2. 摩擦力の導入法

2-1. 摩擦力のみ作用する場合



(a) X方向変位既知の場合



(b) Y方向変位既知の場合

図-1 摩擦角 θ と力の座標変換の関係

図-1に、この場合を示す。摩擦力を計算するには、X方向、Y方向反力がある比を持つようにすればよい。摩擦力導入において、問題となるのは、X方向、またはY方向反力が未知の場合である。なぜなら、初めから、両方向力が既知なら、摩擦係数を入れて、力を与えることができる。また、X方向、Y方向変位が既知の場合、X方向、Y方向反力がある比を持つようにすることは、力学的に不可能である。ここであつた摩擦力導入の場合の条件は、X方向、またはY方向変位いずれかが既知の場合である。X方向変位既知の場合、摩擦力（Y方向力）とX方向反力の合力方向は、摩擦角 θ とすると、X方向より θ 右、または左に回転した方向となる。この方向に新しい座標の X^* 軸、それと直角方向に Y^* 軸を取る局部座標を考える。 X^* 軸方向反力を未知、 Y^* 軸方向の既知力を零として計算すれば、摩擦係数を導入できる。Y方向変位既知の場合は、 Y^* 方向反力を未知、 X^* 方向力を零として計算する。 X_i, Y_i, X_i^*, Y_i^* をそれぞれ、節点iでの各軸方向の力とすると、それぞれの間には、次の関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i^* \\ Y_i^* \end{Bmatrix} \quad \text{または} \quad P_i = L P_i^* \quad (1)$$

ただし、 θ は、左回転のとき正、右回転のとき負となる。

構造全体の剛性方程式がつぎのようになっていたとする。

$$\begin{aligned} k_{11}d_1 + k_{12}d_2 + \dots + k_{1i}d_i + \dots + k_{1n}d_n &= P_1 \\ k_{21}d_1 + k_{22}d_2 + \dots + k_{2i}d_i + \dots + k_{2n}d_n &= P_2 \\ \vdots & \\ k_{i1}d_1 + k_{i2}d_2 + \dots + k_{ii}d_i + \dots + k_{in}d_n &= P_i \\ \vdots & \\ k_{n1}d_1 + k_{n2}d_2 + \dots + k_{ni}d_i + \dots + k_{nn}d_n &= P_n \end{aligned} \quad (2)$$

また、 $L^T = L^{-1}$ であるので、(1)式を(2)式に代入すると、(2)式の i 行は、次のようになる。

$$L^T k_{i1}d_1 + L^T k_{i2}d_2 + \dots + L^T k_{ii}d_i + \dots + L^T k_{in}d_n = P_i^* \quad (3)$$

以上から、わかるように、 i 点の節点力に対応する行の各要素は、左から L^T が乗じられている。これを一般的に示すと次式となる。

$$[T][K][d] = [P^*] \quad (4)$$

ただし、

$$[T] = \begin{bmatrix} L_1^T & & & & 0 \\ & L_2^T & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & L_i^T & \\ & & & & \ddots \\ & & 0 & & & L_n^T \end{bmatrix} \quad (5)$$

もし、座標 i 点の力に関して、座標変換を受けていないと、 L_i^T は、単位マトリックスで、 $P_i^* = P$ となる。以上のように、剛性マトリックスを修正して、この連立一次方程式を解けば、摩擦力が求められる。ここで、普通の剛性マトリックスと異なる点は、修正された剛性マトリックスが非対称であるということである。これは、節点に関する変位の座標と、力の座標が異なるためである。

2-2. 粘着力と摩擦力が同時に作用する場合

図-2に示すように、垂直力 P に対し、摩擦力 F が定数項を持っていて、次式で示される場合である。

$$F = \tan\theta \cdot P + C \quad (6)$$

この場合の、座標変換を図-3に示す。図からわかるように、摩擦力から定数項を引いた摩擦力については、2-1とまったく同様に、反力との合力方向を、 X 方向変位既知では X^* 方向に、 Y 方向変位既知では Y^* 方向にとる。この場合、 X^* 方向、または Y^* 方向は、 X 軸、または Y 軸より θ 回転している。一方定数項の

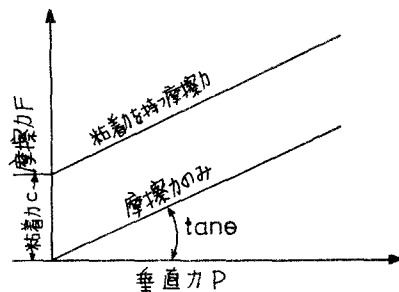


図-2 粘着力を持つ摩擦力

力である粘着力は、X方向変位既知の場合Y軸方向に、Y*軸方向をとり、Y*軸に粘着力をとる。Y方向変位既知の場合は、X軸方向にX*軸をとり、X*軸に粘着力をとる。 X_i, Y_i, X_i^*, Y_i^* をそれぞれ節点iでの各軸方向の力とすると、X方向、Y方向変位既知の場合、それぞれ次式で示される。

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_i^* \\ Y_i^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_i^* \\ Y_i^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} \quad (7)$$

(X方向変位既知) (Y方向変位既知)

または、

$$P_i = L_x P_i^*, \quad P_i^* = L_y P_i \quad (8)$$

以後の計算は、2-1と同様に、摩擦力の作用する節点に関する行の各要素に、 L_x^{-1} 、または L_y^{-1} を左から乗ればよい。なを L_x^{-1} 、 L_y^{-1} は、次式となる。

$$L_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta/\cos\theta & 1 \end{bmatrix}, \quad L_y^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\sin\theta/\cos\theta \\ 0 & 1/\cos\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

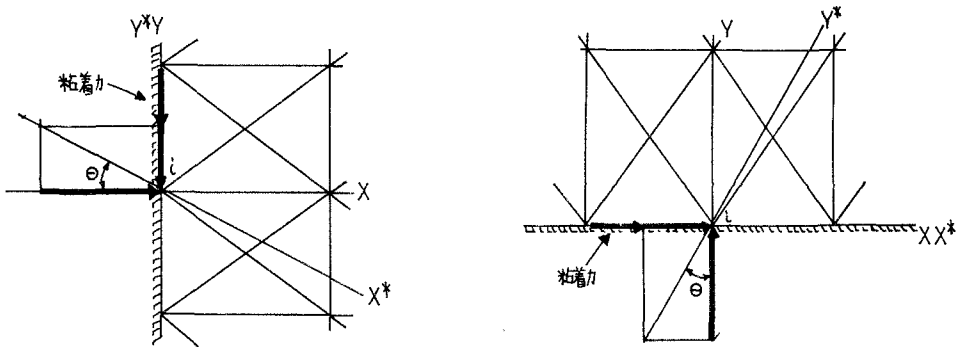


図-3 粘着力が働く場合の座標変換

この方法は、2-1をより一般的にしたもので、粘着力がない場合として計算すれば、2-1と同様な結果を得る。X方向変位、または、Y方向変位を与える場合、すでに、その方向に初期の垂直力が作用している場合は、その垂直力による摩擦力を粘着力と考えることにより計算できる。初期の垂直力の代表例としては、重力などがある。

2-3. 摩擦の方向が未知の場合

2-1, 2-2 では、摩擦が働く節点、摩擦の方向が予知される場合について述べたが、一般には、未知である。摩擦の方向は、節点の変位する反対方向に作用する。ある節点の変位の方向を予想して、摩擦の方向を予想し、計算した結果、摩擦力により、節点変位が予想と逆方向へ変位し、不合理なことが生ずることがある。これを解決するには、次の方法を用いるとよい。この方法は、反復計算する手法である。まず始めに、摩擦力が作用すると予想される節点すべてを摩擦面に固着として計算する。その結果、摩擦面にどう力の絶対値が、垂直力に摩擦係数を乗じた値の絶対値より大きい場合は、それらの力の方向により摩擦力の方向を定め、その節点に関し座標変換を行う。また、小さい場合は、

そのまま、固着として反復計算する。もし、この反復計算中に摩擦が働くとして計算したため、変位方向と摩擦方向が同じ方向になった節点は、あらためて固着として計算する。以上の反復計算により正しい摩擦力を導入することができる。

3. 非対称連立方程式の有効な解法

3-1. SF法による剛性マトリックス組立、記憶法

この方法は、各要素の剛性マトリックスを順次求め、それを重ね合わせる一般の方法と異なり、全体の剛性マトリックスの各要素に対する寄与を計算する方法であり、各節点ごとに演算をして、全体の剛性マトリックスの各節点に対する行要素を求めて、シーケンシャルに外部、または、内部記憶に出力する方法である。この方法は、重ね合わせの場を必要としないので、大容量の内部記憶、または、ダイレクトアクセス可能な外部記憶を必要とせず、外部記憶とダイレクトアクセスしないので時間的にもすぐれている。

全体の剛性マトリックスの節点に関する行要素を求めるには、二つの演算部分に分かれる。それは、対角値を求める場合と、非対角値を求める場合である。

a) 対角値を求める方法

構造全体の剛性マトリックスの節点 i に関する対角値を求めるには、その節点 i を共有するすべての要素について次の計算を行ない加え合わせばよい。

$$[k_{ii}] = \sum [B_i]^T [D] [B_i] d(VOL) \quad (10)$$

b) 非対角値を求める方法

節点 i から放射している線分(三次元問題では稜)を共有するすべての要素について次式の計算を行ない、加え合わせば、線分(稜)1本について計算が終る。この線分他端の節点番号を j とする。

$$[k_{ij}] = [k_{ji}] = [B_j]^T [D] [B_i] d(VOL) \quad (11)$$

この計算により全体の剛性マトリックスの i 行 j 列、または、 j 行 i 列の値が求められる。この計算を節点 i から放射している線分すべてについて行なうと、節点 i に関する剛性マトリックスの非対角値がすべて求められる。この方法により順次節点に関して、これらの計算を行ない、剛性マトリックスの行要素の値を求めてゆき、シーケンシャルに出力し、非零要素のみを一次元配列に記憶し、全体の剛性マトリックスのシーケンシャルファイルを作る。この方法をSF法と名づける。これを(10)、(11)式の変数記号は、文献①に従う。連立一次方程式を直接法で解く場合は、消去分解過程で非零要素が発生する。SF法では、節点に関する行要素を求める時に、以前の節点に関する行要素がこの行要素のどこに穿らするか判断できるので、消去分解過程で発生する非零要素のための記憶場所を確保しながらラウアマトリックスの一次元配列を作る。また、幾何的インプットデータのみ記憶できる内部記憶があれば、剛性マトリックスが組立てられ、剛性マトリックスが対称であるので、(11)式で $i > j$ の場合のみ計算を行なう。摩擦カ等の局部座標変換は、節点に関する行要素ごとに出力されるので、たやすく行なうことができる。また、バンド幅に無関係に、剛性マトリックスを組立てできる。

3-2 SF法により組立てられた非対称剛性マトリックスの解法

非対称連立方程式を直接法で解くため、次の分解公式を用いた。 K を、下三角マトリックス $L=(l_{ij})$ 、上三角マトリックス $R=(r_{ij})$ と対角マトリックス $D=(d_{ii})$ に分解する。

$$K=L\bar{D}R \quad (12) \quad \text{とすると,} \quad L\bar{D}Rd=P \quad (13)$$

となる。ここで、

$$P=L y \quad (14) \quad , \quad \bar{D}Rd=y \quad (15)$$

であるから、(15)式より d を求める。ここで、 d は、変位ベクトルで、 P は、力のベクトルである。ここで、 l_{ij} , r_{ij} , d_{ii} は、サブマトリックスである。また、 D は、 L, R の対角値に等しい。

$$l_{i1}=r_{i1} \quad , \quad r_{ij}=r_{ij}$$

$$l_{ij}=r_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}d_{kk}^{-1}r_{kj} \quad (i>j) \quad , \quad r_{ij}=r_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}d_{kk}^{-1}r_{kj} \quad (j>i) \quad (16)$$

分解計算の手順は、(16)式と内容は、同じであるが異なった手順を取った。(16)式では、 l_{ij}, r_{ij} を求めるために、それより前の行、列の値を用いて寄与計算するが、ここでは、節点 i に着目し、 i に関する L の列要素と R の行要素により、後の行、列の寄与を計算する。この方法では、寄与計算後、 i に関する L の列要素と R の行要素は、不要になる。剛性マトリックス K は、非零要素と、分解消去過程で発生する非零要素のための記憶場所をもった非対称のマトリックスである。 K の下三角マトリックスは、列ごと(コラムワイズ)、上三角マトリックスは、行ごと(ロウワイズ)につながって、サブマトリックスの一次元配列になっている。まず、 K の下三角マトリックスを内部記憶の L に、上三角マトリックスを R に、計算機の容量の許すかぎり入れる。一般には、全部入らないので、後で述べるリング法を用いる。次に、節点 i に関する対角値である d_{ii} の逆行列をもとめ d_{ii}^{-1} とし、 d_{ii} の記憶場所に入れる。さらに、寄与 $C_{ij}=l_{ik}d_{kk}^{-1}r_{kj}$ を計算し、 $i \geq j$ の時 $l_{ik}=l_{ik}-C_{ij}$, $j > i$ の時 $r_{ij}=r_{ij}-C_{ij}$ の寄与計算を行う。ここで、寄与のうち $d_{kk}^{-1}r_{kj}$ は、後進代入に用いるので、外部ファイルに出力し、 $\bar{D}R$ のファイルを作る。この計算を $i=1$ から節点数 -1 までくり返すと、 L が求められる。さて、 K のすべての要素が、計算機容量に収まらない場合は、次の方法をとっている。分解、寄与計算中、実際に内部記憶に記憶される必要があるのは、分解、寄与計算している節点番号から、その節点に関する行要素の最大列番号の節点に関する列と行要素までであり、一般の問題では、この部分は、計算機の記憶容量に入る場合が多い。そこで、問題となるのは、後の行への寄与計算をして、不用になった列、行要素を内部記憶から出し、新しい次の剛性マトリックスを読み込み、計算しやすいように、再配列をすることである。しかし、次の手法を用いると再配列をしなくてすむ。すなわち、一次元配列で記憶している内部記憶の始めと終りを概念的に連結してリング状に記憶し、寄与計算の清んだ、不要になった列、行要素が記憶されていた場所に、次の新しい剛性マトリックスを読み込む。分解過程中、リング記憶上では、各要素は順序正しく並ぶ。このリング記憶の円周の長さを N とすると、剛性マトリックス L 番目のサブマトリックスは、リング上で M 番目に記憶される。ただし、 $M=M \bmod (L, N)$, $IF(M, EQ, 0) M=N$ である。この手法は、バンドマトリックス法にも応用でき

る。また寄与計算するための十分な内部記憶がない場合、寄与を一時的に外部記憶に記憶させて処理する。非対称マトリックス解法では、既知変位の導入は、容易となる。すなわち、既知変位の行の対角値に1を代入し、それ以外の要素を零とし、それに対応する既知力の項に、既知変位を入れてあげばよい。

この手法は、非零要素のみ計算し、外部記憶とはシーケンシャルアクセスを用い、バンドマトリックス法で、実際の構造のバンド幅と、内部記憶のバンド幅が一致しないと効率が悪いが、この方法ではどのような問題は生じない。

4. 例題（砂の受動土圧）

壁面に摩擦力が働く場合の砂の受動土圧を有限要素法と塑性方程式から求め両者を比較した。

4-1, 砂の応カーイずみ関係

砂の応カーイずみを表わすマトリックスは、非線形であるので、弾塑性変形係数で表わされる。また、この変形係数を、等方圧縮応力成分とせん断応力成分に分け、体積弾塑性変形係数とせん断弾塑性変形係数で表わす。以下に、軸対称応力を受ける場合の応カーイずみ関係を述べる。試料は、豊浦標準砂（比重2.664）である。

a) 体積弾塑性変形係数

体積弾塑性変形係数を求めるため等方圧縮試験を行った。結果を図-4に示す。この曲線を、次式で近似した。

$$E_v = A \sigma_m^{1/4} \quad (17)$$

したがって、体積弾塑性変形係数は、次式で示される。

$$K = \frac{4}{A} \sigma_m^{3/4} \quad (18)$$

ただし、Aは、初期間げき比により定まる定数である。

b) せん断弾塑性変形係数

せん断弾塑性変形係数を求めるために、平均応力一定試験を行った。結果を図-5に示す。図からわかるように、 $\tau_{0.02}/\sigma_m$ が0.6に達するまでは、体積変化は生じない。すなわち、この間は、等方性であり、せん断弾塑性変形係数は線形と見なせ、弾性変形をしていると考えられる。この点を越えた領域では、せん断力により粒間のすべりが生じ体積増加を伴うと考えられる。等方性であるとする、せん断力により体積変化は生じないので、この領域では、異方性になっていると考えられる。軸対称であるので、2軸直交異方性（面内等方性）と仮定すると、ひずみ増分と、等方圧縮応力増分とせん断応力増分の間には、次の関係がある。ただし、

$$\{d\sigma_m\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix}, \quad \{dS_d\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_1 - d\sigma_m \\ d\sigma_2 - d\sigma_m \\ d\sigma_3 - d\sigma_m \end{Bmatrix} \quad (19)$$

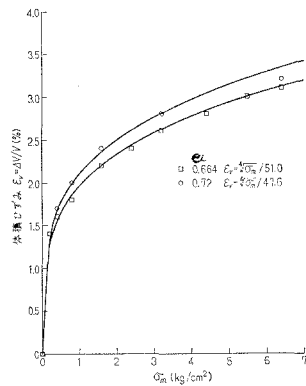


図-4 等方圧縮試験結果

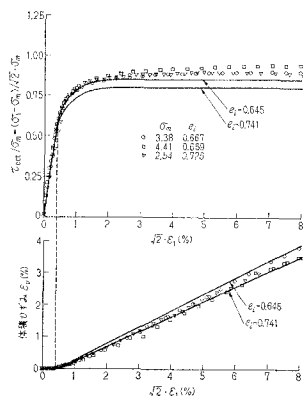


図-5 平均応力一定試験結果

$$\{d\epsilon\} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3K_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3K_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3K_2} \end{bmatrix} \{d\sigma_m\} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2G_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_2} \end{bmatrix} \{dS_d\} \quad (20)$$

図-5 の上図の接線が G_1/σ_m となるように横軸に $\sqrt{2}\epsilon_1$ をとった。また、 G_2 は、次式で示される。

$$G_2 = \frac{G_1}{1 + \sqrt{2}b} \quad (21) \quad \text{ただし、} b \text{ は、図-5 の下図の直線の傾きである。}$$

図-5 の上図の数値表現を図-6 に示す。図-5 での実線は、この数値表現を用い、破壊時の τ_{oct}/σ_m を側圧一定試験で求めた値により補正を加えたものである。図-7 に、 $K_1=K_2=K$ として、 G_1, G_2 をく2の式に代入して、側圧一定試験の応カ-ひずみ挙動を計算した結果を示す。この結果から、変形係数を、等方圧縮成分とせん断応力成分に分けて計算できることがわかる。

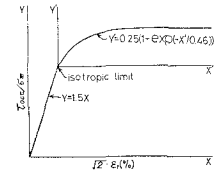


図-6 平均応力-一定試験結果の数値表現

4-2. 砂の受動土圧

ここでは、平面ひずみ問題として、砂の受動土圧を計算した。4-1 で求めた砂の応カ-ひずみ関係は、軸対称応力を受ける場合があるので、平面ひずみ問題では、直接利用できない。そこで、一般に土に対する有限要素法で用いられているように、砂は、等方性を保つとして計算した。そのために、せん断変形係数を次のようにして求めた。図-5 の横軸 $\sqrt{2}\epsilon_1$ を、 γ_{oct} と考えた。なせなら、等方性として、体積変化を零と考えると $\gamma_{oct} = \sqrt{2}\epsilon_1$ となるからである。

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad (21)$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2} \quad (22)$$

平面ひずみでの応カ-ひずみマトリックスは、次式となる。ここで $d\sigma_m$ を求めるのは、 K を求める

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_z \\ d\epsilon_z \end{Bmatrix} = [D][B]\{d\} \quad (23)$$

ために σ_m を計算しなければならないからである。 $K=f(\sigma_m, e_i)$ と考える。また、 $G=f(\gamma_{oct}, e_i)$ と考え、 γ_{oct} を求めるには、 $[B]\{d\}$ の計算と、(22) 式により求められる。 $e_i=0.72$ として、以上の応カ-ひずみ関係を用いて、受動土圧を計算した。図-8, 9 にその結果を示す。壁面の最大摩擦角を20度とし、壁面を少しづつ右方向に変位させ、増分法で計算を行った。壁面と砂のすべりは、初め上端部から

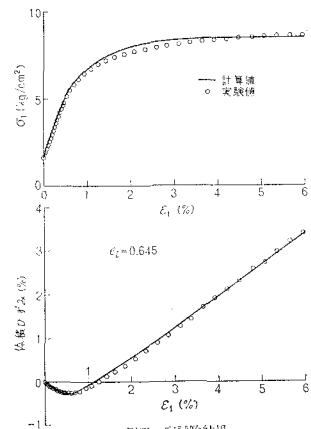


図-7 側圧一定試験結果

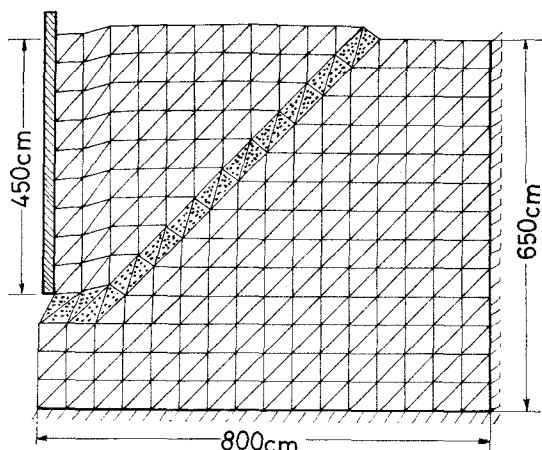


図-8 砂の受働土圧計算でのすべり線

始まり、次に下端部に拘り、中央部となる。本計算では、下端から次の節点では、最大摩擦角に達せず、すべらなかつた。

5. 評価

塑性方程式により⁴⁾、この場合の計算をすると、内部摩擦角 $\phi=33$ 度の場合に一致した。 $e_i=0.72$ での内部摩擦角は、40度であり、有限要素法計算の方が土圧は、低い値を示した。これは、両者の計算の仮定条件がかなり異なるためであろう。図-8からわかるように、すべり線の方法は、45度となり、現実や塑性方程式による計算とは一致しない。これは、砂を等方性として計算したためで、最大せん断応力が45度方向に生じ、45度方向にせん断ひずみが生じたためである。このため、すべり線の長さが、短くなっている。土に対する有限要素法において、特に破壊現象まで解析するには、異方性を導入しなければならないであろう。応力解析で、等方性限度内にある場合は、その必要性はないであろう。今後、土のより一般的な異方性を含んだ応力-ひずみ関係の究明が必要であろう。さて、構造物を有限要素法で解析する場合、ほとんど摩擦角は、導入されておらず、今後さらに精度を上げるためには、摩擦力の導入が必要となるであろう。例えば、層組問題での支持点のマサツ、サイロでの壁面摩擦、杭の抵抗力、摩擦を利用した接手部の応力解析、境界条件の複雑な場合の受動、主動土圧の計算などに応用されるであろうし、有限要素法計算に摩擦角を導入することによって、より一般的な解析法となり、応用分野が広がるであろう。

参考文献

- 1) ツェンキー・グッツ、O.C. & チュン、Y.K. 原著：マトリックス有限要素法、昭和45年
- 2) 岩崎峯夫：砂の応力-ひずみ関係についての一考察、土木学会論文報告集 第209号、1973、1月
- 3) 岩崎峯夫：有限要素法における剛性マトリックス組立の効率的なプログラム法、土木学会昭和48年度全国大会講演概要集工-40
- 4) ソコロフスキー：土のような粒状体の力学、PP239~240、ホム社、1960
- 5) 信原泰夫他：有限要素法のプログラムデザイン、土音展覧
- 6) 岩崎峯夫：剛性マトリックス組立の効率的な一方法、港湾技術研究所報告第11巻1号、1972年3月
- 7) 岩崎峯夫：三次元有限要素法の実用的プログラム法、港湾技術研究所資料、No.148、Dec.1972
- 8) 多田正巳：粒体貯槽における受働土圧の問題、石川島播磨技術報 Vol.13、No.3、PP246~258、昭和48年5月

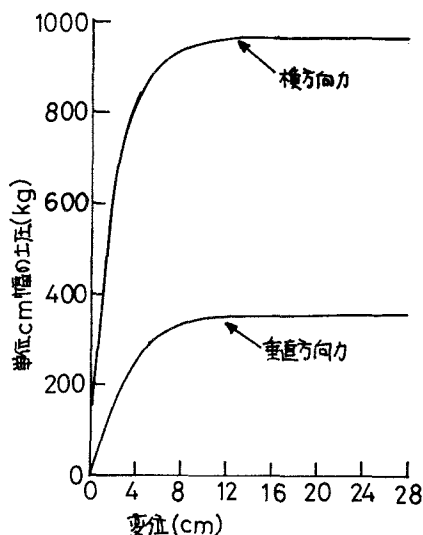


図-9 変位と土圧の関係