

格子状構造物の衝撃荷重による変形

名古屋大学工学部 松岡 理 ○八幡 夏穂子

§1 前置 接着点で剛に接合した直交各梁から成る格子構造物は多方面から従来より研究されて来ている非常に一般的なものである。種々のアプローチを様々な離散系に対する解析としてなされて来たが等価連続体には置換し板として取り扱う方法、差分法を用いて格子構造物の静的応答(1)面外変位、振動問題の固有値を求める方法等がある。又一方平板を近來富みに発展したマトリックス法の考案で処理する事を目的とした等価骨組系に置換しようとする試みもある。但し最近の有限要素法の成果は置換する事なく十分な値のもので後者の利益は余りなく、来ている。格子状構造物と等価連続体として考へる事は動的解析に於ては単純化された形で解析を得る場合があり、こうした問題ではその置換による有益さは判然としていて、この論文も含めて一般に構造物の一点に衝撃力が作用する問題、或は構造物の境界が強制変位を受ける問題等では波動伝播現象が観察されるが、こうした非定常解についての問題はまだ残っている。振動方程式と連続体ではなく有限個の集中質量にモデル化してモードを重ね合せで得る方法は多少文献も出て来ているが、目下検討中の段階で他の分野に比べて基礎資料が十分とは言いがたい状態である。この研究もその一助の参考になると考へる。それ等の主は単純な問題として棒の横方向の伝播を取り上げ、解析解と F.E.M を用いた比較を行なっているものである。(1)(2) それ等によれば変位法を採用している為変形については納得出来る程度に解となくが得られるが、たゞは信頼性ある所まで望めない様である。従って、こうした状況の中で、連続体としてモデルにし解析解を得る事が可能ならばともかく適用例が広まるという側面から、数値解析手法と解析解の比較が単純な問題でしか行えず、不十分であったの、直接に二つは比較を試みてはどうか、多少複雑な対象の解析解と呈示した事には、数値解析手法の正確性を check するに似たり。又得られた解析解と如何なる所に焦点を定めた信頼性と得られたか、又は数値積分に於いて、二つの解の精度を比較するのとか、こうした問題がよりよく示した。又格子構造物の端部に衝撃力が作用した時見られる波動伝播現象については、二つの種の問題は、棒、板、複合材料、非線形体、半無限体等の分野で、媒体の特性、等価、理論の検証合理性を示すという諸々の立場から広く論じられて、よものであるが、格子状の等価力というものは否多くない。しかし具体的にば列をば地盤の衝撃的に運動した時等は伝播現象を主として、この方面から建築構造物のプロトタイプモデルでも格子状構造物に対する衝撃荷重 F-変形状態の荷重と応答の事は必要である。併せてこうした現象と梁のかわりのある分岐継ぎ目についても示す。基礎式に於て、変形に因りて屈曲及び常断の達成するという前提で考へて、二つの通常の Bernoulli-Euler 梁理論では伝播の伝播頭と満足なく拡張で表現し得ず、非線形梁の場合には成立せられとある。(3) 二つとも伝播頭と満足いく形で求められた。その事が先に述べた解の吟味といかなる観点から行なうかという点に因り、別法という形で解がより得られている。マトリックス法等による非定常解の安定性、厳密性について確し、十分検討が出来るといふ状態になった時、試行錯誤の結果以下の事に帰結した。通常分岐の影響のないうち、準一変形に梁に与える変位のまま平行移動する。因らば、二つの時刻経路につれ変形状態が変化した。研究

のあつても 最高速度をもつた一境界は不変であるという事を物理的側面から連続体平衡方程式の妥当性を 数値計算上の精度の検討する指標という二つの側面をもたせた。これに基づき変換を用いる事による誤差の検討 分節法、分節法等の適切な変換を見つけていた。連続体平衡系に於いては少なくとも 回転速度をうけて示した別は ほとんど定常な事と付記しておく。

§2 運動方程式及び構成方程式

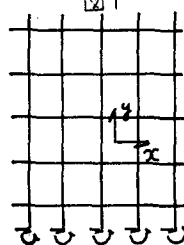
各節点面での関係と変換法による差分表示し これ等を微分系に移行する事により連続体とした。その誘導に由しては省略する。文献中に詳しい。x方向部材間隔 断面積 断面二次モーメント、ヤング係数 E_1, A_1, I_1, E_2 とし y方向のそれ等は E_2, A_2, I_2, E_2 x方向変形成分 u , y方向変形成分 v 回転 θ とすると

$$E_1 A_1 \partial^2 u / \partial x^2 + (12 E_2 I_2 / l^2) (\partial^2 u / \partial y^2 - \partial^2 \theta / \partial y) l_2 = (p_l, l_2) \ddot{u} \quad (1-1)$$

$$E_2 A_2 \partial^2 v / \partial y^2 - (12 E_1 I_1 / l^2) (\partial^2 v / \partial x^2 - \partial \theta / \partial x) l_1 = (p_l, l_2) \ddot{v} \quad (1-2)$$

運動方程式

図1



$$E_1 I_1 \partial^2 \theta / \partial x^2 + E_2 I_2 \partial^2 \theta / \partial y^2 - (12 E_1 I_1 / l^2) (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial) + (12 E_2 I_2 / l^2) (\partial^2 v / \partial y^2 - \partial) = (p_l, l_2) \ddot{\theta} \quad (1-3)$$

$$\text{構成式 } N_x = E_1 A_1 \partial u / \partial x \quad H_x = (12 E_1 I_1 / l^2) (\theta + \partial v / \partial x) \quad M_x = E_1 I_1 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (2-1)$$

$$N_y = E_2 A_2 \partial v / \partial y \quad H_y = (12 E_2 I_2 / l^2) (-\theta + \partial u / \partial y) \quad M_y = E_2 I_2 \partial^2 v / \partial y^2 \quad (2-2)$$

(p_l, l_2) 単位格子の質量 (p_l, l_2) 単位格子の回転慣性 各方向材の単位長さあたりの質量を p_l とすると (p_l, l_2) = $p_l + p_l l_2$ 各節点が等しく回転するという条件下で ($p_l^2 p_l, l_2$) = ($p_l^2 + p_l l_2$) (7/480) という値をもつ。

§3 解法と解

図(1)に示してある通り $y=0$ の境界では y 方向部材中央点となる。境界で全ての部材に $[I] P \delta(t)$ の鉛直衝撃力が作用する時 $[I] -Q \delta(t)$ の水平力 $-M \delta(t)$ の曲げモーメントの各々衝撃力が作用する時 $[I]$ (1)式の各式から u 変形 θ 変形から v を消去し $C^2 \partial^2 v / \partial y^2 = P \delta$ (3-1)

$C = E_2 A_2 l_2 / (p_l, l_2)$ C は衝撃の伝播速度 初期条件 $v(y, 0) = \dot{v}(y, 0) = 0$ 境界条件は $E_2 A_2 \partial v(0, t) / \partial y = P \delta(t)$

$t > y$ の時 $v = P \sqrt{C} / \sqrt{E_2 A_2 (p_l, l_2)}$ $t < y$ $v = 0$ (3-2)

Ⅳ 水平曲げ衝撃時 $C^2 (\partial^2 u / \partial y^2 - \partial^2 \theta / \partial y) = \ddot{u}$ (3-3) $C^2 \partial^2 \theta / \partial y^2 = (12 l_2 / (1 + \alpha)) \theta H(12 / l_2) \partial u / \partial y = \ddot{\theta}$ (3-4)

$= \ddot{u} \cdot \alpha = (l_2 / E_2 I_2) / (l_1 / E_1 I_1) \beta = l_2^2 / l_1^2$ $C_1 = 12 E_2 I_2 / (p_l, l_2) l_2$ C_1 と $C_1 \beta$ は C と断片曲げモーメントの伝播速度である。 $\beta > 1$ の時 曲げモーメントの速度は断片のそれより大。 (3-3) (3-4) を計算の便の爲無次元化する

$\partial^2 u / \partial y^2 - \partial^2 \theta / \partial y = \partial^2 u / \partial t^2$ (3-5) $\beta^2 \partial^2 \theta / \partial y^2 = 12 (1 + \alpha) \theta + 12 \partial u / \partial y = \partial^2 \theta / \partial t^2$ (3-6) $u = l_2 D$ $t = l_2 t / C$, $y = l_2 y$

初期条件は変位加速度共に零の場合と変位は同じで加速度が存在する場合の二種類設けた。 $D(y, 0) = \partial D(y, 0) / \partial t = 0$ $\theta(y, 0) = \partial \theta(y, 0) / \partial t = 0$ (3-7) $\partial D(y, 0) = 0$ $\partial \theta(y, 0) / \partial t = \epsilon_a$ $\theta(y, 0) = \partial \theta(y, 0) / \partial t = \epsilon_b$ (3-8) 境界条件

$(12 E_1 I_1 / l^2) (\partial^2 u / \partial y - \theta) y=0 = -Q \delta(t)$ $(E_2 I_2 / l_2) (\partial^2 \theta / \partial y) y=0 = -M \delta(t)$ (3-9) D, θ について t, y の変換を行うと

$\int_0^\infty e^{-st} D(y, t) dt = \Delta(y, s)$ $\int_0^\infty e^{-st} \theta(y, t) dt = \Theta(y, s)$ (3-5) (3-6) は従がって

$$\partial^2 \Delta / \partial y^2 - S^2 \Delta - \partial \Theta / \partial y = 0 \quad (3-10) \quad \beta^2 \partial^2 \Theta / \partial y^2 - 12 \beta^2 (1 + \alpha) \Theta - S^2 \Theta + 12 \beta^2 \partial \Delta / \partial y = 0 \quad (3-11)$$

初期条件 (3-7) を演算すると $\{\beta^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} - 12 \beta^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - S^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + 12 \beta^2 (1 + \alpha) S^2 \Delta + S^4\} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \end{Bmatrix} = 0$ (3-12)

$$\lambda_1 = \sqrt{2} \beta^{-1} \{ \{ 12 \beta^2 \alpha + (1 + \beta^2) S^2 \} \pm \{ \{ 12 \beta^2 \alpha + (1 + \beta^2) S^2 \}^2 - 4 \beta^2 S^4 \}^{1/2} \} \}^{1/2} \quad (3-13)$$

後のため $\beta > 1$ ($\lambda_1 \rightarrow S$ $\lambda_2 \rightarrow S \beta^{-1}$) $\beta < 1$ ($\lambda_1 \rightarrow S \beta^{-1}$ $\lambda_2 \rightarrow S$) 初期条件 (3-8) に対する (3-13) 式は

$$\{ \beta^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} - 12 \beta^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - S^2 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial y^2} + 12 \beta^2 (1 + \alpha) S^2 \Delta + S^4 \} \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \end{Bmatrix} - \frac{1}{S^2} \epsilon_a \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Theta \end{Bmatrix} = 0 \quad \epsilon_a \rightarrow \epsilon_b \text{ とき } \Delta \text{ と } \Theta \text{ の成分が入れ替わる}$$

$$\Delta = A_1 e^{-\lambda_1 y} + A_2 e^{-\lambda_2 y} \quad \Theta = B_1 e^{-\lambda_1 y} + B_2 e^{-\lambda_2 y} \quad \pm \text{境界条件を考慮して } B_1, B_2 \text{ を求めると}$$

$$B_1 = (l_2 \cdot \Theta / 12 E_2 I_2) \lambda_2 (S^2 \lambda_1^2) (S^2 - \lambda_2^2) \{ S^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2) \}^{-1} (l_2 M / E_2 I_2) (S^2 - \lambda_1^2) (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2) \}$$

又 (3-8) に代するものは $B_1' = B_1 - \varepsilon_0 \lambda_2 (S^2 - \lambda_1^2) (S^2 - \lambda_2^2) \{ (12\beta^2 \gamma + \alpha) (S^2 - S^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - S^2))^{-1} \}$ A, B の関係は共に

結局求める θ は以下の様になる.

$$\theta = \frac{1}{2\pi i} \frac{Q_0 Q}{E_0 E_2} \left[\left(\frac{\lambda_2 (S^2 - \lambda_1^2)(S^2 - \lambda_2^2)}{S^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2)} e^{-\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t} \right) dS - \left(\frac{\lambda_1 (S^2 - \lambda_1^2)(S^2 - \lambda_2^2)}{S^2 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2)} e^{-\lambda_2 \gamma + \lambda_1 t} \right) dS \right] + \frac{1}{2\pi i} \frac{Q_0 M}{E_0 E_2} \left[\left(\frac{(S^2 - \lambda_1^2) e^{-\lambda_1 \gamma + \lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2)} \right) dS + \left(\frac{(S^2 - \lambda_2^2) e^{-\lambda_2 \gamma + \lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2)} \right) dS \right] \quad (3-18)$$

(3-8)では重複による成分が奇効解及び特解に現われる

$$\Theta' = \Theta + \frac{1}{2\pi\lambda} \left[\int_{S^1(\lambda_1, \lambda_2)} \frac{(-\varepsilon v (S^2 - \lambda_1^2)(S^2 - \lambda_2^2) \lambda_2 e^{-\lambda_1^2 + \lambda_2^2})}{S^4(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2) (|\rho d_1 + i t d_2| + S^2)} dS + \int_{S^1(\lambda_1, \lambda_2)} \frac{\varepsilon v (S^2 - \lambda_1^2)(S^2 - \lambda_2^2) \lambda_1 e^{-\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{S^4(\lambda_1, \lambda_2) (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 - S^2) (|\rho d_1 + i t d_2| + S^2)} dS + \frac{1}{2\pi\lambda} \int \frac{\varepsilon v}{(2(1+t)s + S^2)} e^{st} ds \right] \quad (3-19)$$

(3-17)~(3-20)について 19, 20 の特異部は逆変換として簡単に得られているものであるがその他の各部分は全て2重積分を用いなければならぬ。その準備として singular point を抽出する。

[illegible]

(3-22) ~ (3-26) 17个22有子. 但L (3-22)(3-23) 17分 θ^* ($\lambda_1 - \lambda_2$) = 0 且 λ_2 22 "54 极2" 有子

$\frac{1}{2} \alpha (10\alpha + 12) + S = 0 \quad 2S^2 + 10\alpha^2 + \beta S (\frac{1}{2} 10\alpha^2 + 12\alpha) + S^{\frac{1}{2}} \cdot I$ 全 S 面 $\perp$ z (垂直) $I \perp z$ $\therefore (3-19)(3-20)$ 式 Φ の α と β は $S = \sqrt{10\alpha^2 + 12\alpha} \cdot \beta$ 17 式 z に β 代入してあるから β は z と z^2 である。 $\therefore$ β は最も低次の z 項でもあり、 $\therefore$ β は z の定数項

エプロットし、各点にカットした周辺積分の経路を図2に示した。(3-19)(3-20)式は(3-17)(3-18)式と同
 い積分区間を使用すればよい。その他前述した通り2つの変形が連続しているため積分に対する変数
 を揃えておく必要がある。 $S \rightarrow \infty$ のとき $e^{-\lambda_2 t + \beta t} \rightarrow e^{S(t - \beta^{-1})}$, $e^{\lambda_1 t + \beta t} \rightarrow e^{S(\lambda_1 - \beta)}$ $\beta < 1$ のとき $e^{\lambda_2 t + \beta t}$
 $\rightarrow e^{S(t - \beta)}$, $e^{-\lambda_1 t + \beta t} \rightarrow e^{S(\lambda_1 - \beta^{-1})}$ (注: $\lambda_2 \geq e^{-\lambda_2 \beta + \beta}$ は β がどの程度に拘わらずカー波頭に対処し、 $e^{\lambda_1 t}$

は第一波頭となる。この事と(3-3)(3-4)式と関連させれば、 $\beta > 1$, $\beta < 1$ の時各々第折波、回折波が第一波頭、第二波頭のいづれが示している。波頭到着以前は当然であるが変形には全く等しくない。図2に示すように、 $\beta > 1$ の場合、 $\beta < 1$ の場合、 $\beta = 1$ の場合、それぞれ異なる変形を示す。

に示す周辺条件の各に内毎に①, ②, ③と計算結果を表1に示すがこれを見ると $e_{\text{max}}^{\text{max}}$ 項, $e_{\text{max}}^{\text{max}}$ 項の乗数部は第2波頭到着以後は同じ函数でかつ乗符号のため完全に打ち消し合い乗数部に残っていない。

3. 変数の u による変形は決定された。簡便に T の $u = a_1 Q_1(A_1 ds - A_2 ds) + b_1 M(-B_1 ds + B_2 ds) + a_2 Q_2(A_3 ds - A_4 ds) + b_2 M(-B_3 ds + B_4 ds)$ $U' = U + a_3(-A_1 ds + A_4 ds)$ $\theta' = \theta + b_3(-B_1 ds + B_2 ds)$ と $\frac{d\theta}{ds} = 0$ と $\frac{dU}{ds} = 0$ なる U, θ を求めよう。

$$M_1 = a_4 \omega (-\lambda_1 A_1 ds - \int -\lambda_2 A_2 ds) + b_4 M (-\lambda_1 B_1 ds + \int -\lambda_2 B_2 ds) \quad M_2 = a_5 \omega (-\lambda_1 A_1 ds - \int -\lambda_2 A_2 ds) + b_5 M (-\lambda_1 B_1 ds + \int -\lambda_2 B_2 ds) \\ - a_6 \omega (-\lambda_1 A_3 ds - \int -\lambda_2 A_4 ds) + b_6 M (-\lambda_1 B_1 ds + \int -\lambda_2 B_4 ds) \quad \text{と } T_3 \quad \text{Singular point は } 0, 0 \text{ である。 } T \text{ 及び } D \text{ 同様に } T \text{ と } T$$

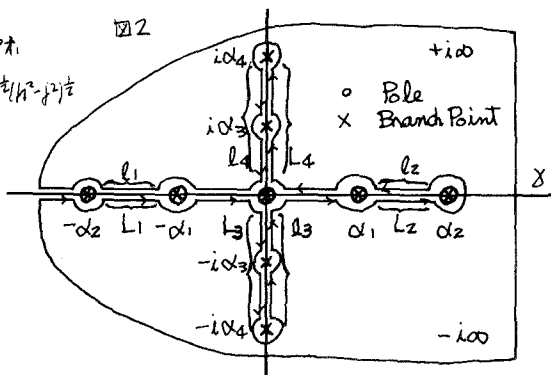
よその所の意味が違ふの7以下7は全2(3-7)の初期条件(対する境界とすると(3-8)式の解は(19)

(3-20)を示す事に止める。但し同じ演算で成り立つ見通しである。

	$L_1 + l_1 + L_2 + l_2$	$L_3 + l_3 + L_4 + l_4$
A ₁	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_2 \cosh A \cos B - \Phi_1 \sinh A \sin B) / R_0 dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \Phi_{11} (P^2 \delta_1^2 / \beta_2 \cos(\delta_1 \eta - Pt_1) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
A ₂	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_2 \cosh A \cos B - \Phi_1 \sinh A \sin B) / R_0 dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \Phi_{11} (P^2 \delta_1^2 / \beta_2 \cosh \delta_1 \eta \cos Pt_1 + \beta_1 \sinh \delta_1 \eta \sin Pt_1) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
B ₁	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_1 \cosh A \sin B - \Phi_2 \sinh A \cos B) / R_1 dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \delta_1 \beta_1 \sin(\delta_1 \eta - Pt_1) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
B ₂	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_1 \cosh A \sin B - \Phi_2 \sinh A \cos B) / R_1 dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} \delta_1 (\beta_1 \cos Pt_1 \cosh \delta_1 \eta + \beta_2 \sin Pt_1 \sinh \delta_1 \eta) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
A ₃	$-4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_3 \cosh A \sin B + \Phi_4 \sinh A \cos B) / 4R_2 dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} \beta_2 \delta_2 \Phi_{22} \sin(\delta_2 \eta - Pt_1) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
A ₄	$-4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_3 \cosh A \sin B + \Phi_4 \sinh A \cos B) / 4R_2 dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} \delta_1 \Phi_{22} (\beta_1 \sin Pt_1 \cosh \delta_1 \eta - \beta_2 \cos Pt_1 \sinh \delta_1 \eta) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
B ₃	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_3 \sinh A \sin B + \Phi_4 \cosh A \cos B) / R_3 dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} \beta_1 \Phi_{33} \cos(\delta_1 \eta - Pt_1) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
B ₄	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_3 \sinh A \sin B + \Phi_4 \cosh A \cos B) / R_3 dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} P \Phi_{33} (\beta_1 \cos Pt_1 \cosh \delta_1 \eta - \beta_2 \sin Pt_1 \sinh \delta_1 \eta) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_1 A_3$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_5 \sinh A \sin B + \Phi_6 \cosh A \cos B) / 8\beta^2 R_2 dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \beta_2 \delta_2 \Phi_{22} \cos(\delta_1 \eta - Pt_1) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_2 A_4$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_5 \sinh A \sin B + \Phi_6 \cosh A \cos B) / 8\beta^2 R_2 dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \delta_2 \Phi_{22} (\beta_1 \sin Pt_1 \sinh \delta_1 \eta + \beta_2 \cos Pt_1 \cosh \delta_1 \eta) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_1 B_3$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_5 \cosh A \sin B + \Phi_6 \sinh A \cos B) / 2R_1 dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \delta_1 \cos(\delta_1 \eta - Pt_1) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_2 B_4$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_5 \cosh A \sin B + \Phi_6 \sinh A \cos B) / 2R_1 dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} \delta_2 \Phi_{44} (\beta_1 \sinh \delta_1 \eta \cos Pt_1 - \beta_2 \cosh \delta_1 \eta \sin Pt_1) dP$
$\lambda_1 A_1$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_7 \cosh A \sin B - \Phi_8 \sinh A \cos B) / 2\beta R dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \delta_1 \beta_1 \sin(\delta_1 \eta - Pt_1) (P^2 \delta_1^2) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_2 A_2$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} (\Phi_7 \cosh A \sin B - \Phi_8 \sinh A \cos B) / 2\beta R dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \delta_2 \Phi_{11} (P^2 \delta_1^2 / \beta_1 \sin Pt_1 \cosh \delta_1 \eta + \beta_2 \cos Pt_1 \sinh \delta_1 \eta) / P^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_1 B_1$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} \Phi_7 \sinh A \sin B + \Phi_8 \cosh A \cos B) / 2\beta R dP$	$4i \int_0^{\alpha_4} \delta_1 \beta_2 \cos(\delta_1 \eta - Pt_1) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$
$\lambda_2 B_2$	$4i \int_{\alpha_1}^{\beta_2} \Phi_7 \sinh A \sin B + \Phi_8 \cosh A \cos B) / 2\beta R dP$	$-4i \int_0^{\alpha_4} \delta_2 (\beta_1 \cosh \delta_1 \eta \cos Pt_1 - \beta_2 \sinh \delta_1 \eta \sin Pt_1) / (\beta_1^2 + \beta_2^2) dP$

表 1

$$\begin{aligned}
 h &= 2\beta P (P^2 + \alpha^2)^{1/2} & j &= (1 + \beta^2)^{1/2} (P^2 + \alpha^2)^{1/2} & A &= (h + j)^{1/2} / \alpha - Pt_1 \\
 B &= \eta (h - j)^{1/2} / \alpha & R_0 &= P (h - j)^{1/2} (2j + h) - 2\beta^2 P^2 & \Phi_1 &= (P^2 \alpha^4)^{1/2} (h^2 - j^2)^{1/2} \\
 \Phi_2 &= (P^2 + \alpha^2)^{1/2} & \Phi_1 &= \beta^2 (h - j)^{1/2} & \Phi_2 &= \beta^2 (h + j)^{1/2} \\
 R_1 &= (h - j)^{1/2} \{ (2j + h) - 2\beta^2 P^2 \} & \Phi_3 &= (h - j)^{1/2} \{ (2\beta^2 P^2 - j) + (h^2 - j^2) \} \\
 \Phi_4 &= (h + j)^{1/2} \{ (2\beta^2 P^2 - j) + (h^2 - j^2) \} & R_2 &= P^2 (h - j)^{1/2} (2j + h - 2\beta^2 P^2) \\
 \Phi_5 &= (h - j)^{1/2} & \Phi_4 &= 2\beta^2 P^2 - j & R_3 &= (h - j)^{1/2} (2j + h - 2\beta^2 P^2) \\
 \delta_1 &= \{ (1 - \beta^2) (P^2 + \alpha^2)^{1/2} (P^2 + \alpha^2)^{1/2} + (1 + \beta^2) (P^2 + \alpha^2)^{1/2} \}^{1/2} / \sqrt{2} \beta \\
 \delta_2 &= \{ (1 - \beta^2) (P^2 + \alpha^2)^{1/2} (P^2 + \alpha^2)^{1/2} - (1 + \beta^2) (P^2 + \alpha^2)^{1/2} \}^{1/2} / \sqrt{2} \beta
 \end{aligned}$$



具体的に以上の函数を数値積分する大前提に図2に示した各点の singular point が有限確定値を持つ
 かどうかを検討しておかねばならない。この事に関し、④に限って論じれば虚軸上の分枝点は多価の
 問題であり積分値存在の議論はあり得ない。実軸上の α_1, α_2 は極でもあった t の原点と共に調和共結
 果 原点 $s(10)/s(10)$, α_1, α_2 constant $/s(10)$ で幸いて確定値の存在を確かめられた。但し数値積分
 の際その取り扱いか大変な困難である事 $\S 6$ にある。

$\S 4$ 速度と変位の関係 (分散曲線) 結果の考察で述べた様に波動伝播現象の中で 分散関係が
 ある時は与条件での原型がくずれていくが これは曲げ変形を生じる問題に於て特に顕著である。衝

撃荷重として二の課題で与えたデルタ函数は全ての波形に対し同じ値のスペクトル分布であり、理論的にはそうした特性で無限の波を含んでいるから分散の効果はより一層強くなると考えらる。今この分散関係を示す曲線を得るには u, θ の運動方程式に $u = A \exp[ik(y-ct)]$ $\theta = D \exp[ik(y-ct)]$ と代入すると次の行列式が生ずる。ここで k は wave number

$$H_1 = 12 E_2 I_2 / (p l_2 l_2) \quad H_2 = H_1 \beta \quad (4-1) \text{ を用いると}$$

$$C^2 = H_1^2 \quad -\frac{1}{k} H_1^2$$

$$\frac{i}{k} \frac{12}{l_2} H_2^2 \quad C^2 = H_2^2 \left(1 + \frac{12 \alpha}{k l_2} \right) = 0 \quad (4-1)$$

$$C^2 = \frac{1}{2} \left[H_1^2 + H_2^2 \left(1 + \frac{12}{k l_2} (H_1 \alpha) \right) \right] \pm \frac{1}{2} \left[(H_1^2 + H_2^2) - \frac{12}{k l_2} (H_1 \alpha) \right]^2 - \frac{48 H_2^2}{k^2 l_2^2} \left(1 + \frac{12 \alpha}{k l_2} \right)^2 \quad (4-2)$$

ケース [I] の鉛直時だけの時は (4-2) 式の任意の k について C が決定する。こうした関係式が生じず分散がない事になる。 u, θ, θ の全ての変形を含んだ (1-1) ~ (1-3) 式に対する分散曲線は $u = A \exp[ik(m_1 x + m_2 y - ct)]$ $v = B \exp[ik(m_1 x + m_2 y - ct)]$ $\theta = D \exp[ik(m_1 x + m_2 y - ct)]$ $m_1 = \cos \alpha$ $m_2 = \sin \alpha$ $E(1-1) \sim (1-3)$ に代入すると C の大連式が得られ、(4-1) と同じ形式の 3×3 の行列式になる。これは k と C が陽函数で導かれるが Rayleigh 波と横波の構造から決定し分散曲線を示そうとしても陰函数となり (4-2) 式より容易ではない。

3.5 数値計算と結果の考察

(i) 数値計算 各構造部材の寸法 y 方向部材断面 $0.55 \times 0.55 \text{ m}$ z 方向部材断面 $0.5 \times 0.6 \text{ m}$ y 方向部材間隔 6 m z 方向部材間隔 5 m 密度 $2.4 \times 10^4 \text{ ton/m}^3$ マンゲ係数 $2.1 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$ 数値積分する際図 2 の各点の値は $\alpha_1 = 1.4620$ $\alpha_2 = 0.3085$ $\alpha_3 = 3.1742$ $\alpha_4 = 10.4772$ $\beta = 2.1475$ (β は第一波頭速度 / 第二波頭速度) $e^{-\alpha_1 + i \alpha_1 x}$ 第一波頭 (回散波) $e^{-\alpha_2 + i \alpha_2 x}$ 第二波頭 (散断波) 図 2 の周辺積分に於て $L_1 \sim L_4$ の他の記号が示してない積分区間については往路 復路で一対に与えてある。又 $0 \sim \alpha_1$ 間と $\alpha_3 \sim \alpha_4$ 間は別に演算した所 同じ函数になるため $0 \sim \alpha_4$ の一区間とする。

(ii) 結果の考察 図 3 ~ 6 について 全体を通して第一波頭真は図 6 が大きき持つという点で異なりがしかし $T = 0.1 \sim 1.5$ 間で常に各図共皆変化しない。第一波頭真以外は時間の経過につれて急激に変化はゆっくりと変形が大ききか変、ていく。これは分散による影響と見なせる。だが最大速度をもつ第一波頭はそのより小さい速度である波に干渉される事から妥当であろう。これが大きな特徴となっている。そして解の精度を検討する時物理的側面についての意味付けである。但し二の点に關して指摘している例は全り見付けられないが、ある特定の波のみを外荷重として与えたとすれば、全時刻を通じて速度不変であるから初期時刻に示す変形が時間経過に対し、前進波 後退波という事を除外して考えると T は平行移動としていく事と思えば、大局的にはそうした現象と一致していると云えよう。各図共初期時刻では変形が凝縮されて一つの塊りのようである。初期のそうした状態以降最大変位を示す波頭真付近ではかなりの変位を生ずるが、それより離れるに従い時刻に及ぶる変化も変形の大ききも共に小さくなっていく。荷重時の初期にはデルタ函数が持っている無限大の波が分散関係に示す図 9 の各波特定の速度で飛び出し、こまやかな変化が $T = 0.5$ 位までもたらされた。特に図 5 $T = 0.3$ については明らかに見られる。以上は図 6 の全てに共通。次に各図個別の特徴を説明する。図 3 図 6 が荷重に対し敏感に弾性的変形状態で応答してはいるに比較して、図 4、図 5 はより勾配の鋭い所が見られる変形の生ずる印象が中々であった。これは図 3、図 6 が荷重と直接の関係の変形であるのに対して、図 4、図 5 は寧ろ二次的関係つまり遅延効果としてもたらされたという事実に帰因している。従

った 図3、図6の最大変位はカ一波頭
 とカニ波頭という点に異なりが各荷重
 に対応する。つまり剪断荷重には剪断
 速度をもつカニ波頭が 回転荷重には
 回転速度をもつカ一波頭が各々最大変
 位を示し至極当然の結果である。図3
 はカ一波頭の影響のため カニ波頭の
 値は多少変化した定ではない。図3で
 見た限りその値は増加していく傾向で
 あるが $T=1.5$ の場合の値を示すと ㉑-2246
 ㉒3-2519 ㉓-2558 ㉔-2606 ㉕-2557
 となり減少していく。図4は回転荷重
 作用Fに於けるx方向の伸びであるが
 初期時刻での変形がカ一波頭 カニ波
 頭近傍で変に大きな傾向をFする。従っ
 て全(本)同じ位置による差は少ない。
 しかし時刻経過後には2カにカ一
 波頭(近)の変形に対する伸びは薄くな
 りカニ波の方の顕著になる。同じ事を
 図5に対して指摘でき 結局図6を
 除いては大きな変形と同一のは剪断速
 度を持つ成分である。この事は従来の
 Mooshenko beam に於て定性的、定
 量的に論じられている事と矛盾はない。
 ここでは全(本)の構造物に与える変位は
 より回転波の速度の剪断波のそれより
 大きな値をもち、こうして観測と関連
 して明らかにしている点は新しい。
 これは格子状構造物という媒体を対象
 としているため出て来た点でもある。
 又図では判然とし難い剪断荷重によ
 りもたらされる図3、図5はカニ波頭に
 値の大きさは大きくなりながら、軽差が
 存在する。これも矢張り剪断の回転に
 対する影響性である。図4、図6では端
 かにカ一波 カニ波が接合されている。

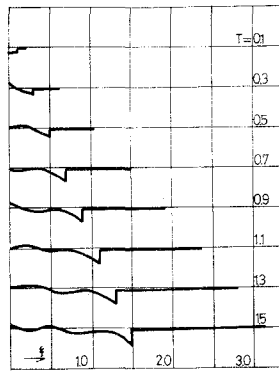


図3 剪断荷重時U変形

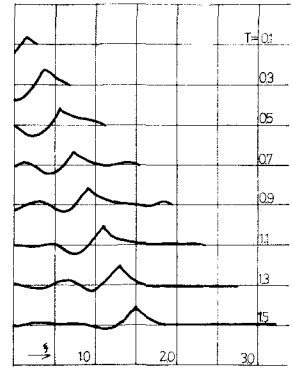


図4 回転荷重時U変形

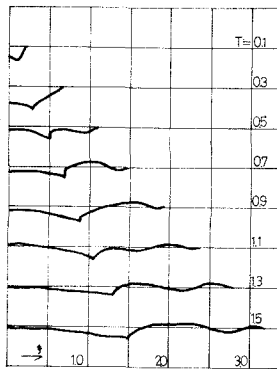


図5 剪断荷重時U変形

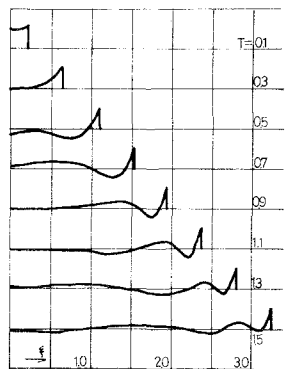


図6 回転荷重時U変形

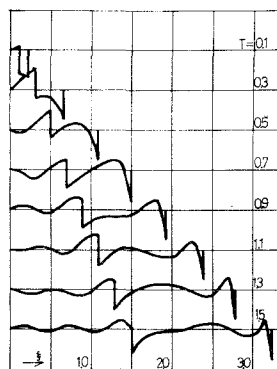


図7 回転荷重時剪断応力

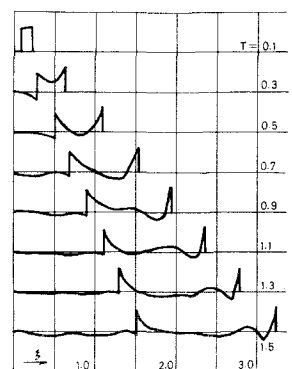
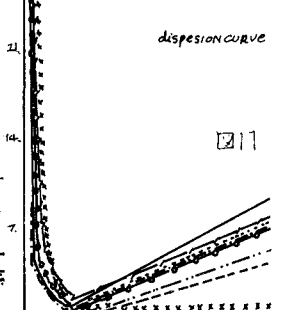
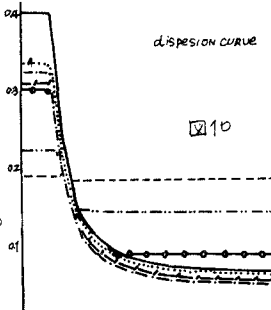
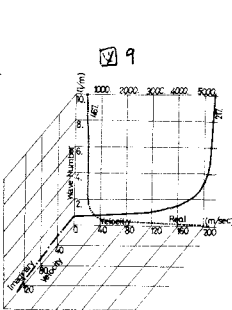


図8 剪断荷重時曲げ応力

果實である。以上を通じて折断 回転変形の波動伝播現象に於る特性 挙動を明らかにして来たが、これ等二つの異なる錯性質のたの種々の様相がもたらされるのである。この点に關し分散曲線の方面から眺めてみると図9の各曲線が



U.B dispersion curve 各々の波の速度に収束している。図9の破線部に含まれるこの問題の最大速度以上の速度については物理的に考えて無視すればよい。破線部に在在するものは文献より減衰していくものであり反射波等を考慮しない時は現実的效果は余りもたない。これら図9の曲線は(3)(3-4)より得られた。一方分散曲線については前述した通り式(1)群からも容易に示せるのでその一部を図10,11に表わした。ここでは入射角をパラメータとして調べたものだが図10は $\theta=0$ に対応している。従ってこの図とほぼ等しいもう一つがあるが省略した。それに対し図11は $\theta=90^\circ$ に關するものであるが図10との差は明確である。つまり図10が入射角の角度につれその影響がかなり見られるのに対し図11のそれは非常に鋭い。これは回転波とその他の波の物理的性質からくるものであろう。この分野に關する問題はまた分明でないものがありこれ以上は言及出来ない。付け加えると分散曲線の複素空間での意味等は最近取り上げられて来たものだ。次に図7,図8の応力図について述べる。図7が回転荷重時 剪断応力、図8が剪断荷重時曲げ応力で共に連成作用によるものである。第一波頭、第二波頭の立ち上りがみられ、第一波頭応力は時刻経過にこれも不変である。その他の位置では変形状態の変化も兩端であったためそれとの一致がある。取立て言えば図7の剪断応力、第二波頭後の応力状態は図8に比べやや大きな動きを示している。以上図3~図6、図7~図8は各々素解の形であり實際はこれ等の組み合わせとして現象的には觀察される。本来応力の剪断荷重時 剪断応力及び回転荷重時 曲げ応力も当然論ずべきものであるが図3、図6の各波頭の鋭い勾配でよい値が得難く省いた。

3.6 数値計算による解の精度の検討

表1に示す各函数の逆変換を求めた時、今までの所公式による方法では、こうした形についてはまだ求められていない。従って数値積分を行う事になるのだが以下の三つの事が問題になる。① 如何なる方法を用いるか 一般的には代表的な等間隔点と不等間隔点の二種で各々 Simpson と Gauss が有名である。その決定の point になるのは所要時間と精度の二点だが普通特に前者が大切である。この問題では函数の数が多い事と各時刻をステップに一回面を三平面の図2の区間で積分するので演算時間のウェイトは大きい。② 前述した様に区間 $L_1+L_2+L_3+L_4$ の函数に対し z singular point α_1, α_2 の点で見かけに強い発散の性質がみられる。積分の圧力はすでに確認された記号の実際の値を得るに當りこの処理をどうすべきかが難かしい。③ 最も重要な事は数学的問題としての①②のたとえ解決しても出てきた解といかなる物理真側面から合理的であると断定できるのか。つまり別表現をすれば運動方程式(1)群が正しいかどうかという事でもある。④に關しては両方法も使用して比較すると演算時間が 始めからがらすの命令数と特定に指定すると圧倒的に速い事がわかり容易

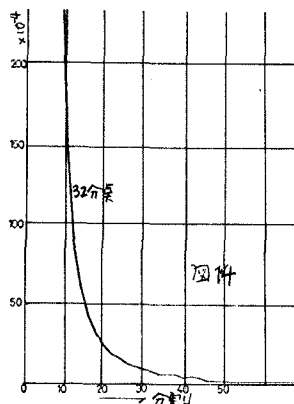
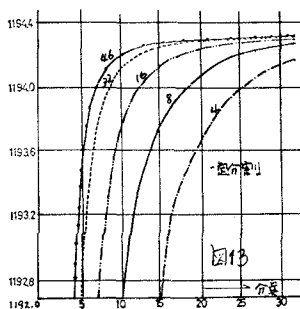
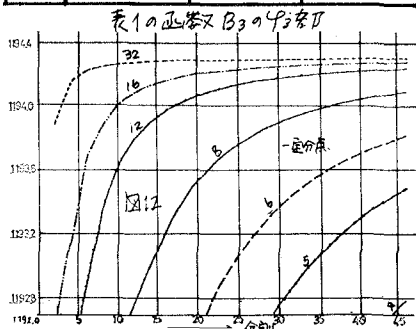
である。勿論精度の精度を得るという条件下である。しかしガウス法は不等間隔点であるから積分区間をいくつかに分けて行うのとは、分位数を増やすとは意味が違い結局適当な分位数と分割数の組合せにより精度のよい解が得られる。図12は一定の分位数に対し分割数を増した時、図13は一定の分割数で分位数を増したものである。分位数の値 P_1 で分割数の値 P_2 の時 $P_1 \times P_2 = \text{const}$ の条件下では $P_1 > P_2$ とした方が高精度である事が図12, 13の意味である。これは次の使用目的もあり $T=1$ 時に於ける函数 B_3 の分子、分母から発散因子を消去した33節である。②について α_1, α_2 のごく近傍で $\int_{\alpha_1-\epsilon}^{\alpha_1+\epsilon} \frac{\text{const}}{\text{fnd}} ds = [\text{fnd} \cdot \text{const}]_{\alpha_1-\epsilon}^{\alpha_1+\epsilon}$ の式が成立する ϵ の ϵ をどう決定するかという事に結局は $\epsilon \rightarrow 0$ の出来る限り行い ϵ の値の全積分値に対する寄与を微にすること。この際近似値の代用の他 $\alpha_1 \sim \alpha_2$ の間の微分範囲で ϵ ばかり面積計算を check として行う。①②についてはこの方針に従えばいいのだがどの位の精度に抑えるかという事にならば③との関連でより明確になる。得られた解の妥当性を、こうして右題に対する別解がないか、どうするかについて試行錯誤を重ねた結果前述の所にある様に一波頭点の全変形成分共時制経過に不動である事が Point と判明した。しかし表2でわかるが一波頭変形を示す各函数(表1の $L_1+L_2+L_3+L_4$ 例)は時刻のステップを増すにつれ増加函数でかつ発散の性質を見かけ上 ϵ が有しているものであるから表2の波頭変形位置の変形値と完全に不変とは難く、しかし ϵ が十分小さい程度である。つまり図12の積分誤差が ϵ 型になる事を際が際する事は取れも取れない波頭点の const となる値でもあり数値的側面と物理的側面の二点が一貫している。図13は図12の32分点の時、値の変化の差をプロットしたものであり同じ性質である。付け加えると表1の $L_1+L_2+L_3+L_4$ の函数は数値積分の誤差が全問題にならず分位数、分割数のいづれに対しても常にほぼ一定値をとる。表2の値は上述 $\epsilon = 10^{-19}$ の時のものである。まとめるとこの右題では解の検算と一波頭点の変形不変であるという物理的裏付けにより解の合理性、数値計算に伴う誤差の check を行い良好な解を得た。

函数 B_2 一波頭点 表2

T	$L_1+L_2+L_3+L_4$	$L_1+L_2+L_3+L_4$	$L_1+L_2+L_3+L_4$	$(L_1+L_2+L_3+L_4)$
0.1	3.4109	-0.3885	-3.0224	0.0000
0.3	13.1955	-2.4484	-10.7512	0.0000
0.5	29.2366	-9.3557	-19.8809	0.0000
0.7	36.9641	-11.1261	-25.8379	0.0001
0.9	45.9558	-93.4393	47.4833	0.0002
1.1	-473.7067	-15.2648	488.9720	0.0005
1.3	-1730.4899	307.6213	1422.8705	0.0019
1.5	-3910.8341	1519.9216	2390.9192	0.0068

函数 B_3

T	$L_1+L_2+L_3+L_4$	$L_1+L_2+L_3+L_4$	$L_1+L_2+L_3+L_4$	$(L_1+L_2+L_3+L_4)$
0.1	2.5581	0.5502	0.1651	3.3733
0.3	-0.3641	1.7553	1.9821	3.3733
0.5	-10.3063	5.1778	8.5018	3.3733
0.7	-34.0067	11.8469	25.5329	3.3731
0.9	-68.8157	17.3656	54.8226	3.3726
1.1	-47.0651	-6.4309	56.8669	3.3709
1.3	320.5384	-151.6069	-165.5229	3.3586
1.5	1803.7247	-606.1203	-1194.2995	3.3048



(1) Renton, J.D. A Finite Difference Analysis of Flexural Torsional Behaviour of Grillage IJMS 1964

(2) Constantino, C.T. Finite Element Approach to Stresswave Problem J. Eng. Mech. Div. 93 1967

(3) 青柳隆一郎 橋梁工学に於ける数値解析の基礎と応用 土木学会 1972. 10 (4) 木谷田 他 1970年度 建築学会講演集