弾性論の近似解に対する誤差評価について

日大生産工学部　登坂宣好

1．序

古典物理学の一分野として発達して来た弾性論は，より広範囲な現象を包含した連続体の力学の一分野として基礎付けられて，理論の発展が行なわれている。最近，特にその成果が構造工学に応用されて，有限要素法等の数値解析手段の発達に伴い，複雑な現象の正確な解明を通じて，設計に対する基礎的データーを提供している。

一方，弾性論はその基本式が，楕円型作用素で与えられるので，その境界値問題という側面から，応用数学の一分野としても研究が行なわれ，数学的基礎付けがなされている。特に，場の方程式の誘導に伴う理論構成手段と，誘導された基本式に対する近似解法の手段という両面に関して，変分法の適用が弾性論では重要視され有力な手段として偉力を発揮していることは普く知られている。

構造工学では，種々の変分原理が成立し，それと関連したモデル化された近似解法が開発されていて，特に有限要素法による問題の解決が盛んであり，各種の変分原理と結びついた種々の解法から得られた近似解の収束性，誤差評価，さらに解の間の関係等が一般的な結論として理論化されるならば，具体的問題への適用に対して有効であると思われる。

上述した様に，弾性論における解の評価として考えられる問題としては，大きく分類すると，

1．理論自体のモデル化に起因する近似理論の評価

2．基本方程式の近似解法による解の誤差評価

なる問題が重要な問題であると考えられる。これらの問題を解決するならば，理論及び近似解法の適用限界が，理論上明確になり，採用する理論及び得られた数値が設計に対する基礎的データーとしての信頼性を保証することになる。

こゝで，上記の問題を論じるにあたり，議論の統一性，簡明性及び一般性を得る為には，弾性論の楕円型微分作用素という具体性を採用することなく，共役性に基づく一般作用素方程式に対する解の評価として，関数解析的手法（特に，変分法の適用）に基づいて，捕えるべき問題と考え，その一例として弾性論の解の評価を統一的に数学的基礎から論じようとする試みが本論文の目的である。

2．境界値問題の定式化

2－1　弾性体の境界値問題

3次元ユークリッド空間内のある滑らかな境界 ∂B を有する，有界閉領域 B を弾性体が占めているものとすると，この弾性体の線形静的問題を支配する field 方程式は，Gurtin [1] に従って書くならば，以下の諸式で与えられる。

歪－変位関係式　$$\mathbf{E} = \hat{\nabla} \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \qquad (1)$$

応力－歪関係式　$$\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = \mathbf{K}[\mathbf{S}] \qquad (2)$$

（ $\mathbf{C}$: elastic tensor field, $\mathbf{K}$: compliance tensor field ）

釣合方程式　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} + \boldsymbol{b} = 0$,　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^T$　(3)

（但し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{b}$ は各々変位，歪，応力，物体力場を表わす。）

さらに，elasticity tensor $\boldsymbol{C}$ に対して，

対称性　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}[\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}]$　(4)

positive definite　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}] > 0$　(5)

なる性質を仮定するならば，$\boldsymbol{C}$ は可逆で，$\boldsymbol{C}$ と同じ性質を有する compliance テンソル $\boldsymbol{K}$ が存在する。次に $\boldsymbol{b}$ を与えることにより，以下の境界条件，

変位境界条件　$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}$　(on $\mathcal{S}_1$)　(6)

応力境界条件　$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{s}}$　(on $\mathcal{S}_2$)　(7)

（但し，$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ は境界 ∂B の正則な補部分曲面で，$\partial B = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$
$\boldsymbol{n}$；境界 ∂B への外向き単位法線ベクトル）

を満足するような弾性状態［$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{S}$］を決定するという混合型境界値問題を考察する。しかしながら，この混合問題が解を有する為の諸条件[1]は全て各量とも，仮定されているものとする。

［定　理　1］　変位による混合問題の表現[1]

$\boldsymbol{u}$ を許容変位場とするとき，もし $\boldsymbol{u}$ が以下の式を満足するならば，かつこの時に限り，上述の混合問題の解である。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{C}[\nabla\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{b} = 0 \qquad (\text{on } B) \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} \qquad (\text{on } \mathcal{S}_1) \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{C}[\nabla\boldsymbol{u}]\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{s}} \qquad (\text{on } \mathcal{S}_2) \qquad (9)$$

［定　理　2］　弾性論の作用素の positive definite 性[2]

固定境界問題に対する（8）式で定義される弾性論の作用素（$D = \mathrm{div}\,\boldsymbol{C}[\nabla\ \ ]$）は，$\bar{B}$（$B$ の閉包）において連続で，2回連続可微分である変位場 $\boldsymbol{u}$ から成る集合上で positive bounded below 作用素であり，以下の不等式が成立する。

$$(D\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq \frac{K_0}{C}\|\boldsymbol{u}\|^2 \qquad (10)$$

（K_0：$\boldsymbol{C}$ と B に関係する Korn 定数，C は定数）

以上により，弾性体の境界値問題に対する定式化が行なわれたが，ここでは（1〜3）式で与えられた場の方程式の作用素の共役性に注目し，具体的な微分作用素を一般化して，一般作用素に対する境界値問題としての定式化を行い，一般性を有する近似の誤差評価を行うことにする。

2−2．作用素の境界値問題

$\mathcal{R}$ を n 次元空間 R^n 内の有界連結領域とし，この境界 $\partial\mathcal{R}$ は十分なめらかなものであるとする。

コンパクト凸部分集合 $\mathcal{R}$ 上で定義された関数から成るヒルベルト空間 H_V, H_Φ を導入する。そこでの内積を各々，$\{\ ,\ \}$, $\langle\ ,\ \rangle$ で示すことにする。さらに，問題を構成する線形作用素として以下のものを考える。

$$T: D(T) \subset H_\Phi \longrightarrow H_V\ ,\quad T^*: D(T^*) \subset H_V \rightarrow H_\Phi \qquad (in\ \mathcal{R}) \qquad (11)$$

$$\sigma: D(\sigma) \subset H_\Phi \longrightarrow H_V\ ,\quad \sigma^*: D(\sigma^*) \subset H_V \rightarrow H_\Phi \qquad (on\ \partial\mathcal{R}) \qquad (12)$$

ここで，T^*, σ^*は各々，以下の式が成立しているという意味において T, σ の共役作用素である。

$$\{V, T\Phi\}_{\mathcal{R}} = \langle T^*V, \Phi\rangle_{\mathcal{R}} + \{V, \sigma\Phi\}_{\partial\mathcal{R}} \qquad (13)$$

$$\{V, \sigma\Phi\}_{\partial\mathcal{R}} = \langle \sigma^*V, \Phi\rangle_{\partial\mathcal{R}} \qquad (14)$$

(11, 12) 式で導入した作用素に対して，以下の式で与えられる境界値問題を考える。

$$T\Phi = KV \quad (in\ \mathcal{R}) \quad (15) \qquad T^*V = F \quad (in\ \mathcal{R}) \quad (16)$$

$$\Phi = \alpha \quad (on\ \mathcal{R}_1) \quad (17) \qquad \sigma^*V = \beta \quad (on\ \mathcal{R}_2) \quad (18)$$

(但し，$K: H_V \rightarrow H_V$ なる positive nonsingular self-adjoint 作用素
$\partial\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$)

上式より，定理1の (8) 式に対応するような，Φ に関する表現が以下の式で与えられる。

$$L\Phi = T^*K^{-1}T\Phi = F \qquad (in\ \mathcal{R}) \qquad (19)$$

$$\Phi = \alpha \qquad (on\ \mathcal{R}_1) \qquad (20)$$

$$\sigma^*K^{-1}T\Phi = \beta \qquad (on\ \mathcal{R}_2) \qquad (21)$$

3．近似理論の誤差評価

問題の定式化において，正解を与える基本式を解析上の要求から種々の近似仮定を導入することにより，他の基本式で与えられるような近似理論を構成する事が工学上では，たびたび行なわれ，この結果，解には誤差が生じ，この誤差評価が応用上重要な問題となる。例えば，殻の曲げ問題に対して存在している種々の近似化に基づく近似理論に対する誤差評価等の問題である。

この様な問題に対して，Koiter [5] は歪エネルギーに対応する2次汎関数に基づく誤差評価を行った。さらに，同様な立場から Simmonds [6] は，その結果を修正し，殻に応用を行っている。

ここでは，Mikhlin [3, 4] に従い，energy 空間概念を導入することから，一般的な作用素方程式に対する誤差評価を求め，その一例として，Koiter 等の結果を吟味することにする。

3－1．energy 空間における誤差評価

ヒルベルト空間 H_Φ において作用する positive operator A に対する以下の基本式が，あるモデル化された理論に基づいた基本的な式を表現するものとする。

$$A\Phi = F \qquad (in\ \mathcal{R}) \qquad (22)$$

いま，$\langle \Phi, F \rangle$ が A の定義域 $D(A)$ において，dense であるような集合上で定義されているならば，上式は有限なエネルギーを有する解が存在することが知られ，この解を Φ_0 とする。

ここで，上式と関連して，ある仮定を導入することから近似化を行い，基本式が(22)から，自己共役で，positive operator B に関する基本式

$$B\Phi = F \qquad (in\ \mathcal{R}) \tag{23}$$

に近似化されたものとして，この解を Φ_1 とするならば，正解 Φ_0 とその近似化による解 Φ_1 との誤差評価を行うならば，近似化された理論の評価が期待される。

ここで，定義された作用素 A, B に対して，以下の様な新しいヒルベルト空間，即ちエネルギー空間を導入し，この空間におけるノルムの項で誤差評価を行うことにする。

新しく，スカラー積として，energy product と呼ばれる以下の定義式

$$[u, v]_A \overset{d}{=} \langle Au, v \rangle \qquad (u, v \in D(A)) \tag{24}$$

を採用するならば，集合 $D(A)$ はこの内積に対してヒルベルト空間となり，さらにこの空間を完備化することにより得られた完備ヒルベルト空間をエネルギー空間といい，H_A で示すことにする。

energy product (24) より，H_A における要素 u のノルムを

$$|||u|||_A \overset{d}{=} \sqrt{[u, u]_A} \tag{25}$$

で与えることにし，これを要素 u のエネルギーノルムと呼ぶ。　このエネルギー空間の導入により作用素方程式と汎関数との関係が明白となる以下の定理が成立する。

［定　理　3］

エネルギー空間において，作用素 A と関係する以下のエネルギー汎関数

$$F(\Phi) = |||\Phi|||_A^2 - 2\langle \Phi, F \rangle \tag{26}$$

を極小にするようなただ一つの要素 φ が存在し，これは(22)式の解である。

$F(\Phi)$ の極小値は以下の式で与えられる。

$$\mathrm{Min}\, F(\Phi) = -|||\Phi_0|||_A^2 \tag{27}$$

（この $\Phi_0 \in H_A$ を作用素方程式(22)の一般化された解[3]という）

いま，一つの理論に対して種々の仮定を導入することによる近似度の評価を行うのであるから，作用素 A, B に関しては，これらに対するエネルギー空間が同一要素から成るという，semi-similar 性[4]を仮定する。　すると，この性質を有する作用素に対して以下の定理が成立する。

［定　理　4］　（Mikhlin [3]）

positive-definite 作用素 A, B が semi-similar であるならば，

$$\alpha |||\Phi|||_B^2 \leqq |||\Phi|||_A^2 \leqq \beta |||\Phi|||_B^2 \qquad (\forall \Phi \in H_A = H_B) \tag{28}$$

であるような正の定数 α, β が存在する。

この定理4と，両解に対して，$\Phi_0 = M\Phi_1$ なる作用素 M を導入することにより，M の固有値を利用するならば，以下の諸々の誤差評価が得られる。

$$|||\Phi_0 - \Phi_1|||_A \leqq \eta\, |||\Phi_1|||_A \tag{29}$$

$$|||\Phi_0 - \Phi_1|||_A \leqq \eta\sqrt{\beta}\, |||\Phi_1|||_B \tag{30}$$

$$|||\Phi_0 - \Phi_1|||_A \leqq \eta\beta\, |||\Phi_0|||_A \tag{31}$$

$$|||\Phi_0 - \Phi_1|||_B \leqq \eta\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, |||\Phi_1|||_B \tag{32}$$

$$|||\Phi_0 - \Phi_1|||_B \leqq \eta\, |||\Phi_1|||_B \tag{33}$$

$$\text{但し} \quad \eta = \max\left(\frac{|\alpha-1|}{\alpha},\ \frac{|\beta-1|}{\beta} \right) \tag{34}$$

（29－33）式で明らかなように，解の誤差評価がエネルギー空間におけるエネルギーノルムにおいて与えられているので，個々の問題に対して，（28）式の正数 α，β に適当に，問題を支配する量を割り当てるならば，種々な力学的解釈が可能である。

3－2．Koiter理論の検討

前節において，一般的に得られた誤差評価式（29～33）は定理3により，エネルギー汎関数と結びつけられて，歪エネルギーに対応する2次汎関数の項に関する誤差評価であると考えられて，Koiterが主としてSchwartの不等式を用いて誘導した誤差評価式との対応が可能である。

定理3より，作用素式（22）及び（23）式と等価なエネルギー汎関数の2次形式の項 $|||\Phi|||_A^2$，$|||\Phi|||_B^2$ をKoiterにならって，

$$|||\Phi|||_A^2 = P_2[\Phi] \tag{35}$$

$$|||\Phi|||_B^2 = P_2^*[\Phi] \tag{36}$$

と置くことにする。これは，$P_2[\Phi]$ が基準理論の2次汎関数を意味し，$P_2^*[\Phi]$ はそれを近似化した2次汎関数を表わしている。

ここで，2次汎関数 P_2，P_2^* に対して，

$$|P_2^*[\Phi] - P_2[\Phi]| \leqq \varepsilon P_2[\Phi] \quad (0 < \varepsilon < 1) \tag{37}$$

なる不等式が成立するという意味での近似化を行うという，Koiterの基本仮定を採用して，上述の結果と対応をつけるならば，この場合，定数 α，β 及び η は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad \beta = \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \eta = \varepsilon \tag{38}$$

従って，誤差評価式（29～33）は，2次汎関数 P_2，P_2^* の項において，以下の様に与えられる。

$$P_2[\Phi_0 - \Phi_1] \leqq \varepsilon^2 P_2[\Phi_1] \tag{39}$$

$$P_2[\Phi_0 - \Phi_1] \leqq \varepsilon^2 \frac{1}{1-\varepsilon} P_2^*[\Phi_1] \tag{40}$$

$$P_2[\Phi_0 - \Phi_1] \leqq \varepsilon^2 \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} P_2[\Phi_0] \tag{41}$$

$$P_2^*[\Phi_0-\Phi_1] \leqq \varepsilon^2\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\ P_2^*[\Phi_1] \tag{42}$$

$$P_2^*[\Phi_0-\Phi_1] \leqq \varepsilon^2 P_2^*[\Phi_1] \tag{43}$$

このようにして得られた誤差評価は全て，Koiterの結果を改良している。

4．近似解の誤差評価

4－1．変分原理と complementary bounds

変分法に基づく近似解法による近似解の誤差評価を与えることは，有限要素法の誤差評価を論じる際にも基本的であると考えられる。先ず，誤差評価を論じるに当り，方程式系（15～18）式と等価である，弾性体の変分原理の一般形と考えられるような変分原理が基本的な役割を果たすものと思われるので，Arthurs [9]，Robinson [10] に従って以下に述べる。

［定　理 5］　停留原理

境界値問題（15～18）の正解の組を（φ, υ）とすると，$H_\Phi \times H_V$ 上で定義された汎関数

$$\begin{aligned} I(\Phi, V) = &\{V, T\Phi\}_R - \tfrac{1}{2}\{KV, V\}_R - \langle F, \Phi\rangle_R \\ &+ \langle \sigma^* V, \alpha - \Phi\rangle_{R_1} - \langle \beta, \Phi\rangle_{R_2} \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} = &\langle T^*V, \Phi\rangle_R - \tfrac{1}{2}\{KV, V\}_R - \langle F, \Phi\rangle_R \\ &+ \langle \sigma^* V, \alpha\rangle_{R_1} + \langle \sigma^* V - \beta, \Phi\rangle_{R_2} \end{aligned} \tag{45}$$

は，（φ, υ）において停留値をとり，かつこの時に限る。

［定　理 6］　Minimum Principle

（15，17）式を満足するような field（これを kinematically 許容場と呼ぶことにする）に対して，応力境界値問題に対応する以下の問題

$$T^*K^{-1}T\Phi = F \qquad (\text{in } R) \tag{19}$$

$$\sigma^*K^{-1}T\Phi = \beta \qquad (\text{on } R_2) \tag{21}$$

の正解を φ とするならば，H_Φ 上で定義された汎関数

$$J(\Phi) \triangleq I(\Phi, V(\Phi))$$

$$= \tfrac{1}{2}\{K^{-1}T\Phi, T\Phi\}_R - \langle F, \Phi\rangle_R - \langle \beta, \Phi\rangle_{R_2} \tag{46}$$

は，$\Phi = \varphi$ において極小値をとる。

［定　理 7］　Maximum Principle

（16，18）式を満足するような field（これを statically 許容場と呼ぶことにする）に対して，変位境界値問題に対応する以下の問題

$$T^*K^{-1}V\Phi = F \qquad (\text{in } R) \tag{19}$$

$$\Phi = \alpha \qquad (\text{on } R_1) \tag{17}$$

の正解を φ とし，これより，(15)式を満足する要素を υ とするならば，以下の汎関数

$$G(\mathcal{V}) \triangleq I(\Phi(\mathcal{V}), \mathcal{V})$$

$$= -\frac{1}{2}\{K\mathcal{V}, \mathcal{V}\}_{\mathcal{R}} + \langle \sigma^* \mathcal{V}, \alpha \rangle_{\mathcal{R}_1} \tag{47}$$

は，$\mathcal{V} = \upsilon$ において，極大値をとる。

以上の3定理から，変位法，応力法（又は，potential energy，complementary energy 原理に基づく方法）に対応する解法に関する近似解の bounds が以下の定理で与えられる。

〔定　理　8〕　　complementary bounds

境界値問題（15～18）の正解の組（φ, υ）と，kinematically 許容場の任意の要素 Φ，statically 許容場の任意の要素 $\mathcal{V}$ に対しては，G, I, J の間に以下の不等式が成立する。

$$G(\mathcal{V}) \leqslant G(\upsilon) = I(\upsilon, \varphi) = J(\varphi) \leqslant J(\Phi) \tag{48}$$

4－2.　Hypercircle Method

弾性論における近似解の誤差評価に関して，Prager & Synge〔7〕は，関数空間の概念を導入することにより，その幾何学的解釈に基づいて Hypercircle 法と呼ばれる評価法を開発し，さらに Synge〔8〕によって，広く数理物理学に応用されている。Oden〔11〕は，この方法と前節で与えた汎関数 J，G との関連を述べているが，誤差評価として使用していない。

ここでは，近似解の誤差評価に対する基礎的評価を与えるために，一般作用素式に対する Hypercircle method の構成を考える。

statically 許容場に対する $\mathcal{V}$ を $\hat{\upsilon}$，kinematically 許容場に対する（$\mathcal{V}, \Phi$）を（$\hat{\hat{\upsilon}}, \hat{\hat{\varphi}}$）とするとき，以下の式で定義される演算を導入する。

$$[\hat{\upsilon}, \hat{\hat{\upsilon}}] \triangleq \{K\hat{\upsilon}, \hat{\hat{\upsilon}}\} = \{\hat{\upsilon}, K\hat{\hat{\upsilon}}\} \tag{49}$$

すると，この演算は，nonsingular positive self-adjoint 作用素 K と，$\{\ ,\ \}$ なる内積の性質を受けて，内積の公理を満足することが確かめられるので，statically 許容場と kinematically 許容場との間を関係づける新しい内積と考えられる。

$\hat{\upsilon}$，$\hat{\hat{\upsilon}}$ の性質，及び field 方程式（15，16），境界条件式（17，18）を考慮するならば，$\hat{\upsilon}, \hat{\hat{\upsilon}}$ 及び正解の組（υ, φ）に対して，以下の基本的な関係式が誘導される。

$$[\hat{\upsilon}, \hat{\hat{\upsilon}}] = \langle F, \hat{\hat{\varphi}} \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \sigma^* \hat{\upsilon}, \alpha \rangle_{\mathcal{R}_1} + \langle \beta, \hat{\hat{\varphi}} \rangle_{\mathcal{R}_2} \tag{50}$$

$$[\upsilon, \upsilon] = \langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \sigma^* \upsilon, \alpha \rangle_{\mathcal{R}_1} + \langle \beta, \varphi \rangle_{\mathcal{R}_2} \tag{51}$$

$$[\upsilon, \hat{\upsilon}] = \langle F, \varphi \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \sigma^* \hat{\upsilon}, \alpha \rangle_{\mathcal{R}_1} + \langle \beta, \varphi \rangle_{\mathcal{R}_2} \tag{52}$$

$$[\upsilon, \hat{\hat{\upsilon}}] = \langle F, \hat{\hat{\varphi}} \rangle_{\mathcal{R}} + \langle \sigma^* \upsilon, \alpha \rangle_{\mathcal{R}_1} + \langle \beta, \hat{\hat{\varphi}} \rangle_{\mathcal{R}_2} \tag{53}$$

これより

$$[\mathcal{V},\mathcal{V}]-[\mathcal{V},\hat{\mathcal{V}}]-[\mathcal{V},\hat{\hat{\mathcal{V}}}]+[\hat{\mathcal{V}},\hat{\hat{\mathcal{V}}}]=0 \tag{54}$$

が成立し，さらに変形するならば，上式と等価な以下の関係式を得る。

$$[\mathcal{V}-\mathcal{V}_m,\mathcal{V}-\mathcal{V}_m]=\left[\tfrac{1}{2}(\hat{\mathcal{V}}-\hat{\hat{\mathcal{V}}}),\tfrac{1}{2}(\hat{\mathcal{V}}-\hat{\hat{\mathcal{V}}})\right] \tag{55}$$

$$\text{但し}\quad \mathcal{V}_m=\tfrac{1}{2}(\hat{\mathcal{V}}+\hat{\hat{\mathcal{V}}}) \tag{56}$$

上式は，[,]を内積とするようなヒルベルト空間での，中心が $\mathcal{V}_m$，半径が右辺で与えられる様な，hypersphere の方程式を意味している。

ここで，右辺の項を汎関数 J, G で表現することを考えると，(46, 47, 49, 50) 式より，

$$[\hat{\mathcal{V}}-\hat{\hat{\mathcal{V}}},\hat{\mathcal{V}}-\hat{\hat{\mathcal{V}}}]=2[J(\hat{\hat{\varphi}})-G(\hat{\mathcal{V}})] \tag{57}$$

なる関係が得られるので，内積 [,] から得られるノルムを | | で表わすならば，(55), (57)式は

$$|\mathcal{V}-\mathcal{V}_m|^2=\left|\tfrac{1}{2}(\hat{\mathcal{V}}-\hat{\hat{\mathcal{V}}})\right|^2=\tfrac{1}{2}[J(\hat{\hat{\varphi}})-G(\hat{\mathcal{V}})]=E^2 \tag{58}$$

なる式で表現される。 さらに正解 $\mathcal{V}$ に対して近似解 $\mathcal{V}_m$ の誤差評価を求めるためには，3角不等式を用いることにより，汎関数で与えられる E に関して，以下の誤差評価が得られる。

$$|\mathcal{V}_m|-E\leqq|\mathcal{V}|\leqq|\mathcal{V}_m|+E \tag{59}$$

5. 結　語

以上より，弾性論の誤差評価に関する問題に対して，一般的骨組が与えられたものと考えられ，これに基づく種々の問題の具体的検討は今後の課題である。 特に，V, Φ に関する評価に関しては，一例として文献[12]に述べられている結果を参照.

【参考文献】

[1] Gurtin, M.E ; "Theory of Elasticity" Handbuch der Physik Vol VI. (Springer 1971)

[2] Mikhlin, S.G : "The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional" (Holden Day 1965)

[3] 〃 : "Mathematical Physics, an advanced course" (North Holland 1970)

[4] 〃 : "The Numerical Performance of Variational Method" (Wolters-Noordhoff 1971)

[5] Koiter, W.T : Z.A.M.P. Vol 21, 1970 (P 534 ～ 538)

[6] Simmonds, J.G : Z.A.M.P. Vol 22, 1971 (P 339 ～ 345)

[7] Prager, W & J.L. Synge : Quart. Appl. Math. Vol 5, 1947 (P. 241 ～ 249)

[8] Synge, J.L : "The Hypercircle in Mathematical Physics" (Cambridge Univ. Press 1957)

[9] Arthurs, A.M : "Complementary Variational Principles" (Oxford Univ. Press 1970)

[10] Robinson, P.D : Paper in "Nonlinear Functional Analysis & Applications" (ed. Rall. Academic Press 1971). P. 507 ～ 576

[11] Oden, J.T : Paper in "The Mathmatical Foundations of the F.E.M. (ed Aziz. Academic Press 1972) P. 629 ― 669.

[12] 登坂宣好 : 日本建築学会大会学術講演梗概集 (昭和48年10月) P.493 ～ 494.