非線形バネ承上板の有限要素法の収束について

中央大学理工学部　　川　原　睦　人
中央大学理工学部　○　大　坂　一

§1．諸言

有限要素法による構造解析は近年ますますその重要さを増してきている。しかし，有限要素法は多くの仮定の上に成立している近似解法である。ともすると，基本的な仮定を忘れて，適用範囲を大きくはずれた計算を行なう心配がある。線形で比較的形の整った構造を扱う場合，正解に非常に近い解を得るが，形が不規則な場合，非線形の場合などでは正解と大巾に異なった解を得ることがあることを経験する。また非線形問題では，何らかの形でくり返し計算をする必要がある。この時，くり返し計算の方法によっては収束しない場合があることを経験する。有限要素法の近似解の正解への収束性および誤差の評価は形状関数，要素分割の方法に大きく影響される。またくり返し計算の収束性は，初期値のとり方と連立方程式の性質に影響される。

ここでは，非線形バネ承上の板について，近似解の正解への収束性，ならびにニュートンラプソン法によるくり返し計算の収束性について検討し，実際の計算を行う場合の指針を得ることを目的とする。なお数式はすべて添字記法を用い，総和規約にしたがって表わしている。

§2．非線形バネ承上板の変分

一般にドッグ等のバネ承上板はバネ反力として $-kw$（k；バネ定数，w；変位）を使用して解析されているが，実験[1]により実際のバネ反力は $-kw$ より $-k\sqrt{w}$ に近いことが確かめられている。ここでは $-k\sqrt{w}$ を $f(w)$ と一般化し，この非線形バネを用いた非線形バネ承上板の変分問題について述べる。（一次元問題については[2]参照）

非線形バネ承上板の基礎方程式は次の形で表現される。

$$EI\,w_{,iijj} = P - f(w) \tag{1-1}$$

ここで w は領域 Ω 上の変位で各記号の意味は次のとおりである。

E；ヤング率，I；断面二次モーメント，P；荷重

$w_{,1}$ は x に関する偏微分，$w_{,2}$ は y に関する偏微分

又，簡単のため領域 Ω の境界は折線であり，境界条件は同次境界条件とする。さらにバネ反力 $f(w)$ は連続関数で，その特性として次の条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} &f(0) = 0 \\ &\gamma \le f'(\eta) \le P \qquad ;\ \gamma > 0,\ f' \text{ は } f \text{ の微分} \end{aligned} \tag{1-2}$$

基礎方程式 (1-1) の変分式 $F(\omega)$ は (1-3) 式になる。

$$F(\omega)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}EI\omega_{,ii}\omega_{,jj}-P\omega+\int_{0}^{\omega}f(\eta)d\eta\right)dA \tag{1-3}$$

(1-3) 式に ω の微小変分 $\delta\omega$ を加え整理すると (1-4) 式が得られる。

$$F(\omega+\delta\omega)=F(\omega)+\int_{\Omega}\left(EI\omega_{,ii}\delta\omega_{,jj}-P\delta\omega+\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}f(\eta)d\eta+\frac{1}{2}EI\delta\omega_{,ii}\delta\omega_{,jj}\right)dA \tag{1-4}$$

(1-4)式の右辺第2項を2回部分積分すると同次境界条件より,

$$\int_{\Omega}EI\omega_{,ii}\delta\omega_{,jj}dA=\int_{\Omega}EI\omega_{,iijj}\delta\omega dA \tag{1-5}$$

が得られ，又第4項は次のように変形できる。

$$\int_{\Omega}^{\omega+\delta\omega}f(\eta)d\eta=\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}(f(\eta)-f(\omega))d\eta+f(\omega)\delta\omega \tag{1-6}$$

(1-5), (1-6) 式を (1-4) 式に代入することによって次式を得る。

$$\begin{aligned}F(\omega+\delta\omega)&=F(\omega)+\delta F(\omega)+\delta^2F(\omega)\\ \delta F(\omega)&=\int_{\Omega}(EI\omega_{,iijj}-P+f(\omega))\delta\omega dA\\ \delta^2F(\omega)&=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}EI(\delta\omega_{,ii})^2+\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}(f(\eta)-f(\omega))d\eta\right)dA\end{aligned} \tag{1-7}$$

第2変分の2項目は $f(\eta)$ に平均値の定理を適用すると，バネ反力の条件 (1-2) より

$$\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}(f(\eta)-f(\omega))d\eta=\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}f'(\xi)(\eta-\omega)d\eta \begin{array}{l}\leq\frac{1}{2}P(\xi)(\delta\omega)^2\\ \geq\frac{1}{2}\gamma(\delta\omega)^2\end{array} \qquad \eta<\xi<$$

を得る。これより第2変分の評価式が得られる。

$$0\leq\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}EI(\delta\omega_{,ii})^2+\frac{1}{2}\gamma(\delta\omega)^2\right)dA\leq\delta^2F(\omega)\leq\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}EI(\delta\omega_{,ii})^2+\frac{1}{2}P(\delta\omega)^2\right)dA \tag{1-8}$$

$\delta^2F(\omega)=0$ は $\delta\omega=0$ の時のみに成立

以上より，(1-7)式は $\delta^2F(\omega)\geq0$ であり，$\delta F(\omega)=0$ より (1-1)式を得る。すなわち (1-3)式は (1-1)式に対する変分式となっている。(1-1) 式の正解 ω_0 を(1-7) 式に代入し，(1-8)式を使用すると (1-9) (1-10)式が成立する。ここで $\tilde{\omega}$ は同次境界条件を満足する任意の関数で $\delta\omega=\tilde{\omega}-\omega_0$ とする。

$$F(\tilde{\omega})-F(\omega_0)\leq\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}EI(\tilde{\omega}_{,ii}-\omega_{0,ii})^2+\frac{1}{2}P(\tilde{\omega}-\omega_0)^2\right)dA \tag{1-9}$$

$$F(\tilde{\omega})-F(\omega_0)\geq\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}EI(\tilde{\omega}_{,ii}-\omega_{0,ii})^2+\frac{1}{2}\gamma(\tilde{\omega}-\omega_0)^2\right)dA \tag{1-10}$$

(1-9)式は収束性及び誤差の評価に対する基本式である。一方 (1-10) 式はエネルギー誤差 $F(\tilde{\omega})-F(\omega_0)$ から $\tilde{\omega}-\omega_0$ を評価する式を与える。(1-9) 式については§3. で述べるので，ここでは (1-10)式から $\tilde{\omega}-\omega_0$ の評価式を導く。同次境界条件に対する重調和方程式の最小固有値を $\lambda>0$ とすると，

$$\lambda=\inf\frac{\int_{\Omega}(\omega_{,ii})^2dA}{\int_{\Omega}\omega^2dA}, \qquad \int_{\Omega}\frac{1}{2}EI(\omega_{,ii})^2dA\geq\frac{1}{2}EI\lambda\int_{\Omega}\omega^2dA$$

が得られ，これを(1-10)に代入することにより次式を得る。

$$F(\tilde{\omega})-F(\omega_0) \geqq \left(\frac{1}{2}EI\lambda+\frac{1}{2}\gamma\right)\int_{\Omega}(\tilde{\omega}-\omega_0)^2\,dA \qquad (1\text{-}11)$$

故にエネルギー誤差がわかれば(1-11)式より $\int_{\Omega}(\tilde{\omega}-\omega_0)^2dA$ が評価できる。これは L_2 ノルムによる誤差の評価である。

§3. 関数の誤差と近似解の収束

一般に誤差とは真の値と近似値の2点間の距離を示している。ここでは関数間の距離の定義及び L_2 空間，ソボレフ空間の説明を行ない，さらに非線形バネ床上板の有限要素法による近似解の正解への収束条件を求める。

関数間の距離は種々の定義があるが，ここでは関数の間で，加算，スカラー積ができることからノルム(‖ ‖)によって距離を定義($d(u,v)=\|u-v\|$)する。以下に3つのノルムを定義し，一次元の場合について図で説明する。

1) 最大ノルム　最大ノルムによる誤差は真解と近似解の差の最大値を示し，次のように定義される。(図-1, a)

$$\|u\|_{max}=\max_{P\in\Omega}|u(P)|$$

Ω は u の定義域

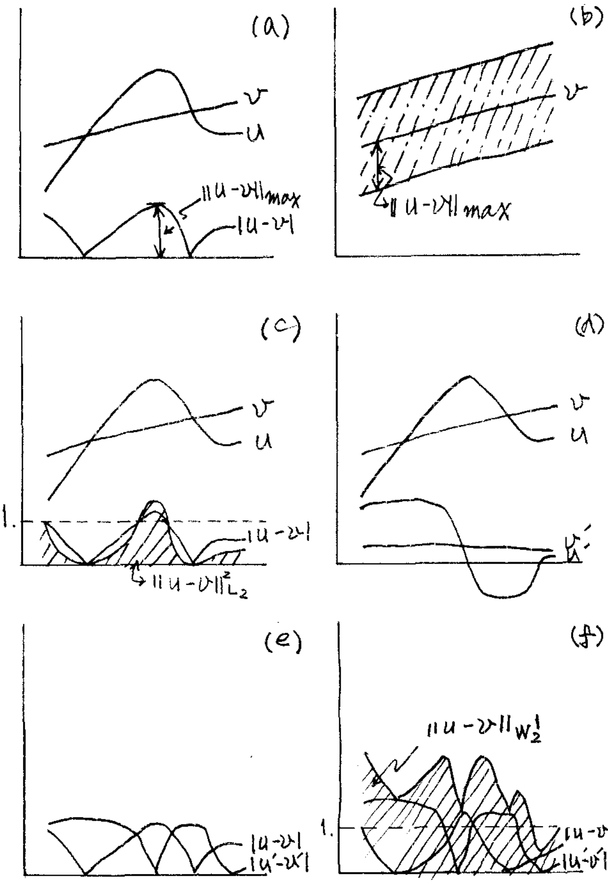
この誤差は関数の差の局所的性質を示しており，最も理解しやすい。又最大ノルムによる誤差と近似解から正解の存在領域を知ることができる。しかし，この誤差を求めるのは困難である。(図-1, b)

2) L_2 ノルム　L_2 ノルムは次式で与えられ，これによる誤差は関数の差の大局的性質を示している。

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u|^2dA\right)^{1/2}$$

この量は関数の差の体積に近い量であるが，差を自乗することにより体積より局所的性質を示している。(図-1, c)

3) ソボレフノルム　ソボレフノルムによる誤差は L_2 ノルムの概念をさらに正解と近似解の微分にまで拡張したものである。



u; 正解　v; 近似解

図-1

W_2^k で k 階までの微分を考えることを示し，次のように定義される。(図-1, d, e, f)

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \Big(\sum_{\alpha=0}^{k} \big(\sum_{|i|=\alpha} \int_\Omega (D^i u)^2 dA \big) \Big)^{1/2}$$

ここで i は整数の対 (i_1, i_2) を表わし，$D^i u = \dfrac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}}$，$|i| = i_1 + i_2$ を意味する。

$L_2(\Omega)$空間は L_2 ノルムが有界な（$\int_\Omega u^2 dA$ が定義できて有限の値をとること†）関数全体のことをいい，ソボレフ空間 $W_2^k(\Omega)$ とは k 階までのすべての微分又は偏微分 $D^\alpha u$ に対し $\int_\Omega (D^\alpha u)^2 dA$ が有界な関数全体をいう。この時階段関数は $L_2(\Omega)$ に含まれるが δ 関数は $L_2(\Omega)$空間に含まれない†。また，これより階段関数は $W_2^1(\Omega)$ に含まれないことがわかる。

非線形バネ承上板の変分 (1-3) 式に戻ってみると，変分が存在するためにはまず $\omega_{,ii}$ が $L_2(\Omega)$ に含まれていなければならないことがわかる。又バネ反力の項は $f(\eta)$ の条件 (1-2) より $\int_\Omega \int_0^\omega f(\eta) d\eta dA$ があれば ω は $L_2(\Omega)$ に含まれており，又 ω が $L_2(\Omega)$ に含まれていれば $\int_\Omega (\int_0^\omega f(\eta) d\eta) dA$ は存在する。これより，$F(\omega)$ が定義できる関数は $\omega \in L_2(\Omega)$，$\omega_{,ii} \in L_2(\Omega)$ であることがわかる。以上より有限要素法において $\bar{\omega} = \omega_\alpha \Phi_\alpha$（$\omega_\alpha$; 一般化変位，$\Phi_\alpha$ 形状関数）とした時に $\bar{\omega}$ が真の解に収束するためには $\bar{\omega} \in L_2(\Omega)$，$\bar{\omega}_{,ii} \in L_2(\Omega)$ が必要となる。Φ_α として 3 次の完全多項式を使用すると，法線方向微分 $\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \nu}$ は要素と要素間の線分上で不連続となる，すなわち階段関数となるため $\Phi_{\alpha,ii}$ は δ 関数を含み $\bar{\omega}_{,ii} \in L_2(\Omega)$ の条件を満足しない。故に形状関数として 3 次の多項式は不適当である。そこで $\bar{\omega}_{,ii} \in L_2(\Omega)$ となるために必要な形状関数 Φ_α（完全多項式）の条件を求める。Zeníšek [3] の定理 1 を修正することにより次の定理 1 を得る。領域 Ω を三角形 T_λ $(\lambda = 1, \cdots, s)$ に分割し，各三角形において頂点を P_j $(j = 1, 2, 3)$，辺を l_j $(j = 1, 2, 3)$，l_j に対する法線ベクトルを ν_j とする。辺 l_j を $(r+1)$ 等分する点を $Q_j^{(\alpha, r)}$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$ とする。

定理 1．整数 $m \geq 0$，$k \geq 0$ に対し，関数 u が全領域 Ω において $(m+k)$ 階までの微分が連続であり，各三角形 T_λ 上で $n = 2(m+k)+1$ 次の完全多項式 P_λ が存在し，次の 2 つの条件が満足されるとする。この時関数 $g(x, y) = P_\lambda(x, y)$ $(x, y) \in T_\lambda$ は Ω 上で m 階までの微分が連続となる。

(1) $\quad D^i P_\lambda(P_j) = D^i u(P_j) \qquad |i| \leq m+k \qquad j = 1, 2, 3$

(2) $\quad \dfrac{\partial^r P_\lambda(Q_j^{(\alpha, r)})}{\partial \nu_j^r} = \dfrac{\partial^r u(Q_j^{(\alpha, r)})}{\partial \nu_j^r} \qquad \alpha = 1, 2, \cdots r \quad r = 1, 2, \cdots m \quad j = 1, 2, 3$

条件 (1), (2) の個数を計算すると，(1) より各点で $\frac{1}{2}(m+k+1)(m+k+2)$，(2) より各辺で $\frac{1}{2}m(m+1)$ となることから，総数は

$$3m^2 + 3mk + 6m + 3 + \frac{3}{2}k(k+3) \tag{3-1}$$

となる。一方 n 次の完全多項式の係数の個数は $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ であることから P_λ の係数は次式である。

$$2m^2 + 4mk + 2k^2 + 5m + 5k + 3 \tag{3-2}$$

ここで $m = 1$，$k = 0$ とすると $n = 3$ であるが (3-1) は 12，(3-2) は 9 となり，条件 (1) (2) を満足しな

† $\int_\Omega u^2 dA$ 定義できるということは u^2 がルベーグ積分可能であることを意味し，積分領域を開集合に分割して，個々の開集合上の積分値の和が全領域の積分値と等しいことを要求する。このことよりデルタ関数 $\delta(1/2)$ は $\int_0^1 \delta(\frac{1}{2}) dx = 1$，$\int_0^{1/2-\varepsilon} \delta(1/2) dx = 0$，$\int_{1/2+\varepsilon}^1 \delta(1/2) dx = 0$ より $\int_0^1 \delta(1/2) dx \neq \lim_{\varepsilon \to 0} \big(\int_0^{1/2-\varepsilon} \delta(\frac{1}{2}) dx + \int_{1/2+\varepsilon}^1 \delta(\frac{1}{2}) dx \big)$ となるので $\delta(1/2) \notin L_2([0, 1])$ がわかる。

い。しかし $m=1$, $k=1$ とすると, $n=5$ で (3-1) は 21, (3-2) は 21, となり, 条件 (1), (2) を満足する5次の多項式が存在する。さらにこの時 P_λ ((1), (2) を満足する) は唯一つである。以上より, 一般化変化 ω_α として定理1の (1), (2) ととると, 形状関数は完全5次多項式となり, $D^i \Phi_\alpha$ $|i|\le 1$ は全領域で連続となる。さらに2階の偏微分 $D^i\Phi_\alpha$ $|i|=2$ は階段関数となる。すなわち $\Phi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\Phi_{\alpha,ii} \in L_2(\Omega)$ となるので $\bar{\omega}=\omega_\alpha\Phi_\alpha$ に対しても $\bar{\omega}\in L_2(\Omega)$, $\bar{\omega}_{,ii}\in L_2(\Omega)$ となる。さらに $\bar{\omega}\in W_2^2(\Omega)$ も明らか。

次に上で与えた5次の形状関数を使用した時, 近似解が正解へ収束することを証明する。このために次の定理2 (Bramble-Zlamal [4]) を使用する。

定理2. $u\in W_2^k(\Omega)$ $2m+2\le k\le 4m+2$ に対して条件 (3), (4), (5) を満足する $4m+1$ 次の多項式 P_λ が各三角形 T_λ 上で存在し, 任意の n, $0\le n\le k$ に対し次の式が成立する。

$$\|u-P_\lambda\|_{n,T_\lambda}\le K\frac{c_\lambda^{k-n}}{(\sin\alpha_\lambda)^{m+n}}|u|_{k,T_\lambda}$$

ここで K は三角形 T_λ, 関数 u に無関係な定数, c_λ は T_λ の最大辺の長さ, α_λ は最小角。

又 $$\|u-P_\lambda\|_{n,T_\lambda}=\left(\sum_{|j|=0}^{n}\left(\int_{T_\lambda}(D^j u)^2 dA\right)\right)^{1/2}\qquad |u|_{k,T_\lambda}=\left(\sum_{|j|=k}\left(\int_{T_\lambda}(D^j u)^2 dA\right)\right)^{1/2}$$

(3) $D^i P_\lambda(P_j)=D^i u(P_j)$ $\quad |i|\le 2m$, $j=1,2,3$

(4) $\dfrac{\partial^r P_\lambda(Q_j^{(\alpha,r)})}{\partial\nu^r}=\dfrac{\partial^r u(Q_j^{(\alpha,r)})}{\partial\nu^r}$ $\quad \alpha=1,2,\cdots r$, $r=1,2,\cdots m$, $J=1,2,3$

(5) $D^i P_\lambda(P_0)=D^i u(P_0)$ $\quad |i|\le m-2$ $\quad P_0$ は三角形の重心.

ここで $m=1$, $k=2m+2=4$, $n=2$ の場合に適用すると条件 (5) は不要となり, (3), (4) は定理1の (1), (2) と等しくなることから, $\omega\in W_2^4(\Omega)$ であれば一般化変位 $\tilde{\omega}_\alpha$ を正解と一致するようにとった関数 $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_\alpha\Phi_\alpha$ に対し次の定理2より, 次の式が成立する。

$$\|\omega-\tilde{\omega}\|^2_{2,T_\lambda}=\leqq K^2\frac{c_\lambda^4}{(\sin\alpha_\lambda)^6}|\omega|^2_{4,T_\lambda}\tag{3-3}$$

有限要素法によって近似解を求めることは, 変分 (1-3) を $\omega=\omega_\alpha\Phi_\alpha$ を代入して変分を最小とするように ω_α を決定することである。このことからその解を ω_α^*, $\omega^*=\omega_\alpha^*\Phi_\alpha$ とすると (3-4) が成立する。

$$F(\omega^*)-F(\omega_0)\le F(\tilde{\omega})-F(\omega_0)\le\int_\Omega\left(\tfrac{1}{2}EI(\tilde{\omega}_{,ii}-\omega_{0,ii})^2+\tfrac{1}{2}P(\tilde{\omega}-\omega_0)^2\right)dA\tag{3-4}$$

(3-4) 式の右辺第一項に Schwarz の不等式を使用すると

$$\int_\Omega\frac{1}{2}EI(\tilde{\omega}_{,ii}-\omega_{0,ii})^2 dA\leqq\frac{1}{2}EI\left\{\left(\int_\Omega(\tilde{\omega}_{,11}-\omega_{0,11})^2dA\right)^{1/2}+\left(\int_\Omega(\tilde{\omega}_{,22}-\omega_{0,22})^2dA\right)^{1/2}\right\}$$
$$\leqq EI\left\{\int_\Omega(\tilde{\omega}_{,11}-\omega_{0,11})^2dA+\int_\Omega(\tilde{\omega}_{,22}-\omega_{0,22})^2dA\right\}\le EI|\tilde{\omega}-\omega_0|^2_{2,\Omega}$$

となるので (3-4) 式の右辺は

$$F(\omega^*)-F(\omega_0)\le EI|\tilde{\omega}-\omega_0|^2_{2,\Omega}+\tfrac{1}{2}P|\tilde{\omega}-\omega_0|^2_{0,\Omega}\le C\|\tilde{\omega}-\omega_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}\tag{3-5}$$

となる。ここで $C=\max(EI,\tfrac{1}{2}P)$

この時 $\tilde{\omega}$, $\omega_0\in W_2^2(\Omega)$ であるから (3-5) 式は積分領域を各三角形 T_λ ($\lambda=1,\cdots S$) に分割することがで

きることから(3-3)式を使用すると(3-5)の右辺は

$$C\|\tilde{\omega}-\omega_0\|^2_{2,\Omega}=C\sum_{\lambda=1}^{S}\|\tilde{\omega}-\omega_0\|^2_{2,T_\lambda}\leq C\sum_{\lambda=1}^{S}K^2\frac{c_\lambda^4}{(\sin\alpha_\lambda)^6}|u|^2_{4,T_\lambda}\leq CK^2\frac{\ell^4}{(\sin\alpha)^6}|u|^2_{4,\Omega}$$

$$\ell=\max c_\lambda \quad \alpha=\min\alpha_\lambda$$

が得られる。故に α が 0 にならないように三角形分割を細分して $\ell\to 0$ となるようにすると，(3-4)式より $F(\omega^*)-F(\omega_0)$ は 0 へ収束する。

よって(1-11)式より，$\omega_0\in W_2^4(\Omega)$ で Φ_α として5次の形状関数を使用すれば，$\|\omega^*-\omega_0\|_{L_2(\Omega)}$ の意味で有限要素法による近似解は正解へ収束する。$W_0\in W_2^4(\Omega)$ という条件は，$w_{0,iijj}\in L_2(\Omega)$ を必要とする。ところが集中荷重に対しては，集中荷重が $P\delta(x_0)\delta(y_0)$ とデルタ関数で表わされることと，基礎式(1-1)より，$W_{0,iijj}$ は $L_2(\Omega)$ に含まれないことがわかる。このことより節点荷重に対する有限要素法の収束性は保証されず，なるべくなら分布荷重で計算した方がよい。これと同様にして節点バネによるバネ承け板問題の解析は正解への収束が保証されない。

§4. 有限要素法による定式化とニュートンラプソン法の収束性

$\omega=\omega_\alpha\Phi_\alpha$ を(1-3)式に代入し，$\frac{\partial F(\omega)}{\partial\omega_\alpha}=0$ とすることにより，基礎方程式(1-1)に対する有限要素法の定式化(4-1)式を得る。

$$\begin{aligned}&Y_\alpha(\omega)=M_{\alpha\beta}\omega_\beta-P_\alpha+F_\alpha(\omega)=0\\&\quad M_{\alpha\beta}=EI\int_\Omega\Phi_{\alpha,ii}\Phi_{\beta,jj}\,dA\quad P_\alpha=\int_\Omega P\,\Phi_\alpha\,dA\quad F_\alpha(\omega)=\frac{\partial}{\partial\omega_\alpha}\left(\int_\Omega\int_0^{\omega_\beta\Phi_\beta}f(\eta)\,d\eta\,dA\right)\end{aligned}\tag{4-1}$$

ここで $F_\alpha(\omega)$ の具体的な形を求める。$f(\eta)$ の不定積分を $g(\eta)$ とすると，

$$\begin{aligned}F_\alpha(\omega)&=\frac{\partial}{\partial\omega_\alpha}\left(\int_\Omega\left(\int_0^{\omega_\beta\Phi_\beta}f(\eta)\,d\eta\right)dA\right)=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial\omega_\alpha}\left(g(\omega_\beta\Phi_\beta)-g(0)\right)dA\\&=\int_\Omega\frac{\partial\omega_\beta\Phi_\beta}{\partial\omega_\alpha}\frac{d\,g(\omega)}{d\omega}\,dA=\int_\Omega f(\omega)\Phi_\alpha\,dA\end{aligned}\tag{4-2}$$

となる。(4-1)式にニュートンラプソン法を適用する。n 回目の答を $\omega_\alpha^{(n)}$ $\omega^{(n)}=\omega_\alpha^{(n)}\Phi_\alpha$ とすると，

$$-Y_\alpha(\omega^{(n)})=\frac{\partial Y_\alpha(\omega^{(n)})}{\partial\omega_\beta}\left(\omega_\beta^{(n+1)}-\omega_\beta^{(n)}\right)$$

より，ニュートンラプソン法による収束計算の定式化は(4-3)式となる。

$$G_{\alpha\beta}(\omega^{(n)})\left(\omega^{(n+1)}-\omega^{(n)}\right)=-M_{\alpha\beta}\omega_\beta^{(n)}+P_\alpha-F_\alpha(\omega^{(n)})\ ,\ G_{\alpha\beta}(\omega^{(n)})=\frac{\partial Y_\alpha(\omega^{(n)})}{\partial\omega_\beta}\tag{4-3}$$

$G_{\alpha\beta}(\omega^{(n)})$ を求めると(4-2)式より，

$$G_{\alpha\beta}(\omega^{(n)})=M_{\alpha\beta}+\hat{F}_{\alpha\beta}(\omega^{(n)})\quad,\ \hat{F}_{\alpha\beta}(\omega^{(n)})=\int_\Omega f'(\omega^{(n)})\Phi_\alpha\Phi_\beta\,dA\tag{4-4}$$

ここで添字記法をマトリックス，ベクトルの形に変換すると(4-3)式は(4-5)式となる。($M=M_{\alpha\beta}$, $\omega=\omega_\alpha$ 等)

$$G(\omega^{(n)})\left(\omega^{(n+1)}-\omega^{(n)}\right)=-M\,\omega^{(n)}+P-F(\omega^{(n)})\ ,\ G(\omega^{(n)})=M+\hat{F}(\omega^{(n)})\tag{4-5}$$

ニュートンラプソン法による収束性を調べるため $x^{(n)}=\omega^{(n+1)}-\omega^{(n)}$ として，(4-5) の n 回目から $n-1$ 回目を引くと，

$$G(\omega^{(n)})x^{(n)} = G(\omega^{(n-1)})x^{(n-1)} - Mx^{(n-1)} - \mathbb{F}(\omega^{(n)}) + \mathbb{F}(\omega^{(n-1)})$$

となる。この式に (4-4) 式を代入して整理すると (4-6) 式となる。

$$x^{(n)} = G^{-1}(\omega^{(n)})\left(\hat{F}(\omega^{(n-1)})x^{(n-1)} - \mathbb{F}(\omega^{(n)}) + \mathbb{F}(\omega^{(n-1)})\right) \qquad (4\text{-}6)$$

$\|x^{(n)}\| = \left((\omega_\alpha^{(n+1)}-\omega_\alpha^{(n)})(\omega_\alpha^{(n+1)}-\omega_\alpha^{(n)})\right)^{1/2}$ をベクトルのユークリッドノルム，$\|A\|^2$ をマトリックス A の最大固有値とすると $\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$ となることより，(4-6) 式のノルムによる評価は (4-7) 式となる。

$$\|x^{(n)}\| \le \|G^{-1}(\omega^{(n)})\|\,\|\hat{F}(\omega^{(n-1)})x^{(n-1)} - \mathbb{F}(\omega^{(n)}) + \mathbb{F}(\omega^{(n-1)})\| \qquad (4\text{-}7)$$

(4-7)式は $\|\hat{F}(\omega)M^{-1}\|<1$ なら有限な定数 C_1 が存在して (4-8) が成立する。ただし $\omega_\alpha^{(0)}$ は初期値。

$$\|x^{(n)}\| \le C_1\|x^{(n-1)}\|^2 \le \cdots \le (C_1\|x^{(0)}\|)^{2^n}/C_1 = \left(C_1\|G^{-1}(\omega_\alpha^{(0)})\Upsilon(\omega_\alpha^{(0)})\|\right)^{2^n}/C_1 \qquad (4\text{-}8)$$

よって $\omega^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n}x^{(k)}$ より，$\|\hat{F}(\omega)M^{-1}\|<1$ であり，$|C_1\|G^{-1}(\omega_\alpha^{(0)})\Upsilon(\omega_\alpha^{(0)})\||<1$ であれば (4-1) は収束する。

C_1 を求めるために次の補題を使用する。

補題．形状関数の絶対値の和は有界である。$\sum_\alpha|\Phi_\alpha|<K$

(4-7) 式の右辺第二項を表わすと，

$$\begin{aligned}
\|\hat{F}(\omega^{(n-1)})x^{(n-1)} - \mathbb{F}(\omega^{(n)}) + \mathbb{F}(\omega^{(n-1)})\| &\le \left(\sum_\alpha\left(\hat{F}_{\alpha\beta}(\omega^{(n-1)})x_\beta^{(n-1)} - F_\alpha(\omega^{(n)}) + F_\alpha(\omega^{(n-1)})\right)^2\right)^{1/2}\\
&= \left(\sum_\alpha\left(\int_\Omega\left(f'(\omega^{(n-1)})(\omega_\beta^{(n)}-\omega_\beta^{(n-1)})\Phi_\beta - f(\omega^{(n)}) + f(\omega^{(n-1)})\right)\Phi_\alpha dA\right)^2\right)^{1/2}\\
&\le \left(\sum_\alpha\left(\int_\Omega\left|f'(\omega^{(n-1)})(\omega^{(n)}-\omega^{(n-1)}) - f(\omega^{(n)}) + f(\omega^{(n-1)})\right||\Phi_\alpha|\, dA\right)^2\right)^{1/2}
\end{aligned} \qquad (4\text{-}9)$$

となる。ところがバネ反力 $f(\eta)$ に $|f''(\eta)|<P_2$ という条件を付加すると，$\omega^{(n-1)}$ におけるテーラー展開 (4-10) を得るので (4-11) 式が成立する。

$$f(\omega^{(n)}) = f(\omega^{(n-1)}) + f'(\omega^{(n-1)})(\omega^{(n)}-\omega^{(n-1)}) + f''(\xi)(\xi-\omega^{(n-1)})^2,\ |\omega^{(n-1)}-\omega^{(n)}| \ge |\xi-\omega^{(n-1)}| \qquad (4\text{-}10)$$

$$|f'(\omega^{(n-1)})(\omega^{(n)}-\omega^{(n-1)}) - f(\omega^{(n)}) + f(\omega^{(n-1)})| \le P_2|x_\beta^{(n-1)}||x_\gamma^{(n-1)}||\Phi_\beta||\Phi_\gamma| \qquad (4\text{-}11)$$

よって (4-9) 式は次の形で表わされる。

$$\|\hat{F}(\omega^{(n-1)})x^{(n-1)} - \mathbb{F}(\omega^{(n)}) + \mathbb{F}(\omega^{(n-1)})\| \le P_2\left(\sum_\alpha\left(|x_\beta^{(n-1)}||x_\gamma^{(n-1)}|\int_\Omega|\Phi_\beta||\Phi_\gamma||\Phi_\alpha|\, dA\right)^2\right)^{1/2} \qquad (4\text{-}12)$$

ここで補題より次の式が成立することから，(4-13), (4-14) が成立する。

$$\sup\frac{|x_\beta||x_\gamma|\int_\Omega|\Phi_\beta||\Phi_\gamma||\Phi_\alpha|\, dA}{x_\delta x_\delta} \le \sup\frac{x_\gamma\max(x_\beta)\int(\sum_\beta|\Phi_\beta|)|\Phi_\gamma||\Phi_\alpha|\, dA}{x^\delta x^\delta} \le \frac{(\max(x_\beta))^2\int(\sum|\Phi_\beta|)^2|\Phi_\alpha|\, dA}{(\max x_\beta)^2} \le K^2\int_\Omega|\Phi_\alpha|\, dA$$

$$|x_\beta^{(n-1)}||x_\gamma^{(n-1)}|\int_\Omega|\Phi_\beta||\Phi_\gamma||\Phi_\alpha|\, dA \le K^2\|x^{(n-1)}\|^2\int_\Omega|\Phi_\alpha|\, dA \qquad (4\text{-}13)$$

$$\|\hat{F}(\omega^{(n-1)})x^{(n-1)} - \mathbb{F}(\omega^{(n)}) + \mathbb{F}(\omega^{(n-1)})\| \le P_2K^2\|x^{(n-1)}\|^2\left(\sum_\alpha\left(\int_\Omega|\Phi_\alpha|\, dA\right)^2\right)^{1/2} \le P_2K^3|\Omega|\,\|x^{(n-1)}\|^2 \qquad (4\text{-}14)$$

$|\Omega|$ は Ω の面積

一方 $\|G^{-1}(\omega^{(n)})\|$ は次のように変形され，

$$\|G^{-1}(\omega^{(n)})\| = \|(M+\hat{F}(\omega^{(n)}))^{-1}\| = \|M^{-1}(I+\hat{F}(\omega^{(n)})M^{-1})^{-1}\| \leq \|M^{-1}\|\,\|(I+\hat{F}(\omega^{(n)})M^{-1})^{-1}\| \qquad I \text{ は単位行列}$$

さらに $(I+A)^{-1}$ を展開すると $I+(A)+(-A)^2+\cdots+(-A)^n\cdots$ となることから $\|A\|<1$ なら $\|(I+A)^{-1}\| \leq 1/(1+\|A\|)$ を得る。故に $\|\hat{F}(\omega^{(n)})M^{-1}\|<1$ なら $\|G^{-1}(\omega^{(n)})\| \leq \|M^{-1}\|/(1+\|\hat{F}(\omega^{(n)})M^{-1}\|)$ となる。M^{-1} と $\hat{F}(\omega)$ の最大固有値を求める。M^{-1} の最大固有値が M の最小固有値分の1であるから，

$$\inf \frac{M_{\beta\gamma}\omega_\beta\omega_\gamma}{\omega_\alpha\omega_\alpha} \geq \inf \frac{\int_\Omega \omega_\beta\omega_\gamma \Phi_\beta \Phi_\gamma\, dA}{\omega_\alpha\omega_\alpha} \cdot \inf \frac{EI\int_\Omega \omega_{,ii}\, dA}{\int_\Omega \omega^2\, dA} = EIt\lambda \quad t = \inf \frac{\int_\Omega \omega^2 dA}{\omega_\alpha\omega_\alpha} > 0,\ \lambda = \inf \frac{\int_\Omega \omega_{,ii}^2 dA}{\int_\Omega \omega^2 dA} > 0$$

より $\|M^{-1}\|^2 \leq 1/EIt\lambda$ を得る。又補題及びバネ反力の条件 (1-2) より

$$\|\hat{F}(\omega^{(n)})\| = \sup \frac{\hat{F}_{\beta\gamma}(\omega)\omega_\beta\omega_\gamma}{\omega_\alpha\omega_\alpha} \leq \sup \frac{\int_\Omega |\omega_\beta\omega_\gamma|\,|\Phi_\beta|\,|\Phi_\gamma|\, dA}{\omega_\alpha\omega_\alpha} \cdot \sup \frac{\int_\Omega f'(\omega)\,\omega^2 dA}{\int_\Omega \omega^2 dA} \leq K^2 \Gamma |\Omega|$$

を得る。以上より (4-7) の右辺は (4-15) 式が成立するとき (4-16) となる。

$$\|\hat{F}(\omega^{(n)})M^{-1}\| \leq \|\hat{F}(\omega^{(n)})\|\,\|M^{-1}\| \leq \sqrt{\frac{K^2\Gamma|\Omega|}{t\lambda EI}} \leq 1 \tag{4-15}$$

$$\|x^{(n)}\| \leq \sqrt{t\lambda EI} \Big/ \left(1+\sqrt{\frac{K^2\Gamma|\Omega|}{t\lambda EI}}\right) \cdot \Gamma_2 K^3 |\Omega|\, \|x^{(n-1)}\|^2 \tag{4-16}$$

すなわち

$$\frac{\Gamma}{EI} \leqq \frac{t\lambda}{K^2|\Omega|} \tag{4-17}$$

であれば，C_1 が存在し，初期値 ω_0° が (4-18) 式を満足すればニュートンラフソンは収束する。

$$\|\Upsilon(\omega_0^\circ)\| \leqq \left(\sqrt{t\lambda EI}+\sqrt{K^2\Gamma|\Omega|}\right)^2 \Big/ \Gamma_2 K^3 \tag{4-18}$$

§5. 結言

以上のことから次のことがわかる。

§3 における議論は非線形バネ承上板の問題に限らず，一般の板の曲げ問題に対しても成立する。曲げ問題に対しては形状関数として5次の多項式を使用し，節点バネ，節点荷重より，分布バネ，分布荷重で計算した方がよい。§4 より非線形バネ承上の板問題について，板の曲げ剛性がバネ反力の剛性よりある程度大きく ((4-17)式)，又初期値による残差が小さいと ((4-18)式) 必ずニュートン・ラフソン法は収束する。

参考文献

[2] Ciarlet・Schultz・Varga ; "Numerical Methods of High-Order Accuracy for Nonlinear Boundary Value Problems I" Numerische Mathematik 9, 394-430 (1967)

[1] 久保浩一 ; "杭の横抵抗に関する実験的研究 (その1〜3)" 運輸技術研究所報告 11, No6·1961, 11No12·1962, 12No2·1962

[3] Ženíšek ; "Interpolation Polynomials on the Triangle" Numer. Math. 15, 283-296 (1970)

[4] Bramble・Zlámal ; "Triangular Elements in the Finite Element Methods" Mathematics of Computation Vol 24 No112 (1970)