

有限要素法弾塑性解析における増分計算の精度について

横浜国大工学部 青木博文

同 ○中込忠男

§ 1. はじめに

有限要素法を用いた連続体の弾塑性解析は、金属材料の場合に応力とひずみの関係を応力増分とひずみ増分に対応させるのが一般的であるため、弾性解析のように応力分布を1回の逆行列計算によって求め得るのと異なり、外力増分と変位変分で変形の経路に沿って刻々と計算を重ね、各荷重のもとでの応力分布を求める増分法が用いられている。

このようにして、有限要素法による弾塑性解析の方法が確立されると、その結果は実験値との比較が可能となり、解析に用いられた仮定の正当性や精度について評価できるようになった。有限要素法弾塑性解析で得られた解が実験値と異なる場合に考えられる原因として、実験誤差がなければ、

- (1) 連続体を有限要素に分割した時のモデル化
- (2) 逆行列その他演算の誤差
- (3) 素材の応力とひずみ関係

を主なものとして挙げることができる。(1),(2)は、増分法に限らず有限要素法では必ず検討しなければならない。(3)は塑性性に基ずいて今後とも基礎的な実験が必要となる。上述の他に、

- (4) 増分計算によって生ずる誤差

が考えられる。弾塑性解析は、解析しようとする物体が外力を受けた場合に塑性域がいかに広がるかを求めることに目的はあるが、建築物のように不静定次数の高い構造物を設計しようとする、最終的にはその構造物の終局耐力および変形能力を求めることが要求され、したがって、変形も大きく、 $P-\delta$ 効果や形状変化が最大荷重に大きな影響を与えることになる。

以下では、有限要素法弾塑性解析における増分計算の中で、大歪大变形にともなう生じる問題を幾何剛性マトリックスと形状変化の影響に分け、従来からおされている理論を整理し、簡単な例題で検討を行なう。

§ 2. 幾何剛性マトリックスについて

従来から行なわれている小歪小変形理論の外力と変位の関係は、剛性マトリックスを用いると、

$$F = K\delta \quad (1)$$

ただし F : 節点外力ベクトル

δ : 節点変位ベクトル

$$\sigma = D\varepsilon \quad \text{: 応力ベクトル} \quad (2)$$

$$\varepsilon = B A \delta \quad \text{: ひずみベクトル} \quad (3)$$

$$K = \int A^T B^T D B A dV \quad \text{: 剛性マトリックス} \quad (4)$$

である。増分形で表わすと、仮想仕事の原理を用いて、

$$\Delta F = K \Delta \delta \quad (5)$$

$$\Delta \sigma = D \Delta \epsilon \quad (6)$$

で表わされる。したがって、ある荷重段階で増分量が分ると、それを加えることによって新しい状態を知ることになる。この時、増分量を限りなく小さくすれば同じように小さくなる誤差と、増分量をいくら小さくしても変形が注じてくれは避けられない誤差を区別する必要がある。例えば、節点外力 F に増分量 ΔF を加える操作では、 F の加わっていた節点は移動して新しい位置にきているので、そのまま加えることができない。とくに、要素が回転したときには釣合めなくなる。これを補正するものが幾何剛性マトリックスである。Zienkiewicz⁽¹⁾によると、

$$K_g = \frac{\partial}{\partial \delta} \{ T^T F \} \quad (7)$$

ここで T : 要素の剛体回転量に対する座標変換マトリックス

である。これを平面応力状態の三角形要素 (節点 i, j, m) について計算してみると、剛体回転は

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (8)$$

であるから、変位関数として一次多項式を用いると

$$\theta = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} -c_i & b_i & -c_j & b_j & -c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし $c_i = x_m - x_j$: 節点 x 座標の差

$b_i = y_j - y_m$: 節点 y 座標の差

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

となるから、結局

$$K_g = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} U_i \sin \theta + V_i \cos \theta \\ -U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \\ U_j \sin \theta + V_j \cos \theta \\ -U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \\ U_m \sin \theta + V_m \cos \theta \\ -U_m \cos \theta + V_m \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i & -b_i & c_j & -b_j & c_m & -b_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで U_i : 節点 i の外力ベクトルの x 方向成分

V_i : 節点 i の外力ベクトルの y 方向成分

となる。

増分計算で要素の局所座標をその増分開始ごとに絶対座標に一致させると、外力の増分ごとに要素の座標は新しくなり、 b_i, c_i , および Δ も新しく計算しなおすことになる。このようにすれば、いつでも $\theta = 0$ と置けるので、

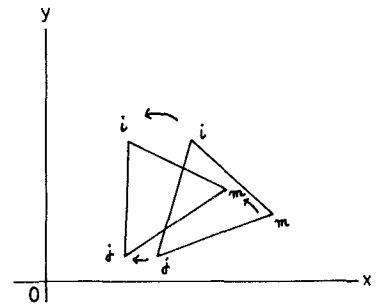


Fig.1

$$K_g = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} V_i \\ -U_i \\ V_j \\ -U_j \\ V_m \\ -U_m \end{bmatrix} [c_i \ -b_i \ c_j \ -b_j \ c_m \ -b_m] \quad (11)$$

となる。

以上は、要素の剛体回転から幾何剛性マトリックスを求めたが、三角形要素の各辺の回転量を用いて要素の回転とみなす方法もある。⁽²⁾さらに、Argyrisは有限要素をトラスに置換して、力の釣合いをつぎのように求めている。すなわち、要素の各辺方向に外力を分け、

$$\begin{bmatrix} U_{ij} \\ U_{jm} \\ U_{mi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(ij, x) & -\cos(ij, y) & \cos(ij, x) & \cos(ij, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(jm, x) & -\cos(jm, y) & \cos(jm, x) & \cos(jm, y) \\ \cos(mi, x) & \cos(mi, y) & 0 & 0 & -\cos(mi, x) & -\cos(mi, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{bmatrix} \quad (12)$$

と表現して、

$$K_g = \begin{bmatrix} A_{ij}-A_{mi} & B_{ij}-B_{mi} & -A_{ij} & -B_{ij} & A_{mi} & B_{mi} \\ & D_{ij}-D_{mi} & -B_{ij} & -D_{ij} & B_{mi} & D_{mi} \\ & & A_{jm}+A_{ij} & B_{jm}-B_{ij} & -A_{jm} & -B_{jm} \\ & & & D_{jm}-D_{ij} & -B_{jm} & -D_{jm} \\ & & & & -A_{mi}+A_{jm} & -B_{mi}+B_{jm} \\ (Sym.) & & & & & -D_{mi}+D_{jm} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{ここで } A_{ij} = \frac{U_{ij}}{l_{ij}} (1 - \cos^2(ij, x))$$

$$B_{ij} = \frac{-U_{ij}}{l_{ij}} \cos(ij, x) \cos(ij, y)$$

$$D_{ij} = \frac{U_{ij}}{l_{ij}} (1 - \cos^2(ij, y))$$

l_{ij} : 節点 i と j の距離

$\cos(ij, x)$: 要素の辺 ij の x 軸との方向余弦

となっている。以上の幾何剛性マトリックスの考え方の中で、剛体回転を基礎とした (11) 式は、ひずみが大きくなって要素の形状変化がでてくると誤差は大きくなる。また、要素の一边の回転がその要素全体の回転とみなす方法は、それが剛体回転とも一致しないので釣合いは崩れてくる。三角形要素の全ての辺の回転を求め、これらを平均したものに近い (13) 式では、ひずみが大きくなっても使用が可能である。

要素が回転すると、外力だけでなく応力テンソルの表示も変化するので、考慮する必要がある。変位が知れば、(9) 式より剛体回転量が求まるので、

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

を用いる。

§ 3. 形状変化による影響

つぎに、大歪大变形の問題として、形状の変化による影響を考えなければならない。これは、要素の体積変化を考慮して 2 次の微小量まで、たひずみエネルギーを考えると分りやすい。いま、平面応力状態における x 方向のたひずみエネルギーは、

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + \frac{1}{2}\Delta\sigma_x)\Delta y (1 + \frac{1}{2}\Delta\epsilon_y) t_0 (1 + \frac{1}{2}\Delta\epsilon_x) \left\{ \Delta x \Delta\epsilon_x - \frac{1}{4}\Delta x \Delta\epsilon_{xy}^2 \right\} \\ & \approx \left[\sigma_x \Delta\epsilon_x + \frac{1}{2}\Delta\sigma_x \Delta\epsilon_y + \left\{ \frac{1}{2}(\Delta\epsilon_y + \Delta\epsilon_x) \Delta\epsilon_x - \frac{1}{4}\Delta\epsilon_{xy}^2 \right\} \right] \Delta V \\ & \text{ただし } \Delta\sigma_x, \dots : \text{増分} \\ & \quad t_0 : \text{板厚} \end{aligned} \quad (15)$$

同様にして、y 方向およびせん断変形についても求まる。全ての応力成分についてたひずみエネルギーの増加分は、単位体積당り、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{\Delta V} &= \sigma_x \Delta\epsilon_x + \sigma_y \Delta\epsilon_y + \tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} + \tau_{yx} \Delta\epsilon_{yx} + \frac{1}{2}\Delta\sigma_x \Delta\epsilon_x + \frac{1}{2}\Delta\sigma_y \Delta\epsilon_y + \frac{1}{2}\Delta\tau_{xy} \Delta\epsilon_{xy} + \frac{1}{2}\Delta\tau_{yx} \Delta\epsilon_{yx} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\sigma_x \{ (\Delta\epsilon_y + \Delta\epsilon_x) \Delta\epsilon_x - \frac{1}{2}\Delta\epsilon_{xy}^2 \} + \sigma_y \{ (\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y) \Delta\epsilon_y - \frac{1}{2}\Delta\epsilon_{xy}^2 \} + \tau_{xy} (\Delta\epsilon_x + \Delta\epsilon_y + \Delta\epsilon_x) \Delta\epsilon_{xy} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

こゝで、応力増分とたひずみ増分として、

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}^P \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (17)$$

$$\mathbb{D}^P = \{ d_{ij} \} \quad (18)$$

とすれば、塑性変形が非圧縮性であると仮定して $\Delta\epsilon_z$ を求めると、

$$\Delta\epsilon_z = \left\{ \frac{1-2\nu}{E} (d_{11} + d_{21}) - 1 \right\} \Delta\epsilon_x + \left\{ \frac{1-2\nu}{E} (d_{12} + d_{22}) - 1 \right\} \Delta\epsilon_y + \frac{1-2\nu}{E} (d_{13} + d_{23}) \Delta\epsilon_{xy} \quad (19)$$

となるので、これから、

$$\frac{\Delta U}{\Delta V} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbb{D}^P \Delta \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbb{D}'^P \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (20)$$

$$\text{こゝで } \mathbb{D}'^P = \begin{bmatrix} (d_{11}-1)\sigma_x & \frac{1}{2}(d_{11}\sigma_y + d_{21}\sigma_x) & \frac{1}{2}(d_{11}\tau_{xy} + d_{21}\sigma_x) \\ & (d_{22}-1)\sigma_y & \frac{1}{2}(d_{22}\tau_{xy} + d_{23}\sigma_y) \\ (\text{Sym.}) & & d_{33}\tau_{xy} - \frac{1}{2}(d_{22} + d_{11})\sigma_y \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$a_1 = \frac{1-2\nu}{E} (d_{11} + d_{21})$$

$$a_2 = \frac{1-2\nu}{E} (d_{12} + d_{22})$$

$$a_3 = \frac{1-2\nu}{E} (d_{13} + d_{23})$$

となる。したがって、剛性マトリックスは、

$$\mathbb{K}' = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \{ \mathbb{D}^P + \mathbb{D}'^P \} \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (22)$$

となつて、 $\mathbb{D}^P$ のところを変化させることによって、同じ計算手順が使用できる。全く同じ方法で、立体の場合にも求めることができる。

$$D^P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) & \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & 0 \\ (Sym.) & & & & -\frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) & 0 \\ & & & & & -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \end{bmatrix} \quad (23)$$

以上、直接ひずみエネルギーを計算して剛性マトリックスの補正項を求めたのであるが、これをさらに厳密に考慮するためには、変形を考えた増分形の仮想仕事式⁽³⁾

$$\int d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV = \int l_i d\sigma_{ij} du_j ds \quad (24)$$

ただし l_i : 考えている時刻の面法線方向余弦

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij} - \frac{dP}{P} \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \frac{\partial (du_k)}{\partial x_i} \quad ; \text{公称応力増分}$$

$$\sigma_{ij}, \rho, u_i, x_i; \text{真応力, 密度, 変位, 座標}$$

(4)

を使って、三つらが求めている。

$\frac{\partial u}{\partial x}$ および $\frac{\partial u}{\partial y}$ をそれぞれ $\frac{1}{2}\sigma_{xy}$ と近似すると、平面応力状態では、

$$D^P = \begin{bmatrix} (a_1-1)\sigma_x & \frac{1}{2}(a_2\sigma_x + a_1\sigma_y) & \frac{1}{2}\{a_3\sigma_x + (a_1-1)\tau_{xy}\} \\ & (a_2-1)\sigma_y & \frac{1}{2}\{a_3\sigma_y + (a_2-1)\tau_{xy}\} \\ & & a_3\tau_{xy} - \frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix} \quad (25)$$

となる。また、() 式から3次元について求めてみると、同様 $\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \sigma_{yz}$, $\frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow \sigma_{xz}$, $\frac{\partial w}{\partial x} \rightarrow \sigma_{zx}$ と近似して、つぎのようになる。

$$D^P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) & \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\tau_{xy} \\ & 0 & \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) & \frac{1}{2}\tau_{yz} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & \frac{1}{2}\tau_{zx} & 0 \\ & & & -\frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) & -\frac{1}{4}(\tau_{yz} + \tau_{xy}) & -\frac{1}{4}(\tau_{zx} + \tau_{xy}) \\ & & & & -\frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_z) & -\frac{1}{4}(\tau_{zx} + \tau_{yz}) \\ (Sym.) & & & & & -\frac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_z) \end{bmatrix} \quad (26)$$

大歪大変形の問題は、最終的には曲線座標で取扱わなければならないが、Riceらのテンソル計算による、外力増分と変位増分の間の関係として、

$$\Delta \tilde{P}_L^N = (K_{LR}^{(1)NA} + K_{LR}^{(1)NA} + K_{LR}^{(1)NA} - \bar{Q}_{LR}^{NA}) \Delta \bar{u}_r^a \quad (27)$$

$$\text{ここで } K_{LR}^{(1)NA} = A_L^{BN} \left\{ \int \frac{\partial R_L^P}{\partial X} D_{ijkp} \frac{\partial R_L^N}{\partial X_p} dV^0 \right\} A_r^{aQ}$$

$$D_{ijkp} = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \right| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \frac{\partial X_p}{\partial x_m} \left\{ C_{mnkl} \frac{\partial X_s}{\partial x_l} + \sigma_{mn} \frac{\partial X_s}{\partial x_k} - \sigma_{mp} \frac{\partial X_s}{\partial x_l} - \sigma_{nk} \frac{\partial X_s}{\partial x_m} \right\} \Delta E_{rs} \quad (28)$$

$\bar{Q}_{LR}^{NA}$: 幾何剛性

C_{ijkl} : ひずみひずみにおける応力～ひずみ関係を与えるテンソル

$$K_{LR}^{(1)NA} = A_L^{BN} \left\{ \int S_{ij} \frac{\partial R_L^P}{\partial X_i} \frac{\partial R_L^N}{\partial X_j} dV^0 \right\} A_r^{aQ}$$

$$K_{LR}^{(1)NA} = A_L^{BN} \left\{ \int D_{ijkp} [A_r^{aM} \bar{u}_p^M \left(\frac{\partial R_L^P}{\partial X_k} \frac{\partial R_L^N}{\partial X_p} \frac{\partial R_L^P}{\partial X_j} + \frac{\partial R_L^P}{\partial X_p} \frac{\partial R_L^P}{\partial X_i} \frac{\partial R_L^N}{\partial X_j} \right) + \bar{u}_p^M \bar{u}_l^M A_l^{aM} A_p^{aP} \frac{\partial R_L^P}{\partial X_k} \frac{\partial R_L^N}{\partial X_p} \frac{\partial R_L^P}{\partial X_i} \frac{\partial R_L^N}{\partial X_j} \right] dV^0 \right\} A_r^{aQ}$$

$\Delta \tilde{P}_L^N$: 外力増分, $\Delta \tilde{U}_r^B$: 変位増分, S_{ij} : キルヒホフの応力, $\tilde{u}_L^M$: 変位

R_L^d と A_L^{dN} は, つぎの関係をみたす変位変換マトリックス

$$u_L = R_L^d(\bar{x}) A_L^{dN}(\bar{x}) \tilde{u}_L^N$$

x_L : 初期座標, x_L : 考えている時刻の座標, 節点に関連した全ての量に - が付されている。各記号の下添字は, 座標方向を表わし, 肩文字 N, M は 節点を表わす。

いま, 密度の変化 $|\frac{\partial \rho}{\partial x}| \approx 1$ として高次の項を無視すると, (28)式は

$$C_{ijrs}^* = C_{ijrs} + \sigma_{ij} \delta_{rs} - \frac{1}{2} (\sigma_{mk} \delta_{ln} + \sigma_{nl} \delta_{km} + \sigma_{nk} \delta_{lm} + \sigma_{nl} \delta_{km}) \quad (29)$$

ただし δ_{ij} : フロネッカーの δ

となり, 平面応力状態におけるキルヒホフの応力増分とクリーンのひずみ増分の関係は,

$$\begin{bmatrix} \Delta S_{11} \\ \Delta S_{22} \\ \Delta S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{1111} - (1+t_{31})\sigma_{11} & C'_{1122} + (1-t_{32})\sigma_{11} & C'_{1112} - \sigma_{12} \\ C'_{1122} + (1-t_{31})\sigma_{22} & C'_{2222} - (1+t_{32})\sigma_{22} & C'_{2212} - \sigma_{12} \\ C'_{1211} - t_{31}\sigma_{12} & C'_{1222} - t_{32}\sigma_{12} & C'_{1212} - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E_{11} \\ \Delta E_{22} \\ \Delta E_{12} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここで, C'_{ijkl} : 平面応力状態における応力マトリックス D の成分

$$t_{31} = \frac{C_{3311}}{C_{3333}}, \quad t_{32} = \frac{C_{3322}}{C_{3333}}$$

したがって, 上述と同じ表現になおすと,

$$D^P = \begin{bmatrix} -(1+t_{31})\sigma_x & (1-t_{32})\sigma_x & -\tau_{xy} \\ -(1-t_{31})\sigma_y & -(1+t_{32})\sigma_y & -\tau_{xy} \\ -t_{31}\tau_{xy} & -t_{32}\tau_{xy} & -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる, これを 3次元で表わすと,

$$D^P = \begin{bmatrix} -\sigma_x & \sigma_x & \sigma_x & -\tau_{xy} & 0 & -\tau_{zx} \\ \sigma_y & -\sigma_y & \sigma_y & -\tau_{xy} & -\tau_{yz} & 0 \\ \sigma_x & \sigma_x & -\sigma_x & 0 & -\tau_{yz} & -\tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) & 0 & -\frac{1}{2}(\tau_{zx} + \tau_{yz}) \\ \tau_{yz} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\tau_{yz} + \tau_{zx}) & -\frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) & 0 \\ 0 & \tau_{zx} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\tau_{yz} + \tau_{yz}) & -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_x) \end{bmatrix} \quad (32)$$

となる。

ひずみエネルギーを直接計算して求めた (21)式と変形を考慮した増分形仮想仕事法による (25)式はエネルギーの2次の項まで考えたもので, 形もほとんど一致している。違いは τ_{xy} に関する項で, ひずみエネルギーを求める際に, $\frac{\partial u}{\partial y}$ と $\frac{\partial v}{\partial x}$ の項を別々に計算するとより厳密となる。このようにすると, 上で示した D^P のような形には表示ができない。テンソル計算より求めた (30)式は, これから2つの式とは多少異なっている。しかし, 単純引張のような応力状態では, (25)式と同じ結果が得られる。

§4 計算例

今回は, 増分計算の検討として主に形状変化の影響を考察するために, 最も単純な例題として単純引張におけるくずれ発生現象を解析を行なおうとした。

単純引張において、くずれ現象を解析的に再現するためには、必ず形状変化の影響を考慮しなければならない。この種の研究としては、(31)式に相当するものを用いて最大荷重時までの挙動を考察しているものがある。⁽⁶⁾

ここでは、まず(25)式を用いて、長方形の引張試験片について、 y 方向に荷重を加えた場合を計算した。その結果、Fig. 2 に示した様に、途中から剛性マトリックスの determinant が大きくなり、最大荷重時を計算できない。これは、本来 σ_y のみに応力が存在するのであるが、計算の誤差で σ_x が多少とも出てくると、それが次第に累積されてしまう。

つぎに、同じ方法であるが、 σ_x の方向の計算誤差を無くすために、増分毎に $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ と置いて計算してみると、最大荷重まで計算できる。しかし、次式を直接積分した理論値

$$\Delta F = \frac{\Delta \sigma_y}{\Delta \sigma} \frac{EH'}{E+H'} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2\nu}{E} \right) \sigma_y \right\} V \quad (33)$$

ここで H' ; 塑性硬化率
とは大きくくい違っている。単純引張の時には、

$$\sigma_y > \frac{EH'}{E+H'}$$

を満足するところにくずれが発生することになっており、部分的には降荷も起こることになる。

そこで、変形後の状態を基にして、各節点の外力から要素の応力を直接計算してみる。仮想仕事式を用いれば、

$$F^T \delta = \sigma^T \epsilon V$$

であるから、応力を求めることができる。ただし、この場合は、新しい座標、板厚など全て増分を加えた後で、節点外力に必ずお釣合う応力を求めるのである。節点外力は、平面応力状態では 6 個の成分があり、応力成分は 3 個であるので、3 つの式を用いるだけでよく、

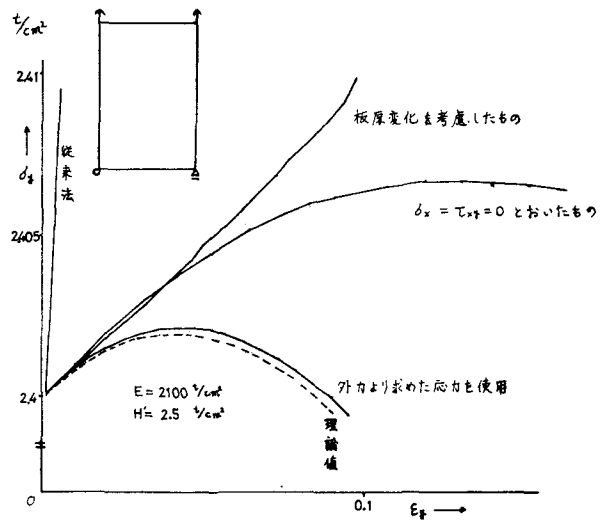


Fig. 2

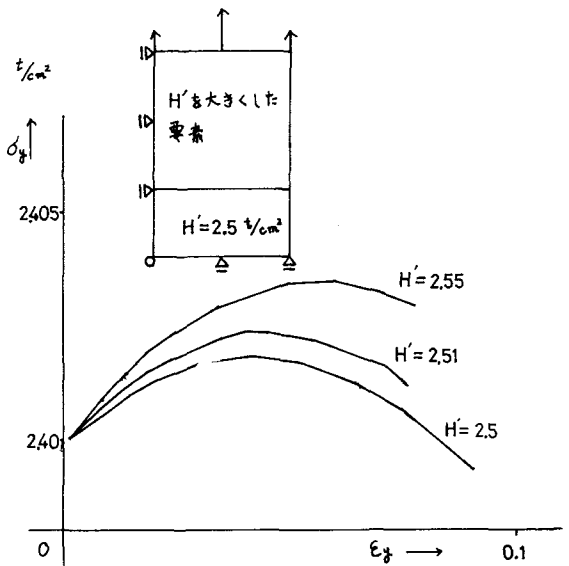


Fig. 3

$$\sigma^T = \{U_i, V_i, U_j\} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j \\ 0 & c_i & 0 \\ c_i & 0 & c_j \end{bmatrix}^{-1} \nabla \quad (34)$$

から応力は求まる。ただし、 $C_i=0$ の時には、節点外力として $\{U_i, V_i, U_m\}$ を用いなければならない。このようにして計算した応力は外力と釣り合っているので、 σ_x も σ_y もほとんど0のままの状態での増分の計算ができる。その結果は、(33)式の理論値ともよく一致した。

与え、終りに。

増分計算において、最大荷重を正確に求めるためには幾何剛性マトリックスと形状変化の影響を考慮しなければならない。今回とくに後者について単純な引張試験の解析を行なってみたが、最大荷重を求めることには種々の困難な点もあった。また、増分計算によって最大荷重時以後の挙動についても研究されることが望まれる。

なお、本研究で使用した電子計算機は東京大学大型計算機センター HITAC 8800である。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. and Cheung 吉識雅夫監訳/マトリックス有限要素法/培風館 昭和45年
- 2) Argyris, J.H. / Matrix Analysis of Three Dimensional Elastic Media Small and Large Displacement / AIAA Journal Vol.2 No.1 Jan. 1965
- 3) 山田嘉昭 / 非線形問題解法の現状と展望 / 生産研究 22巻1号 1970.1 P.6
- 4) 宮本博, 三好俊郎 / 延性破壊に関する研究 - 第1報 大変形の有限要素法によるき裂-ホイド合体の弾塑性解析 - / 日本機械学会講演論文集 No.710-10 P147
- 5) Hibbitt, H.D., Marcal, P.V. and Rice, J.R. / A Finite Element Formulation for Problems Large Strain and Large Displacement / Int. J. Solids Structures, 1970, Vol.6 P1069
- 6) Needleman, A. / A Numerical Study of Necking in Circular Cylindrical Bars / J. Mech. Phys. Solids, 1972, Vol.20 P.111
- 7) 瀬口靖幸 / 有限要素法による大変形大ひずみ解析の考え方 / 材料 Vol.22 No.237 June 1973 P586