

一部修正された振動系の固有値とその部材変数
に対する変化率の決定手法について

熊本大学

平井一男

九州東海大学

○ 柏木光博

Ⅱ 序

先に、平井等は構造物の一部が修正された時、修正以前の振動系 (system A) の n 次の固有値 λ_n とそれに対応する固有ベクトル ϕ_n ($n=1, 2, 3, \dots, N$) が求められていると、修正された部分よりなる小さな次数の dynamic stiffness matrix の基本式を解くことにより修正された振動系 (system B) の固有値と固有ベクトルが簡単に求まることを示した。本報告では、その基本式より容易に system B の固有値と固有ベクトルの変化率が求められることを示す。数百元以上の大次元 matrix に対しては、system A のいくつかの低次の固有値と固有ベクトルしか求められないことが多い。これらの場合にも静的に構造物を取り扱うことにより精度のよい解析ができることを示す。今回は、それらの式を示すとともに、全要素を対称とする matrix を使用する Fox 等の式により求めた値と比較検討することによりその妥当性を示す。

② 基本式

系 B:

2-1. System A に対して完全な固有値解析
が行なわれている場合

系 A:

System A が N コの集中荷重をもち、その節点に $F \times \sin \omega t$ の周期力が作用している時、その変形 W_A と F との関係は式 (2-1) で与えられる。

$$(K - \lambda M) W_A = F, \quad \lambda = \omega^2 \quad (2-1)$$

K : stiffness matrix, M : mass matrix

この式の右辺 = 0 とおいた自由振動の式を何らかの方法で解き、その n 次の固有値 λ_n と固有ベクトル ϕ_n が求められていたとする。この時、式 (2-1) の逆 matrix は modal analysis により求められる。すなわち

$$W_A = f_{Ad} F = (K - \lambda M)^{-1} F \quad (2-2)$$

ここに、 f_{Ad} 中の i, j 要素 f_{Adij} は

$$f_{Adij} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \phi_{Ain} \phi_{Ajn} \quad (2-3)$$

f_{Adij} の i, j は f_{Ad} の i 行 j 列を示し、 ϕ_{Ain} と ϕ_{Ajn} は ϕ_{An} の i, j 要素を示す。

いま、式 (2-1) における構造物が設計変更されたとすると、stiffness matrix は $K + \Delta K$, mass matrix は $M + \Delta M$ に変化する。この修正された構造物の振動方程式はつぎようになる。

$$(K - \lambda M + \Delta K - \lambda \Delta M) W_B = F \quad (2-4)$$

系 B が自由振動の時は F は 0 であるから

$$(K - \lambda M + \Delta K - \lambda \Delta M) W_B = 0 \quad (2-5)$$

この修正がごく一部に限られている場合には、 $\Delta K - \lambda \Delta M$ 中の大部分の行と列とが零要素のみをもつことになる。この零要素のみをもつ行と列とを除くと全部が零でない要素をもつ行と列となり圧縮した matrix が作られる。この圧縮した matrix を $\Delta K - \lambda \Delta M$ と書くことにする。

system A が

$$\tilde{F} = -(\Delta K - \lambda \Delta M) \tilde{W}_A \quad (2-6)$$

の荷重をうけるとき、式 (2-1) より

$$(K - \lambda M) \tilde{W}_A = \tilde{F} = -(\Delta K - \lambda \Delta M) W_A \quad (2-7)$$

または

$$(K - \lambda M + \Delta K - \lambda \Delta M) \tilde{W}_A = 0 \quad (2-8)$$

式(2-8)と式(2-5)を比較すると, system Bの自由振動は式(2-6)の $\tilde{F}$ をうける system Aの強制振動に等しいことがわかる。 $\tilde{W}_A$ は式(2-2)より

$$W_A = f_{Ad} \tilde{F} \quad (2-9)$$

上式を式(2-8)に使用すると

$$\tilde{F} + (\Delta K - \lambda \Delta M) f_{Ad} \tilde{F} = 0 \quad (2-10)$$

または

$$\{I + (\Delta K - \lambda \Delta M) f_{Ad}\} \tilde{F} = 0 \quad (2-11)$$

これは前記の $\Delta K - \lambda \Delta M$ を使用すると

$$\{I + (\Delta K - \lambda \Delta M) \bar{f}_{Ad}\} \bar{F} = 0 \quad (2-12)$$

ここに $\bar{F}$ は $\tilde{F}$ より零要素を取り除いたものであり, $\bar{f}_{Ad}$ は $\Delta K - \lambda \Delta M$ 中のすべてが零よりなる行と列とに対応するものを f_{Ad} 中より取り除いたものである。

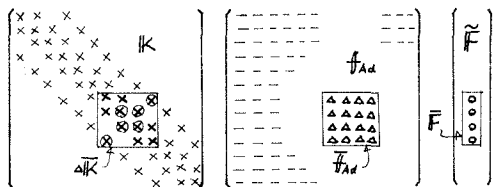


図-1. $K, f_{Ad}, \tilde{F}$ と $\Delta K, \Delta f_{Ad}, \Delta \tilde{F}$ との関係

上図にわかりやすいようにそれらの関係を一例をとって便宜を計った。基本式は□で囲まれた部分のみのmatrixよりなっている。

入を未知数とする振動数方程式は

$$\det \{I + (\Delta K - \lambda \Delta M) \bar{f}_{Ad}\} = 0 \quad (2-13)$$

この式を満足する λ は試算法で求められる。いま求められた固有値を λ_m とすると, この λ_m を式(2-12)に代入して $\bar{F}_m$ が求められ, これより $\tilde{F}$ が容

易にえられる。この λ_m と $\tilde{F}_m$ とを式(2-9)に代入すると λ_m に対応する system Bの変位ベクトル W_{Bm} が決定される。

$$W_{Bm} = f_{Adm} \tilde{F}_m \quad (2-14)$$

この f_{Adm} 中の i, j 要素は次式で計算できる。

$$f_{Admij} = \sum_{n=1}^N (\lambda_n - \lambda_m)^{-1} \phi_{Ain} \phi_{Ajn} \quad (2-15)$$

式(2-14)の変位ベクトルを正規化すると

$$\phi_{Bm} = C_{Bm} W_{Bm}, \quad \phi_{Bm}^T (M + \Delta M) \phi_{Bm} = 1 \quad (2-16)$$

より

$$(C_{Bm} f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) (C_{Bm} f_{Adm} \tilde{F}_m) = 1$$

$$C_{Bm}^2 (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) (f_{Adm} \tilde{F}_m) = 1$$

$$\therefore C_{Bm} = \{ (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) (f_{Adm} \tilde{F}_m) \}^{-\frac{1}{2}} \quad (2-17)$$

上式より正規化モード ϕ_{Bm} は

$$\phi_{Bm} = \{ (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) (f_{Adm} \tilde{F}_m) \}^{-\frac{1}{2}} f_{Adm} \tilde{F}_m \quad (2-18)$$

2-2 System Aの有限個の固有値と固有モードを使用する場合(f_{Adij})

上述の解析は厳密なものであるが, 式(2-3), (2-15)でわかるように f_{Adij} の計算にはすべての固有値と固有ベクトルが計算されていなければならない。ここで有限個の低次の固有値と固有ベクトルを使用して精度のよい f_{Adij} を求めてみることを考えてみる。式(2-3)中の $(\lambda_m - \lambda)^{-1}$ は次のように展開できる。

$$\frac{1}{\lambda_m - \lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{\lambda}{\lambda_m^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda_m^3} + \cdots + \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda_m^k} \right) + \frac{\lambda^k}{\lambda_m^k (\lambda_m - \lambda)} \quad (2-19)$$

これを式(2-3)に用いると f_{Adij} は次式のように表現できる。

$$f_{Adij} = (f_{1sij} + f_{2sij} + \cdots + f_{ksij}) + \Delta f_{Adij} \quad (2-20)$$

ここに

$$f_{ASij} = \lambda^{R-1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \phi_{Ain} \phi_{Ajn}$$

$$\Delta f_{Adj} = \lambda^k \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^k (\lambda_n - \lambda)} \phi_{Ain} \phi_{Ajn} \quad (2-21)$$

$R = 1, 2, 3, \dots, K$

一般の構造物に対して $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ が成立するので、 $(\lambda/\lambda_n)^K \ll (\lambda/\lambda_1)^K$ が成立するように K を決め式(2-21)より f_{ASij} を求めることができれば、 f_{Adj} はより精度のよい値となる。式(2-21)を使用すれば λ_n, ϕ_{An} が必要となるが、これは静的な計算により λ_n, ϕ_{An} を使用することなく求められる。すなわち、ある一つの静荷重 F_J により生じる静的変形は静的手法により求められる。これは式(2-2)において $\lambda = 0$ とした場合に相当する。

$$W_{AS1} = f_{ASJ} F_J = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \phi_{An} \phi_{AJn} F_J \quad (2-22)$$

つぎに、 $F_1 = \lambda M W_{AS1}$ なる静的荷重による変形はやはり静力学より求められる、これは

$$W_{AS2} = \lambda \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \phi_{An} \phi_{AJn}^T M \left(\sum_{n=1}^N \lambda_n^{-1} \phi_{An} \phi_{AJn} F_J \right) \\ = \lambda \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^2} \phi_{An} \phi_{AJn} F_J \quad (2-23)$$

同様に $F_2 = \lambda M W_{AS2}$ に対しては

$$W_{AS3} = \lambda^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^3} \phi_{An} \phi_{AJn} F_J \quad (2-24)$$

この操作を何回くり返すと W_{ASK} が静的に決定でき、これより f_{ASij} が λ_n, ϕ_{An} とを使用することなく求められることがわかる。この計算は式(2-12)の $\bar{F}$ に対して行なわなければならないので、 N 元の連立方程式を $\Delta \bar{K} - \lambda \Delta \bar{M}$ の次数を K 倍した回数だけ解かなければならない。しかし、 K は一般に band matrix であるので適当な方法を用いて簡単に計算できよう。さらに以下の計算を行えば、この連立方程式を解く回数を半減できる。いま i の値として i と j ととり、 k として k と $\bar{k}$ を考え

る。ここに $1 \leq \bar{k} \leq K$ 。この時、静的変形 W_{ASK} と $W_{AS\bar{k}}$ は

$$W_{ASK} = \lambda^{(K-1)} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-K} \phi_{An} \phi_{AJn} F_j \quad (2-25)$$

$$W_{AS\bar{k}} = \lambda^{(\bar{k}-1)} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-\bar{k}} \phi_{An} \phi_{AJn} F_j \quad (2-26)$$

ただし、 $F_i = F_j = 1$

いま、 $W_{ASK}^T M W_{AS\bar{k}}$ なる scalar を考え、これを $W_{(K+\bar{k})ij}^*$ とあらわすと

$$W_{(K+\bar{k})ij}^* = W_{ASK}^T M W_{AS\bar{k}} \\ = \lambda^{(K+\bar{k}-2)} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-(K+\bar{k})} \phi_{Ain} \phi_{AJn} F_i F_j \quad (2-27)$$

式(2-21)と比較して $f_{(K+\bar{k})ij}$ は $W_{(K+\bar{k})ij}^*$ を λ 倍して得られることがわかる。

③ 固有値の変化率

3-1 理論式

式(2-12)において

$$\bar{Q}_{1m} = I + (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{F}_{Adm} \quad (3-1)$$

とおくと

$$\bar{Q}_{1m} \bar{F}_m = 0 \quad (3-2)$$

式(3-1)に $\bar{F}_{Adm}$ を前から乗じて $\bar{Q}_{2m}$ とおくと

$$\bar{Q}_{2m} = \bar{F}_{Adm} \bar{Q}_{1m} = \bar{F}_{Adm} + \bar{F}_{Adm} (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{F}_{Adm} \quad (3-3)$$

となり、 $\bar{F}_{Adm}$ の対称性より $\bar{Q}_{2m}$ は対称 matrix となる。よって

$$\bar{Q}_{2m} \bar{F}_m = 0 \quad (3-4)$$

また、式(3-4)に $\bar{F}_m^T$ を前から乗ずると

$$\bar{F}_m^T \bar{Q}_{2m} \bar{F}_m = 0 \quad (3-5)$$

となる。ここで、式(3-5)を任意の設計変数 x_k で微分すると

$$\frac{\partial \bar{F}_m^T}{\partial \alpha_l} \bar{Q}_{2m} \bar{F}_m + \bar{F}_m^T \frac{\partial \bar{Q}_{2m}}{\partial \alpha_l} \bar{F}_m + \bar{F}_m^T \bar{Q}_{2m} \frac{\partial \bar{F}_m}{\partial \alpha_l} = 0 \quad (3-6)$$

$\bar{Q}_{2m}$ の対称性より、式(3-2)と合わせ考えると

$$\bar{F}_m^T \bar{Q}_{2m} \frac{\partial \bar{F}_m}{\partial \alpha_l} = (\bar{Q}_{2m} \bar{F}_m)^T \frac{\partial \bar{F}_m}{\partial \alpha_l} = 0$$

また、オ-項は

$$\frac{\partial \bar{F}_m^T}{\partial \alpha_l} \bar{Q}_{2m} \bar{F}_m = \frac{\partial \bar{F}_m^T}{\partial \alpha_l} (\bar{Q}_{2m} \bar{F}_m) = 0$$

よって与式は

$$\bar{F}_m^T \frac{\partial \bar{Q}_{2m}}{\partial \alpha_l} \bar{F}_m = 0 \quad (3-6)$$

ここで、式(3-3)より

$$\frac{\partial \bar{Q}_{2m}}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial \bar{f}_{Adm}}{\partial \alpha_l} + \frac{\partial \bar{f}_{Adm}(\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M})}{\partial \alpha_l} \bar{f}_{Adm} + \bar{f}_{Adm}$$

$$\frac{\partial (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M})}{\partial \alpha_l} \bar{f}_{Adm} + \bar{f}_{Adm} (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \frac{\partial \bar{f}_{Adm}}{\partial \alpha_l}$$

$$= \frac{\partial \bar{f}_{Adm}}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \{ I + (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm} \} + \bar{f}_{Adm} ($$

$$\frac{\partial \Delta \bar{K}}{\partial \alpha_l} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \Delta \bar{M} - \lambda_m \frac{\partial \Delta \bar{M}}{\partial \alpha_l} \bar{f}_{Adm} + \bar{f}_{Adm} (\Delta \bar{K} -$$

$$\lambda_m \Delta \bar{M}) \frac{\partial \bar{f}_{Adm}}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l}$$

ここで、

$$\Delta \bar{K}_l = \frac{\partial \Delta \bar{K}}{\partial \alpha_l}, \quad \Delta \bar{M}_l = \frac{\partial \Delta \bar{M}}{\partial \alpha_l}$$

$$\bar{f}_{Adm\lambda} = \frac{\partial \bar{f}_{Adm}}{\partial \lambda_m} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} \phi_{An} \phi_{Ajn} \quad (3-7)$$

とあくと

$$\text{与式} = \bar{f}_{Adm\lambda} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \{ I + (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm} \} + \bar{f}_{Adm} ($$

$$\Delta \bar{K}_l - \lambda_m \Delta \bar{M}_l \bar{f}_{Adm} - \bar{f}_{Adm} \{ \Delta \bar{M} \bar{f}_{Adm} - (\Delta \bar{K} -$$

$$\lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm\lambda} \} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l}$$

式(3-6)を式(3-8)に代入すると

$$\bar{F}_m^T \frac{\partial \bar{Q}_{2m}}{\partial \alpha_l} \bar{F}_m = \bar{F}_m^T \bar{f}_{Adm\lambda} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \{ I + (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm} \} \bar{F}_m$$

$$+ \bar{F}_m^T \bar{f}_{Adm} (\Delta \bar{K}_l - \lambda_m \Delta \bar{M}_l) \bar{f}_{Adm} \bar{F}_m - \bar{F}_m^T$$

$$\bar{f}_{Adm} \{ \Delta \bar{M} \bar{f}_{Adm} - (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm\lambda} \} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \bar{F}_m$$

$$\bar{F}_m = 0$$

また、式(3-1)、(3-2)より上式のオ-項は0で

あるから

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} = \frac{\bar{F}_m^T \bar{f}_{Adm} (\Delta \bar{K}_l - \lambda_m \Delta \bar{M}_l) \bar{f}_{Adm} \bar{F}_m}{\bar{F}_m^T \bar{f}_{Adm} \{ \Delta \bar{M} \bar{f}_{Adm} - (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm\lambda} \} \bar{F}_m} \quad (3-9)$$

3-2 System A の有限個の固有値と固有モードを使用する場合 ($f_{Admij\lambda}$)

式(3-9)は厳密解であるが、2-2で述べたように $\bar{f}_{Adm\lambda}$ の計算も静的な計算により精度をあげられることを示す。式(2-19)を λ_m で微分すると

$$\frac{\partial (\frac{1}{\lambda_n - \lambda_m})}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_m)^2} = \left(\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{2\lambda_m}{\lambda_n^3} + \frac{3\lambda_m^2}{\lambda_n^4} + \dots + \frac{K\lambda_m^{K-1}}{\lambda_n^{K+1}} \right) + \frac{\lambda_m^{K-1} \{ K(\lambda_n - \lambda_m) + \lambda_m \}}{\lambda_n^K (\lambda_n - \lambda_m)^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda_m} \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_n^2} + \frac{2\lambda_m^2}{\lambda_n^3} + \frac{3\lambda_m^3}{\lambda_n^4} + \dots + \frac{K\lambda_m^K}{\lambda_n^{K+1}} \right) + \frac{\lambda_m^K \{ (K+1)(\lambda_n - \lambda_m) + \lambda_m \}}{\lambda_n^{K+1} (\lambda_n - \lambda_m)^2} \quad (3-10)$$

$$f_{Admij\lambda} = \frac{\partial f_{Admij}}{\partial \lambda_m} \quad \text{とあくと} \quad (3-11)$$

$$f_{Admij\lambda} = (f_{1sij\lambda} + f_{2sij\lambda} + \dots + f_{Ksij\lambda}) + \Delta f_{Admij\lambda}$$

ここで

$$f_{Ksij\lambda} = \frac{r_K}{\lambda_m} \lambda_m^K \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^{K+1}} \phi_{Ain} \phi_{Ajn} = \frac{r_K}{\lambda_m} f_{(K+1)sij}$$

$$\Delta f_{Admij\lambda} = \lambda_m^K \sum_{n=1}^N \frac{f_{(K+1)(\lambda_n - \lambda_m) + \lambda_m}}{\lambda_n^{K+1} (\lambda_n - \lambda_m)^2} \phi_{Ain} \phi_{Ajn}$$

$$r_K = 1, 2, 3, \dots, K \quad (3-11)$$

$f_{Ksij\lambda}$ は $f_{(K+1)sij}$ を $r_K \lambda_m$ 倍する = とにより求まる。

よって, $f_{Bij\lambda}$ は静力学的に求められる。

④ 固有ベクトルの変化率

式(2-14)より

$$W_{Bm} = f_{Adm} \tilde{F}_m$$

W_{Bm} を正規化するためにつぎのようにおく

$$\phi_{Bm} = C_{Bm} W_{Bm}$$

よって

$$\phi_{Bm} = C_{Bm} f_{Adm} \tilde{F}_m \quad (4-1)$$

上式を任意の設計変数 α_l で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{Bm}}{\partial \alpha_l} &= \frac{\partial C_{Bm}}{\partial \alpha_l} f_{Adm} \tilde{F}_m + C_{Bm} \frac{\partial f_{Adm}}{\partial \alpha_l} \tilde{F}_m + C_{Bm} f_{Adm} \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial \alpha_l} \\ &= \frac{\partial C_{Bm}}{\partial \alpha_l} f_{Adm} \tilde{F}_m + C_{Bm} \left(\frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \frac{\partial f_{Adm}}{\partial \lambda_m} \tilde{F}_m + f_{Adm} \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial \alpha_l} \right) \end{aligned} \quad (4-2)$$

上式が固有ベクトルの変化率を表わす式である。式(2-12)をもとにして、式(3-9)、(4-2)と変化率を表わす式が示されたが、式(4-2)はベクトル全要素を必要とするので、上式の dynamic flexibility matrix f_{Adm} も $\tilde{F}_m$ に用いる要素分の行を必要とする。ここで、式(4-2)において $\partial \tilde{F}_m / \partial \alpha_l$, $\partial C_{Bm} / \partial \alpha_l$ は後に示す式(4-3)、(4-4)より求まる。

1). $\partial \tilde{F}_m / \partial \alpha_l$ を求める式

式(2-12)を α_l で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial \alpha_l} &= - \left\{ \mathbf{I} + (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \bar{f}_{Adm} \right\}^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta \bar{K}}{\partial \alpha_l} - \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \Delta \bar{M} \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_m \frac{\partial \Delta \bar{M}}{\partial \alpha_l} \right\} \bar{f}_{Adm} + (\Delta \bar{K} - \lambda_m \Delta \bar{M}) \frac{\partial \bar{f}_{Adm}}{\partial \alpha_l} \\ &\quad \left. \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \right\} \bar{F}_m \end{aligned} \quad (4-3)$$

上式はやや複雑であるが、圧縮した matrix, vector の演算であるから Programming してしまえば計算はしやすい。しかし、式(4-3)は圧縮した vector になるから、これを n 元の次数 ($N \times$) の vector にもどしてやり、 $\partial \tilde{F}_m / \partial \alpha_l$ とおく。

ここで元に戻すとき、式(4-3)で求めた vector はそのまゝであるが、残りの要素は零である。

2). $\partial C_{Bm} / \partial \alpha_l$ を求める式

式(2-17)を α_l で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{Bm}}{\partial \alpha_l} &= -\frac{1}{2} \left\{ (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) (f_{Adm} \tilde{F}_m) \right\}^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial \{ (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) (f_{Adm} \tilde{F}_m) \}}{\partial \alpha_l} \\ &= -\frac{1}{2} C_{Bm}^3 \left\{ 2 (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T (M + \Delta M) \frac{\partial (f_{Adm} \tilde{F}_m)}{\partial \alpha_l} + (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T \frac{\partial (M + \Delta M)}{\partial \alpha_l} (f_{Adm} \tilde{F}_m) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} C_{Bm}^3 (f_{Adm} \tilde{F}_m)^T \left\{ 2 (M + \Delta M) \left(\frac{\partial f_{Adm}}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} \tilde{F}_m + f_{Adm} \frac{\partial \tilde{F}_m}{\partial \alpha_l} \right) + \frac{\partial \Delta M}{\partial \alpha_l} (f_{Adm} \tilde{F}_m) \right\} \end{aligned} \quad (4-4)$$

⑤ FOX 法による固有値と固有ベクトルの変化率

FOX による方法を合わせて掲載する。ここでは式のみを示した。

$$\frac{\partial M_B}{\partial \alpha_l} = M_{B\alpha_l}, \quad \frac{\partial K_B}{\partial \alpha_l} = K_{B\alpha_l} \quad (5-1)$$

とおくと (ここで、係数Bは修正された振動系とす。)

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial \alpha_l} = \phi_{Bm}^T (K_{B\alpha_l} - \lambda_m M_{B\alpha_l}) \phi_{Bm} \quad (5-2)$$

ここで

$$F_B = K - \lambda_m M \quad (5-3)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{Bm}}{\partial \alpha_l} &= - \left[F_B F_B + 2 M_B \phi_{Bm} \phi_{Bm}^T M_B \right]^{-1} \left[F_B \frac{\partial F_B}{\partial \alpha_l} + M_B \phi_{Bm} \phi_{Bm}^T M_{B\alpha_l} \right] \phi_{Bm} \end{aligned} \quad (5-4)$$

⑥ 例題解析

式(3-9), (4-2)は今回の報告式であり, 式(5-2)と式(5-4)はFoxによる式である。また, それぞれ固有値と固有ベクトルの変化率を表わしている。そこで比較検討の意味で下図のような Cantilever truss を解析する。

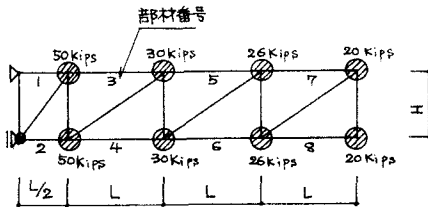


図-2.

●は節点に作用する dead mass であるが, mass matrix 作成の際には部材の重量の $\frac{1}{2}$ を各々の節点に加えた。よって 2 部材の左側の節点も重量をもつことになり, 他の要素は節点に 2 つづつの変位成分をもつので全体で 17 コとなる。K と M の matrix は簡単なもので省いた。また部材定数を示すと次のようになる。

$$L = 648 \text{ in} = 1645.92 \text{ cm}$$

$$H = 276 \text{ in} = 701.04 \text{ cm}$$

$$E = 29 \times 10^6 \text{ psi} = 2.0389 \times 10^3 \text{ t/cm}^2$$

$$\rho = 0.283 \text{ lb/in}^3 = 7.8339 \times 10^{-6} \text{ t/cm}^3$$

$$g = 385.827 \text{ in/sec}^2 = 980 \text{ cm/sec}^2$$

Initial Area (all Member)

$$A_0 = 34.4 \text{ in}^2 = 221.926 \text{ cm}^2$$

$$I_{kips} = 0.4536 \text{ t}$$

今回は, 3 部材のみを変更し, 対象とする固有値は一次に限った。初期設計における eigenvalue と eigenvector はヤコビ法により解析した。また 3-2 で示すように, 有限個の eigenvalue と eigenvector を使う方法によらず, 式(3-9)に必要なのは全部使用する厳密解によった。ここで厳密解とは式(2-3), (3-7)で求めたことを意味する。部材 3 を設計変更することにより, 修正された stiffness matrix と mass matrix は

$\alpha_3 = A_3/A_0 - 1$ という係数を用いて簡単に表わされる。以下に, それによる ΔK , ΔM 等必要な値を記載した。また, α_3 は特に 0.1, 1.0 の場合についてのみ解析した。以下に Computing result を示す。また, 解析は倍精度によった。

$$1) \quad \Delta K = \frac{EA_0\alpha_3}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \Delta M = \frac{1.4308\alpha_3}{g} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Local dynamic flexibility matrix F_{Ad1}

$$\lambda_1 = 35.5153/94$$

(System A)

$$\alpha_3 = 0.1$$

$$(f_{Ad1ij} = f_{Ad1ji})$$

$$\alpha_3 = 1.0$$

f_{Ad111}	-0.01364076	-0.001012399
f_{Ad112}	0.02581621	0.002962423
f_{Ad113}	-0.03872500	-0.0056225254
f_{Ad114}	0.21144309	0.0335599578
f_{Ad122}	-0.040713900	0.0006545250
f_{Ad123}	0.071216301	0.01131634495
f_{Ad124}	-0.379213969	-0.0573094256
f_{Ad133}	-0.100835955	-0.0140618153
f_{Ad134}	0.556266097	0.0899772486
f_{Ad144}	-2.971479529	-0.4657155955

4) $F_{Ad\lambda} = \partial F_{Ad1} / \partial \lambda_1$ ($f_{Ad\lambda ij} = f_{Ad\lambda ji}$)

$$\alpha_3 = 0.1$$

$$\alpha_3 = 1.0$$

$f_{Ad11\lambda}$	0.018729327	0.000512409
$f_{Ad112\lambda}$	-0.033891098	-0.0009278528
$f_{Ad113\lambda}$	0.049096845	0.0013427123
$f_{Ad114\lambda}$	-0.263829155	-0.0072158640
$f_{Ad122\lambda}$	0.061329078	0.00168258876
$f_{Ad123\lambda}$	-0.088840401	-0.0024299899
$f_{Ad124\lambda}$	0.4774401792	0.01306380934

0.128702971 0.0035195023
 -0.6916019426 -0.01891161050
 3.716440626 0.10164818384

5) $\bar{F}_i$

$\alpha_3 = 0.1$ $\alpha_3 = 1.0$
 $\bar{F}_i(1)$ -556,5533648 -309,245486
 $\bar{F}_i(2)$ 0,1334162857 0,148887356
 $\bar{F}_i(3)$ 556,29543613 309,0150490
 $\bar{F}_i(4)$ 1.0 1.0

6) $\{ \bar{F}_{Ad1} + \bar{F}_{Ad1}(\Delta K - \lambda_1 \Delta M) \bar{F}_{Ad1} \} \bar{F} \rightarrow DT$

$\alpha_3 = 0.1$ $\alpha_3 = 1.0$
 DT(1) $-0.235922 \times 10^{-15}$ 0.138778×10^{-15}
 DT(2) 0.37470×10^{-15} 0.277556×10^{-16}
 DT(3) $-0.360823 \times 10^{-15}$ 0.152656×10^{-16}
 DT(4) $-0.839672 \times 10^{-14}$ -0.95645×10^{-6}

7) $\bar{F}_{Ad1} \bar{F}_i$

$\alpha_3 = 0.1$ $\alpha_3 = 1.0$
 $\bar{f}_{Ad1} \bar{F}_i(1)$ -13,735844 -1,39041327
 $\bar{f}_{Ad1} \bar{F}_i(2)$ 24,864559 2,52359293
 $\bar{f}_{Ad1} \bar{F}_i(3)$ -32,976283 -2,5149098
 $\bar{f}_{Ad1} \bar{F}_i(4)$ 188,74686 16,95181015

8) λ_1 (System B)

$\alpha_3 = 0.1$ $\alpha_3 = 1.0$
 式(2-12) 36,3275649 40,405069
 ヤコビ法 36,3275636 40,405005

9) Φ_{Ai}

$\alpha_3 = 0.1$ $\alpha_3 = 1.0$
 Φ_{A11} 0,01541828 0,01731996
 Φ_{A21} -0,1130827 -0,1260674
 Φ_{A31} 0,2047019 0,2288132
 Φ_{A41} 0,1836644 0,2048539
 Φ_{A51} 0,2198247 0,2457455
 Φ_{A61} -0,2797157 -0,2280243
 Φ_{A71} 1,553892 1,537005
 Φ_{A81} 0,2850739 0,3177512
 Φ_{A91} 1,567219 1,551791

Φ_{A10-1} -0,3807452 -0,3401321
 Φ_{A11-1} 3,3273110 3,3149920
 Φ_{A12-1} 0,3205499 0,3573517
 Φ_{A13-1} 3,3363550 3,3250420
 Φ_{A14-1} -0,4157219 -0,3789805
 Φ_{A15-1} 5,1686560 5,1691330
 Φ_{A16-1} 0,3210044 0,3579154
 Φ_{A17-1} 5,1717750 5,1726030

10) Rate of change of eigenvalue $\partial \lambda_1 / \partial \alpha_3$

$\alpha_3 = 0.1$ $\alpha_3 = 1.0$
 式(3-9) 7,4988806298 2,7115611
 Fox法 7,4988768266 2,7115570

11) Rate of change of eigenvector $\partial \Phi_{B1} / \partial \alpha_3 \rightarrow \Phi'_{B1}$

$\alpha_3 = 0.1$ on B3 式(4-2) $1 = \delta_3$ Fox法 $1 = \delta_3$
 Φ'_{B11} 0.00338223 0.00338233
 Φ'_{B21} -0.0235944 -0.0235947
 Φ'_{B31} 0.0434804 0.0434810
 Φ'_{B41} 0.0386490 0.0386510
 Φ'_{B51} 0.0467218 0.0467227
 Φ'_{B61} 0.093627 0.0936261
 Φ'_{B71} -0.0306687 -0.0306569
 Φ'_{B81} 0.0598982 0.0599009
 Φ'_{B91} -0.0279628 -0.0279509
 Φ'_{B10-1} 0.0730562 0.0730546
 Φ'_{B11-1} -0.0185309 -0.0185077
 Φ'_{B12-1} 0.0675089 0.0675119
 Φ'_{B13-1} -0.0166670 -0.0166437
 Φ'_{B14-1} 0.0658710 0.0658692
 Φ'_{B15-1} 0.0687564 0.06879145
 Φ'_{B16-1} 0.0676986 0.0677016
 Φ'_{B17-1} 0.0094059 0.00944103

12) $\partial \Phi_{B1} / \partial \alpha_3$

$\alpha_3 = 1.0$ の時

式(4-2) による

FOX法による

Φ'_{B11}	0.00133093	0.00133119
Φ'_{B21}	-0.00881696	-0.00881716
Φ'_{B31}	0.0165608	0.0165614
Φ'_{B41}	0.0142817	0.0142820
Φ'_{B51}	0.0178169	0.0178176
Φ'_{B61}	0.0352258	0.0352254
Φ'_{B71}	-0.0113842	-0.0113812
Φ'_{B81}	0.0218349	0.0218354
Φ'_{B91}	-0.0104278	-0.0104248
Φ'_{B101}	0.0279738	0.0279732
Φ'_{B111}	-0.0105851	-0.0105790
Φ'_{B121}	0.0245531	0.0245537
Φ'_{B131}	-0.0099256	-0.00991952
Φ'_{B141}	0.0254388	0.0254382
Φ'_{B151}	-0.00436223	-0.00435293
Φ'_{B161}	0.0246297	0.0246304
Φ'_{B171}	-0.00413213	-0.00412283

これらの部材間の変化率の関係も、式(3-9)の分母が同一であるので、 $\Delta \bar{K}_2$, $\Delta \bar{M}_2$ を求めると簡単に計算できる。

ここではこの基本式の妥当性を示すために、一つの構造物に対して数値計算例を示したが、この解析手法は固有値問題の最適設計において便利に使用できると思われるので、今後この種の解析に適用してみたいと考えている。

[8] 参考文献

- 1). J. Hirai, T. Yoshimura and K. Takamura
'On a direct eigenvalue analysis for locally modified structures'
Int. J. of Numerical Method in Engineering,
Vol. 6. 441-442 (1973)
- 2). R.L. FOX and M.P. Kapoor
'Rates of change of eigenvalues and eigenvectors,'
AIAA J. 6, 2426-2429 (1968)

8), 10), 11), 12) を見てもわかるように全ど誤差はない。

[7] むすび

修正された部分よりなる condensed dynamic stiffness matrix の次数をもつ基本式を用いることにより簡単に固有値の変化率が求められ、また必要な行を元の matrix にもとめてやると固有ベクトルの変化率を表わす式が求まることが示された。今回は厳密解によったが、2-2, 3-2のように dynamic flexibility matrix を展開すれば解析も簡単にできる。大次元の問題になっても、最初に前記の F_{id} を求めれば、部材を任意に変更しても(変動の大きさを問わず)、今までのように再解析することなく、固有値問題が解決するし、またいくつかの部材を設計変更したとき、