有限要素法と差分法の等価性に基づく一離散化手法

川崎重工業　坂井藤一[*]

1　まえがき[**]

近年、有限要素法はその数学的根拠が確立されるにつれて，単に連続体問題の解析にとどまらず、一般的な数値解析のための手法として，差分法とともにその広範な応用性が注目されている。

一般に従来の定説では，差分法は純然たる数学的近似であり，有限要素法は変分原理によって物理的近似に基づいていると言われている。さらにまた，差分法は一般の微分方程式に適用可能であるが、有限要素法は変分原理に基づくため，適用範囲が制限されているとも言われて来た。

そもそも，航空機の三角形翼の応力解析問題[3]を端緒として展開された有限要素法は、その後開発者の一人であるR.W. Clough によって土木建築の分野にいちはやく採入れられ，[4]多方面に応用され今日に至っている。しかし，1960年代においては，主としてエネルギー原理にその基礎を置いていたので，エネルギー原理の適用可能な物理現象あるいは広義のエネルギー汎関数を設定できる問題に対象が限られていた。1960 年代末からJ.T.Oden[5),6)]などの努力および応用数学者の参加によって，有限要素法は数学的基盤が確立され始め，それとともにGalerkin 法[***]などのweighted residuals wethod も導入され，一般的な数値解析法として適用範囲が拡張しつつある。

本報告では以上の観点から主に次の諸点について述べることにする。

(1) 有限要素法と差分法の等価性に関する考察

(2) 非自己随伴方程式あるいは初期値問題における有限要素法と差分法の関係に関する考察

以上の結果として，一見相異なる根拠に基づく有限要素法と差分法は，本論の立場に依れば等価な関係にあり，旧来の差分法の拡張あるいは有限要素法への差分概念の導入として差分要素法が誘導され得ることが示される。また，有限要素法と差分法の関連から，それらを包含する離散化手法の体系化と各手法の概念の明確化が可能ではないかと推察されるので，その一つの試みを示した。

2　有限要素法と差分法の等価関係

2-1　差分汎関数

次のような汎関数の極値問題を考えよう。

---

*) 鉄構事業部東京設計事務所勤務　工博

**) 本論文の一部はマトリックス構造解析シンポジウム[1)]および土木学会年次講演[2)]にて発表された。

***) Galerkin 法を有限要素法に適用した最も初期のものには、著者，[7)] R.H. Gallagher，[8)] B.A. Sqabo et.al.[9)]などがある。

$$J = \int_a^d F(x, y(x), y'(x))\, dx \qquad (1)$$

ただし，　$y(a) = A, \quad y(b) = B$　(2)

(2)の条件を満足する連続（かつ1階微分可能 —— Weierstrass — Edmann の定理から，角点が存在してもかまわない）な関数 y の集合の中で，(1)の J を極値にするものは，次の Euler 方程式を満足する。

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0 \qquad (3)$$

この時は次の条件が成立つ。

$$\delta J = 0 \qquad (4)$$

同様に次のような汎関数 JD を考える。

$$JD = \sum_{i-1}^{N-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right) h_i \qquad (5)$$

ここで $x_i = a, \; x_N = b$　(6)

$y_i = y, (x_i), h_i = x_{i+1} - x_i$

ただし $y_1 = A, y_N = B$　(7)

(5)式から，

$$\frac{\partial JD}{h_i \partial y_i} = F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)}{h_i} \qquad (8)$$

(8)式の右辺は，$h_i, h_{i-1} \to 0$ に対し次の値に収束する。

$$F_y(x, y, y') - \frac{\partial}{\partial x} F_{y'}(x, y, y') \qquad (9)$$

この時，(8)の左辺は，$\dfrac{\partial JD}{h_i \partial y_i} \to \dfrac{\delta J}{\delta y}$　(10)

$\dfrac{\delta J}{\partial y}$ は変分導関数と呼ばれる。(4)の条件は (10) 式が0になることと同じである。以上の点から、Jの極値問題とJDの極値問題は，$h \to 0$ の極限において一致することが分る。

(8)式の右辺を0とおけば

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right) - F_{y'}\left(x_i, y_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)}{h_i} = 0 \qquad (11)$$

(11)式は汎関数 JDのEuler方程式であるとともに(3)式の差分表現であることが分る。すなわち、汎関数Jの近似として、差分汎関数 JDを定義すれば，そのEuler方程式は J のEuler方程式の差分表現となっている。

ここで注意すべきことは、J は y (x)の汎関数であり、許容関数 y は(2)の条件と共に定義域(a，b)で連続でなければならなかった。しかるに，JDはN+1 個の変数 y_i の汎関数となり，y_i は(7)式以外は何ら制限を持たないことである。

2.2 幾つかの例

(1) 棒の引張問題（図－1）

基本方程式 $EA(x)\dfrac{d^2u}{dx^2}+k(x)u(x)+\bar{p}(x)=0$ (12)

ポテンシャルエネルギー $\pi_i=\frac{1}{2}\int_0^{\Delta x}\{EA(x)(\frac{du}{dx})^2-2\bar{p}(x)u(x)+k(x)u^2(x)\}dx+P_iu_i-P_{i+1}u_{i+1}$ (13)

差分方程式 $EA_i\dfrac{u_{i+1}-2u_i+u_i}{(\Delta x)^2}-k_iu_i+\bar{p}_i=0$ (14)

差分ポテンシャルエネルギー

$$\pi D_i=\frac{\Delta x}{2}\{E\frac{A_i}{2}(\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x})^2-2\bar{p}_iu_i+k_iu_i^2\}+P_iu_i-P_{i+1}u_{i+1} \quad (15)$$

内挿関係を次のように選んで有限要素法を展開する。

$$u=w^{(i)}u_i+w^{(i+1)}u_{i+1} \quad (16)$$

ここで

$$w^{(i)}=1-\frac{x}{\Delta x},\quad w^{(i+1)}=\frac{x}{\Delta x} \quad (17)$$

これを(13)に代入し，Castiglianoの定理を適用すれば，次の要素剛性方程式を得る。

$$\begin{bmatrix}\alpha+\beta_{i,i} & sym\\ -\alpha+\beta_{i,i+1} & \alpha+\beta_{i+1,i+1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ u_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_i+\gamma_i\\ P_{i+1}+\gamma_{i+1}\end{Bmatrix} \quad (18)$$

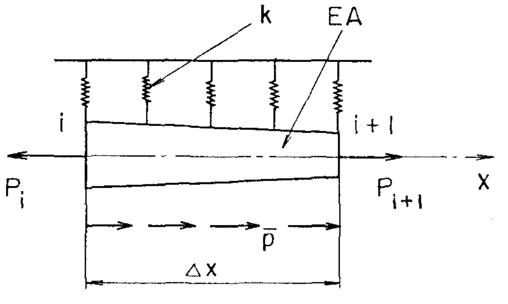
ここで

$$\alpha=\frac{1}{(\Delta x)^2}\int_0^{\Delta x}EA\,dx \quad (19)$$

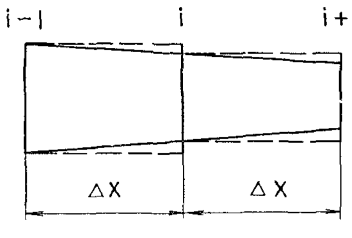
$$\beta_{m,n}=\int_0^{\Delta x}kw^{(m)}w^{(n)}dx \quad (20)$$

$$\gamma_\ell=\int_0^{\Delta x}pw^{(\ell)}dx \quad (21)$$

これらはそれぞれ振動問題における massとの対応から consistent rigidity, consistent spring coefficients, consistent load と呼んでよい。



Figure－1 Bar Problem



Figure－2 Step-wise Approximation

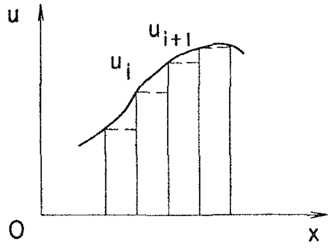
差分法との関連を考えよう。

通常我々は変断面などに対処するに，図－２のような step-wiseな近似を行なっている。

その結果は通常の剛性マトリックスになるが，さらに汎関数(19)の独立変数 $u(x)$ を(16)のような形でなく step-wise に近似したらどうなるのであろうか。

たとえば，図－３のように要素内で $u=u_i(0\leqq x\leqq\Delta x)$ とするならば，[※)] 式(13)は式(15)となり，その時の剛性方程式は，

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_i}{\Delta x}+k_i\Delta x & sym \\ \frac{EA}{\Delta x} & \frac{EA}{\Delta x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_i+\bar{p}_i\Delta x \\ P_{i+1} \end{Bmatrix}$$



Figure－3 Const. Displacement

となる。要素の重ね合せの結果は，(14)の差分式と一致する。

さらに，式(22)は式(18)と比べると明らかなように lumping が行なわれていることが分る。

※)ただし，このままでは要素境界で $\frac{du}{dx}\to\infty$ となってしまうので，$\frac{du}{dx}=\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}$ と近似する。その時要素境界において $\frac{du}{dx}$ のギャップは有限である。[10]

(2)　波動方程式

次のような空間１次元の単純な波動方程式を考えよう。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (23)$$

この式は書替えれば通常の波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (24)$$

式(23)に対し次の最小二乗変分原理を適用する。[11]

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}(u_t+au_x)\,dt\,dx \qquad (25)$$

これより停留条件として次の式を得る。

$$u_{tt}+2au_{tx}+a^2u_{xx}=0 \qquad \text{Euler 方程式}$$

$$\left.\begin{aligned} &u=f(x)\\ &u=g(t)\\ &u_t+au_x=0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{境界条件}$$

図-4(a) のような要素を考え，面積座標を Lj (j = k, ℓ, m) とする。
内挿関数を次のように採る。

$$u = L_j u_j = \{L^T\}\{u\} \tag{26}$$

これより，有限要素法を展開すれば次のような式を得る。

$$\{(c + a\,b)^T\}\{u\} = 0 \tag{27}$$

ここで，

$$\{b\} = \frac{1}{2\Delta}\begin{Bmatrix} y_\ell - y_m \\ y_m - y_k \\ y_k - y_\ell \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \frac{1}{2\Delta}\begin{Bmatrix} x_m - x_\ell \\ x_k - x_m \\ x_\ell - x_k \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_k \\ u \\ u_m \end{Bmatrix} \tag{28}$$

1) Friedrichs の差分式

図-4.(b) のような要素を採れば，次の Friedrichs 式を得る。

$$u^n_{i+1} = \frac{1}{2}(u^{n+1}_i + u^{n+1}_i) - \frac{1}{2}(u^{n+1}_i - u^{n-1}_i) \tag{29}$$

2) Godunov の差分式

図-4.(c) のような要素を採れば，次の Godunov 式を得る。

$$u^{n+1}_{i+1} = u^{n+1}_i - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u^{n+1}_i - u^n_i) \tag{30}$$

3) leap frog method

図-4.(c) のように4つの要素を採り，重ね合せれば leap frog method を得る。

$$u^n_{i+1} = u^n_{i-1} - a\frac{\Delta x}{\Delta t}(u^{n+1}_i - u^{n-1}_i) \tag{31}$$

4) Lax－Wendroff の差分式

図-4.(d) のように3つの要素を採り，重ね合せれば，次の Lax－Wendroff 式を得る。

$$u^n_{i+1} = u^n_i - \frac{a}{2}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}(u^{n+1}_i - u^{n-1}_i) + \frac{a}{2}\cdot\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(u^{n-1}_i - 2u^n_i + u^{n+1}_i) \tag{32}$$

5) Courant－Friedrichs－Lewy の差分式

波動方程式(24)から，Hamilton 原理を適用し，有限要素法を展開すれば次のマトリックス方程式を得る。

$$(-\{c\}\{c^T\} + a^2\{b\}\{b^T\})\{u\} = 0 \tag{33}$$

図-4.(e) のような4つの要素に対して，上記のマトリックス方程式から，重ね合せを行えば，次のような式を得る。

$$\frac{u^{i-1}_n - 2u^i_n + u^{i+1}_n}{\Delta t^2} - a^2\,\frac{u^i_{n-1} - 2u^i_n + u^i_{n+1}}{\Delta x^2} = 0 \tag{34}$$

本式は，波動方程式(24)の差分化そのものであり，このような方程式に差分法が有効であることを初めて示した Courant－Friedrics-Lewy の方法と同じ結果となった。

(3) 熱伝導 拡散・圧密 方程式

次のような熱伝導方程式を考えよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (35)$$

図−3,(a)のような長方形要素に対し，線形形状関数を採用して有限要素法を展開すると，次のようなマトリックス方程式を得る。

$$\left[\frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}u^{n}_{i+1}\\ u^{n+1}_{i+1}\end{Bmatrix} + \left[\frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}u^{n}_{i}\\ u^{n+1}_{i}\end{Bmatrix} = 0 \qquad (36)$$

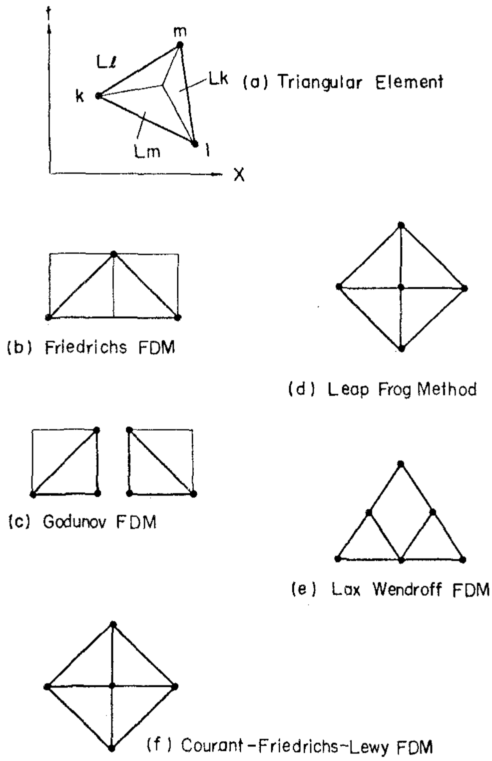


Figure-4 Elements for Wave Equation

ここで、空間方向に step − wise な近似を行ない，重ね合せれば，Crank − Nicolson 差分（図−4,(C)）と一致することが分る。前述の有限要素法の結果（Consistent FEM 図−4,(b)）との平均を採れば，現在最も安定の良い差分法として知られている Gelfand — Lokutsievski 差分となる。

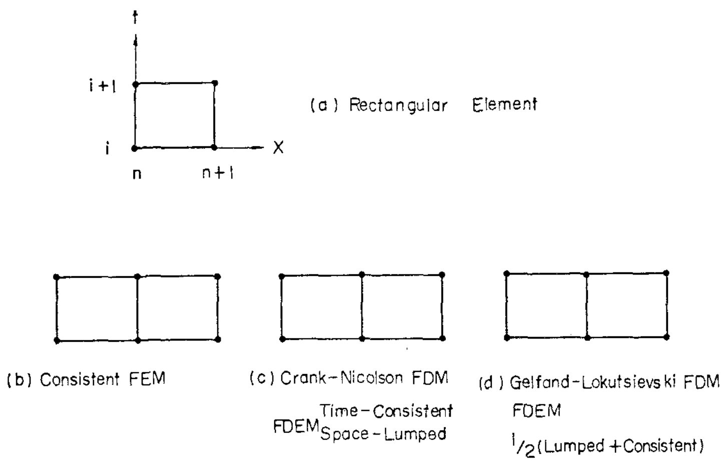


Figure — 5 Elements for Non − Stationary Heat − Transfer Equation

3　差分要素法

3-1　特徴

以上から，一見相異なる根拠に立つ有限要素法と差分法はほぼ等価な関係にあり，差分法は有限要素法の特別な場合と見ることもできる。逆に，有限要素法における rigidity, load, mass などの step - wise な近似や lumping は差分概念と深い関連を持ち，有限要素法は差分法の拡張と見なすことも可能である。

有限要素法と差分法を結合すれば，両者の特徴を活用することができる。このような考え方に基づく離散化手法を差分要素法（FDEM）と呼ぶことにする。以上の三者は重複することもあるが，一応各々の定義は次のように考えられよう。

- 有限要素法　　未知量を要素領域内において連続かつ微分可能な形状関数によって近似する。ただし，隣接要素間の適合性は保証される場合が多い。
- 差分法　　微分方程式の直接近似であるが，区分領域内で一定の関数（Heaviside 関数）による近似を見ることもできる。
- 差分要素法　　未知量を要素領域内において連続あるいは不連続な関数によって近似する。微分可能性あるいは隣接要素間の適合性は必ずしも保証されないでよい。

差分要素法の利点は次の諸点にあると考えられる。

イ）汎関数の許容関数として課せられていた内挿関数の条件（連続性など）をかなり緩めることができる。

ロ）高次の微分を含む問題では，未知変数の数が少なくて済む。

ハ）non − compatible model, hybrid model に対して収束性，誤差評価に差分法の数学的知識を活用できる。

ニ）従来の差分法では取扱いの不便な不等差分，境界条件の処理などを簡便にする。

ホ）汎関数の局所化の性質を利用して，直接剛性法によりマトリックス化が容易である。

ヘ）汎関数が正値対称である場合には，構成されるマトリックスは対称で，性質も良好なものとなる。

3-2　幾つかの例

(1)　梁の曲げ問題（図−6）

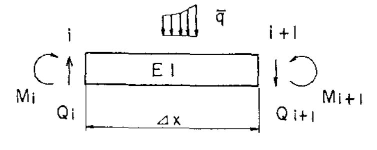


Figure −6　Beam Problem

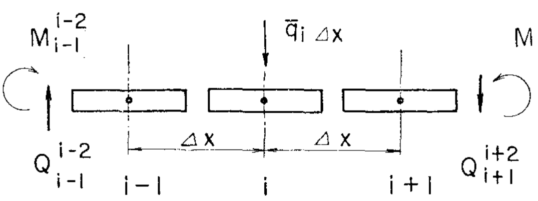


Figure − 7　Element for　FDEM

基本方程式　$EI\dfrac{d^4w}{dx^4}=\bar{q}$

差分方程式　$EI\dfrac{W_{i-2}-4W_{i-1}+6W_i-4W_{i+1}+W_{i+2}}{(\Delta X)^4}=\bar{q}$

差分ポテンシャルエネルギーの最小条件から、差分要素法における要素剛性マトリックス式は次のように得られる（図－7）

$$\frac{EI}{(\Delta X_i)^3}\begin{bmatrix}1 & & \text{sym.}\\ -2 & 4 & \\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_{i-1}\\ W_i\\ W_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{2}Q_i^{i-1}-\dfrac{1}{\Delta X_i}M_i^{i-1}\\ \bar{q}_i\Delta X_i+\dfrac{1}{2}(Q_i^{i-1}+Q_i^{i+1})+\dfrac{1}{\Delta X_i}(M_i^{i-1}+M_i^{i+1})\\ \dfrac{1}{2}Q_i^{i+1}-\dfrac{1}{\Delta X_i}M_i^{i+1}\end{Bmatrix}$$

等しい要素の重ね合せの結果は上の差分方程式を得る。また，力学的境界条件は自然条件としてマトリックス式誘導の際に考慮されていると考えてよい。

（2）初~~期~~値問題　時間に関する数値積分

例題 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+Z=0\ , & y(0)=1\\ \dfrac{dZ}{dt}-y=0\ , & Z(0)=0\end{cases}$　　厳密解 $\begin{cases}y=\cos t\\ Z=\sin t\end{cases}$

○ 差分法

explicit $\begin{Bmatrix}y_{i+1}\\ Z_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\Delta t & y_i\\ \Delta t & 1 & Z_i\end{bmatrix}$　　implicit $\begin{Bmatrix}y_{i+1}\\ Z_{i+1}\end{Bmatrix}\dfrac{1}{1+(\Delta t)^2}\begin{bmatrix}1 & -\Delta t\\ \Delta t & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\ Z_i\end{Bmatrix}$

○ 有限要素法

Galerkin $\begin{Bmatrix}y_{i+1}\\ Z_{i+1}\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{1+\frac{4}{9}(\Delta t)^2}\begin{bmatrix}1-\frac{2}{9}(\Delta t)^2 & -\Delta t\\ \Delta t & 1-\frac{2}{9}(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\ Z_i\end{Bmatrix}$

最小二乗法 $\begin{Bmatrix}y_{i+1}\\ Z_{i+1}\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}(\Delta t)^2}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{6}(\Delta t) & -\Delta t\\ \Delta t & 1-\frac{1}{6}(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\ Z_i\end{Bmatrix}$

○ 差分要素法

最小二乗法 $\begin{Bmatrix}y_{i+1}\\ Z_{i+1}\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}(\Delta t)^2}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{4}(\Delta t) & -\Delta t\\ \Delta t & 1-\frac{1}{4}(\Delta t)^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\ Z_i\end{Bmatrix}$

次の形に変換　$\frac{d^2y}{dy^2} + y = 0$, $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt}(0) = 0$

差分 (central)　$y_{i+1} = \left\{ 2 - (\Delta t)^2 \right\} y_i - y_{i-1}$

有限要素法(Hamilton　原理)　$y_{i+1} = \dfrac{2 - \frac{2}{3}(\Delta t)^2}{1 + \frac{1}{6}(\Delta t)} y_i - y_{i-1}$

次表に数値結果の比較を示す。

表－1　各方法による数値結果の比較 ($y = \cos t$)

method＼t		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.571	1.60
Exact		0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362	0.170	0.000	-0.029
FDM	explicit	1.000	0.960	0.880	0.762	0.608	0.424	0.216	0.023	-0.009
	implicit	0.962	0.888	0.783	0.652	0.501	0.336	0.165	0.018	-0.006
	central	1.000	0.960	0.882	0.768	0.623	0.453	0.266	0.071	0.068
FEM	Galerkin	0.974	0.910	0.811	0.681	0.526	0.352	0.167	0.005	-0.022
	least sq.	0.980	0.922	0.827	0.700	0.545	0.369	0.179	0.010	-0.019
	Hamilton	1.000	0.960	0.882	0.770	0.627	0.459	0.272	0.077	0.074
FDEM. least sq.		0.980	0.921	0.826	0.698	0.543	0.366	0.175	0.005	-0.023

3.3　応用可能性

以上簡単な応用例を示したが，差分要素法の特徴を考えれば種々の問題への適用が可能である。たとえば，要素境界の適合条件が不要であることは板曲げ問題などに都合がよい。また，それとともに未知変数の数が少くて済むので shell 問題などにも便利である。さらに，lumping が行なわれるので複雑な振動問題に対して有効である。

前述の初期値問題に対して示したように，最小二乗変分原理や Galerkin 法と組み合わせてこの手法を用いると，従来の有限要素法の適用範囲の他に非自己随伴方程式問題を含む一般的な場合が解析されることになる。

4 参考文献

1) 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察（第１報），日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1973－6

2) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性，土木学会第28回年次学術講演会講演集，1973-10

3) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J. : Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, Jour. of the Aeronautical Sciences, Vol. 25, No. 9, Sept., 1956

4) Clough, R. W. : The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Sept., 1960

5) Oden, J. T. : A General Theory of Finite Elements. I. Topological Considerations, Int. Jour. of Numerical Methods in Engng., Vol. 1, No. 2, 1969

6) Oden, J. T. : Some Aspects of Recent Contributions to the Mathematical Theory of Finite Elements, in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design edited by J. T. Oden, Clough, R. W. and Y. Yamamoto, UAH Press, August, 1972

7) 奥村敏恵・坂井藤一：

7-1) 有限要素法と折板構造理論の関連について，日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1969－5

7-2) 薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用，土木学会論文報告集，第176号，1970－4

8) Szabo, B. A. and Lee, G. C. : Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method, Int. Jour. of Numerical Methods in Engng., Vol. 1, No. 3, 1969

9) Gallagher, R. H. : The Status and Outlook for Finite Element Analysis, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, August, 1969

10) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971

11) 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察（第２報）　最小二乗変分原理の導入，1973