

# 変動荷重を受けるはりの動的弾塑性解析

宮崎大学 工学部 太田 俊昭

## 1. 序言

本研究は、地震などの変動くり返し荷重を受ける鋼構造物の弾塑性応答に関する基礎理論を確立し、今後の耐震設計の一助にせんとしたもので、その骨子は、はりを実体に従った連続体と考え、D'Alembertの原理を用いて慣性力を一種の外的分布荷重と見做してそのモーメントに及ぼす影響量を求め、線型加速度法によって加速度および変形を一貫した行列解法で算定できるように試みたものである。その際、はりの復元力特性としては、直接 bilinear 型の応力-ひずみ曲線を採用し、解析に重要な力と変形の関係式すなわち、モーメント-曲率式には、先に著者が導いた曲率算定公式<sup>(1)</sup>を準用した。

## 2. 仮定

本研究では、次の仮定を用いるものとする。

- 1) はりは等方性材料で、その応力-ひずみ曲線は、図-1のような bilinear 型の曲線で理想化する。(地震などの低い円振動数に対しては、十分実用的であるといふ文献<sup>(2)</sup>で認められている。)
- 2) 平面保持の法則が成立する。
- 3) せん断応力の影響を無視する。
- 4) 局部座屈および疲労破壊は生じないものとする。

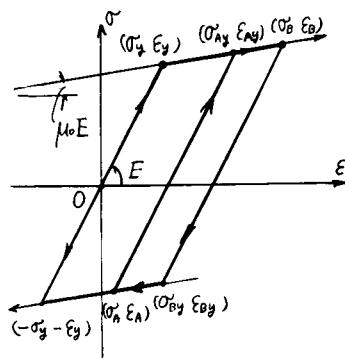


図-1

## 3. 曲げモーメントと曲率

先に著者は、任意の変動軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受けるはりの曲率算定式を誘導した。しかし、はりの動的挙動を解明する場合、特に後述の線型加速度法では、既知数が曲率φで、未知数が曲げモーメントMとなるため、上記曲率算定式(既知数M, N, 未知量φ)を若干修正する必要がある。途中の誘導手法は同一であるので重複をさけるため要点のみを列記する。

はりの断面の微小要素kに生ずるひずみε<sub>k</sub>と応力σ<sub>k</sub> (k=1, 2, ...)は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_k &= (1 - y_k/h) \varepsilon_e + (y_k/h) \varepsilon_u \\ \sigma_k &= \nu_k \{ (1 - y_k/h) \varepsilon_e + (y_k/h) \varepsilon_u - \varepsilon_k^* \} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (1)}$$

ただし、ε<sub>e</sub>, ε<sub>u</sub> : 上, 下縁のひずみ, y<sub>k</sub> : 微小要素kを代表する高さ, h : 断面高, ν<sub>k</sub>, ε<sub>k</sub><sup>\*</sup> : 文献<sup>(1)</sup>参照。

一方、曲げモーメントと軸力は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -d/h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \sigma dA_0 \\ -\int \sigma y dA_0 \end{pmatrix} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{また、曲率 } \phi \text{ は } \phi = (\varepsilon_e - \varepsilon_u)/h \quad \text{--- (3)}$$

式(2)に式(1)を代入のうえ、ε<sub>e</sub>, ε<sub>u</sub>について解く。結果を式(3)の右辺に代入すれば、曲率算定式が次式で求められる。

$$\bar{\phi} = F_{11} \bar{M} + F_{12} \bar{N} + G_1 \quad \text{--- (4)}$$

ただし  $\bar{\phi} = \phi/\phi_1$ ,  $\bar{M} = M/M_1$ ,  $\bar{N} = N/N_1$ ,  $M_1, \phi_1$ : 純曲げモーメントの場合の動的降伏曲げモーメント時,  $N_1 = \sigma_Y A$ ,  $\sigma_Y$ : 動的降伏応力,  $A$ : 断面積,  $F_{11}, F_{12}, G_1$ : 応力状態で定数, 文献(1)参照.

式(4)を変形してモーメントの算定式を求めれば, 次のようになる.

$$\bar{M} = (\bar{\phi} - F_{12} \bar{N} - G_1) / F_{11} \quad \text{--- (5)}$$

#### 4. はりの動的弾塑性解析

図-2に示すはりが, 動的外力  $g$  を受けて弾塑性変形を生じたと仮定する. はりの単位長さ当りの質量を  $m$ , はりに垂直方向のたわみを  $y$ , さらに軸方向に  $x$  軸をとれば, D'Alembert の原理より, はりに生ずる曲げモーメントは, 慣性力  $p = -m\ddot{y}$  の影響を考慮して

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -(p + g) \quad \text{または} \quad M = -\iint (p + g) (dx)^2 \quad \text{--- (6)}$$

ここで はりを  $n$  等分割して, 分割点  $j$  ( $j=1, 2, \dots, n+1$ ) の  $M, p$  および  $g$  をそれぞれ  $M_j, p_j$  および  $g_j$  とする. これらの  $M_j, p_j$  および  $g_j$  のうち, 独立した諸量を一括して, それぞれ列ベクトル  $M, p$  および  $g$  で表わせは

$$M = R_M \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n+1} \end{pmatrix}, \quad p = R_p \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n+1} \end{pmatrix}, \quad g = R_g \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{--- (7)}$$

ただし  $R_M, R_p, R_g$  は, 独立でない値を除去する行列.

式(6), (7) から, スパン長を  $l$  として

$$M = (\alpha_p p + \alpha_g g) l^2 \quad \text{--- (8)}$$

ところで 慣性力  $p$  は

$$p = -m \ddot{y} = -\alpha_s m_s \bar{m} \ddot{y} \quad \text{--- (9)}$$

ただし  $\bar{m}$  は質量比  $m/m_s$  に関する対角行列,  $\ddot{y} = \ddot{y}/\alpha_s$ ,  $\alpha_s, m_s$ : 基準とす加速度と質量, 式(8)に式(9)を代入し,  $M_1$  で除せば, 次式がえられる.

$$\bar{M} = \kappa (-\alpha_p \bar{m} \ddot{y} + \alpha_g \bar{g}) \quad \text{--- (10)}$$

ただし  $\kappa = m_s \alpha_s l^2 / M_1$ ,  $\bar{g} = g / m_s \alpha_s$ ,  $\bar{M} = M / M_1$ ,  $\alpha_p, \alpha_g$ : 分割数によって定まる係数行列.

次に 任意点  $x$  のたわみ  $y$  は,  $\phi$ -法公式<sup>(2)</sup>を用いて

$$y = x \theta_A - \int_0^x \phi(x-s) ds, \quad \theta_A = \int_0^l \phi ds / l \quad (\text{単純はりの場合}), \quad \theta_A = 0 \quad (\text{片持はりの場合}) \quad \text{--- (11)}$$

式(11)を行列表示して次式を与える.

$$y = l^2 \theta \phi \quad \text{--- (12)}$$

ここに  $y$  および  $\phi$  は, 式(7)と同様な行列  $R_y$  および  $R_\phi$  を用いて

$$y = R_y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \phi = R_\phi \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{n+1} \end{pmatrix}$$

また  $\theta$  は, 分割数によって定まる係数行列である.

はりの固有円振動数を  $\omega_n$  とし, 式(12)を静的たわみ  $y_s = \alpha_s / \omega_n^2$  で除いて無次元化する.

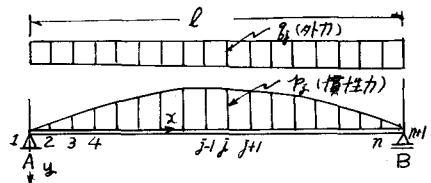


図-2

$$\bar{y} = y_s = \phi_0 l^2 / y_s \cdot a \bar{\phi} = \gamma a \bar{\phi} \quad \text{--- (13)}$$

$$\text{したがって } \gamma = \phi_0 l^2 / y_s = M_0 l^2 / E I y_s, \quad \bar{\phi} = \bar{\phi} / \phi_0$$

ここで、弾性曲率を  $\phi^e$  とし、塑性曲率を  $\phi^p$  とすれば、曲率  $\phi$  は

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}^e + \bar{\phi}^p = \bar{M} + \bar{\phi}^p \quad \text{--- (14)}$$

$$\text{したがって } \bar{\phi}^p = \bar{\phi} - \bar{M}$$

であらわれる。(14) を (13) に次のように変形される。

$$\bar{y} = \gamma a (\bar{M} + \bar{\phi}^p)$$

さらに上式に式(10)を代入して

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -\gamma \kappa a \alpha_p \bar{m} \bar{y} + \gamma \kappa a \alpha_p \bar{y} + \gamma a \bar{\phi}^p \\ &= -S(K_p \bar{y} + K_g \bar{y}) + \gamma a \bar{\phi}^p \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{y} = -\frac{1}{S} A \bar{y} + B \bar{y} + \frac{1}{\kappa} C \quad \text{--- (15)}$$

$$\text{したがって } K_p = a \alpha_p \bar{m}, \quad K_g = a \alpha_g, \quad A = K_p^{-1}, \quad B = A K_g, \quad C = A a \bar{\phi}^p, \quad S = \gamma \kappa.$$

(15) 時刻  $i$  のため、速度および加速度をそれぞれ  $y_i, v_i$  および  $a_i$  で表わし、微小時間間隔を  $t$  とすれば、時刻  $i+1$  のため  $y_{i+1}$  と速度  $v_{i+1}$  は、線型加速度法<sup>4)</sup>によって次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + v_i t + \frac{t^2}{2} a_i + \frac{t^3}{6} a_{i+1} \\ v_{i+1} &= v_i + \frac{t}{2} a_i + \frac{t}{2} a_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (16)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{あるいは } y_{i+1} &= y_i + \frac{t}{2} v_i + \frac{t^2}{3} a_i + \frac{t^3}{6} a_{i+1} \\ v_{i+1} &= v_i + \frac{t}{2} a_i + \frac{t}{2} a_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (17)}$$

式(17)を  $y_s$  および  $v_s = a_s / \omega_0$  で除して無次元化する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_{i+1} &= \bar{y}_i + 2\pi \bar{t} \bar{v}_i + \frac{4\pi^2 \bar{t}^2}{3} \bar{a}_i + \frac{2\pi^2 \bar{t}^2}{3} \bar{a}_{i+1} \\ \bar{v}_{i+1} &= \bar{v}_i + \pi \bar{t} \bar{a}_i + \pi \bar{t} \bar{a}_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (18)}$$

$$\text{したがって } \bar{t}_0 = t_0 / T_0, \quad T_0 = 2\pi / \omega_0, \quad \text{はりの固有周期}$$

一方、時刻  $i+1$  における加速度  $\bar{a}_{i+1}$  は、式(15)から次のように求められる。

$$\bar{a}_{i+1} = -\frac{1}{S} A \bar{y}_{i+1} + B \bar{v}_{i+1} + \frac{1}{\kappa} C_{i+1} \quad \text{--- (19)}$$

式(19)に式(18)の  $\bar{y}_{i+1}$  を代入して

$$\bar{a}_{i+1} = -\frac{1}{S} A (\bar{y}_i + 2\pi \bar{t} \bar{v}_i + \frac{4\pi^2 \bar{t}^2}{3} \bar{a}_i + \frac{2\pi^2 \bar{t}^2}{3} \bar{a}_{i+1}) + B \bar{v}_{i+1} + \frac{1}{\kappa} C_{i+1}$$

上式を整理すれば

$$(I + \frac{2\pi^2 \bar{t}^2}{3S} A) \bar{a}_{i+1} = -\frac{1}{S} A (\bar{y}_i + 2\pi \bar{t} \bar{v}_i + \frac{4\pi^2 \bar{t}^2}{3} \bar{a}_i) + B \bar{v}_{i+1} + \frac{1}{\kappa} C_{i+1}$$

ここで  $D = I + (2\pi^2 \bar{t}^2 / 3S) A$  ( $I$ : 単位行列) とおき、加速度  $\bar{a}_{i+1}$  を求めれば、結局次式で与えられる。

$$\bar{a}_{i+1} = -\frac{1}{S} D^{-1} A (\bar{y}_i + 2\pi \bar{t} \bar{v}_i + \frac{4\pi^2 \bar{t}^2}{3} \bar{a}_i) + D^{-1} B \bar{v}_{i+1} + \frac{1}{\kappa} D^{-1} C_{i+1} \quad \text{--- (20)}$$

以上から、誘導式(5), (13), (18)および式(20)を用いて与荷重 $g$ に対するはりの弾塑性応答が次のようにして解明できることになる。

すなわち、前の時刻 $i$ のため $\bar{y}_i$ と速度 $\bar{v}_i$ および加速度 $\bar{\alpha}_i$ が分っているものとするれば、式(13)から曲率 $\bar{\phi}_i = \alpha^{-1} \bar{y}_i / \eta$ が求られ、これを式(5)に代入して曲げモーメント $\bar{M}_i$ （たがって塑性曲率 $\bar{\phi}_i^* = \bar{\phi}_i - \bar{M}_i$ ）が求められる。これを式(20)の $C_{i+1}$ の近似値として $\bar{\alpha}_{i+1}$ を計算し、式(18)からため $\bar{y}_{i+1}$ および速度 $\bar{v}_{i+1}$ を算定する。えられた $\bar{y}_{i+1}$ の近似値を用いて曲率 $\bar{\phi}_{i+1}$ を求め、式(20), (18)の一連の計算を進め、 $\bar{y}_{i+1}$ を再度算出する。以下同様の計算をくり返し収束せよ。（実際には、 $C_{i+1}$ のため $i$ に及ぼす効果は、 $\tau_0$ 倍されるため、( $\tau_0 = 0.001$ 以下にとれば)ほとんど無視しうるものとなり、 $C_{i+1} \approx C_i$ としても工学的に十分実用的精度がえられる。）

他方、加速度とため $\bar{y}$ の関係を定める別の方法として、Miln's Method と差分法<sup>9)</sup>とがある。

Miln's Method の場合は、式(16)に代るものとして

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{i+1} &= \frac{4}{3} \tau_0 (2\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_{i+1} + 2\bar{\alpha}_{i-2}) + \bar{v}_{i-3} \\ \bar{y}_{i+1} &= \frac{4}{3} \tau_0 (2\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1} + 2\bar{v}_{i-2}) + \bar{y}_{i-3} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

よって式(18)に相当する式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{i+1} &= \frac{8\pi\bar{\tau}_0}{3} (2\bar{\alpha}_i - \bar{\alpha}_{i+1} + 2\bar{\alpha}_{i-2}) + \bar{v}_{i-3} \\ \bar{y}_{i+1} &= \frac{8\pi\bar{\tau}_0}{3} (2\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1} + 2\bar{v}_{i-2}) + \bar{y}_{i-3} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

一方の差分法による場合は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{i+1} &= \frac{1}{\tau_0} (\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i) \\ \bar{y}_{i+1} &= 2\bar{y}_i - \bar{y}_{i-2} + \tau_0^2 \bar{\alpha}_i \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{i+1} &= \frac{1}{2\pi\bar{\tau}_0} (\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i) \\ \bar{y}_{i+1} &= 2\bar{y}_i - \bar{y}_{i-2} + 4\pi^2 \bar{\tau}_0^2 \bar{\alpha}_i \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

## 5. 単純はり

一様な矩形断面をもつ単純はりに、動的分布荷重  $g = 2g_0 e^{-\eta x}$  を受けるとき、

はりの示す動的弾塑性性を解明してみよう。

ただし  $\eta = \pi/2$ ,  $g_0 = 8M_{ps}/l^2$  で  $M_{ps}$  は静的塑性モーメントである。

いま、はりを  $n=10$  に等分割し、式(8), (13)の係数行列 $\alpha_p$ および $\alpha_g$ を台形公式を用いて求めれば、図-3から対称条件を考慮して

$$\alpha_p = \alpha - \frac{1}{600} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 6 & 3 \\ 6 & 11 & 12 & 12 & 6 \\ 6 & 12 & 17 & 18 & 9 \\ 6 & 12 & 18 & 23 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 14 \end{pmatrix}, \quad \alpha_g = -\frac{1}{600} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & 11 & 12 & 12 & 6 \\ 1 & 6 & 12 & 17 & 18 & 9 \\ 1 & 6 & 12 & 18 & 23 & 12 \\ 1 & 6 & 12 & 18 & 24 & 14 \end{pmatrix}$$

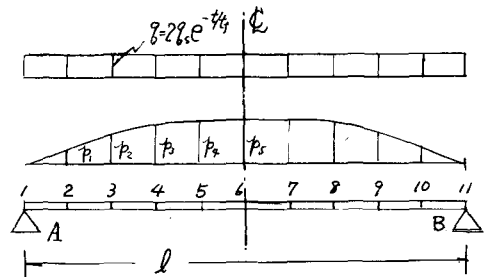


図 - 3

ここに モーメント  $\bar{M}$ , 外力  $\bar{P}$ , 曲率  $\bar{\Phi}$ , たわみ  $\bar{y}$ , 速度  $\bar{v}$  および加速度  $\bar{a}$  は

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \vdots \\ \bar{M}_6 \end{bmatrix}, \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \vdots \\ \bar{\Phi}_6 \end{bmatrix}, \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_6 \end{bmatrix} = e^{-2\bar{t}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \vdots \\ \bar{y}_6 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \vdots \\ \bar{v}_6 \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \vdots \\ \bar{a}_6 \end{bmatrix}$$

また、仮定により、ほりの質量は一定  $m = m_s \therefore \bar{m} = \mathbf{I}$  となり、式(15)の  $K_p$  は  $K_p = a \bar{a}_p$  とする。さらに  $a_s = g_s/m_s$  とおき、かつ固有円

$$\text{振動数 } \omega_s = \sqrt{G EI / m_s l^4} \quad (G = 987) \text{ を}$$

用いて式(10)の  $\kappa$ , 式(13)の  $\gamma$  および式(15)の  $S$  を算出すれば、次のようになる。

$$\kappa = \frac{g_s l^2}{M_p} = 8 \frac{M_{ps}}{M_p} \frac{M_p}{M_g} = 8 f_s f$$

$$\text{したがって } f_s = \frac{M_{ps}}{M_p}, f = \frac{M_p}{M_g} \text{ であり } f_s = 1, f = 1.5 \text{ と仮定した。}$$

$$\gamma = \frac{M_p l^2}{EI_s g_s} = \frac{M_p}{8 M_{ps}} \frac{m_s \omega_s^2 l^4}{EI} = \frac{G^2}{8 f f_s}$$

$$\therefore S = \kappa \gamma = G^2$$

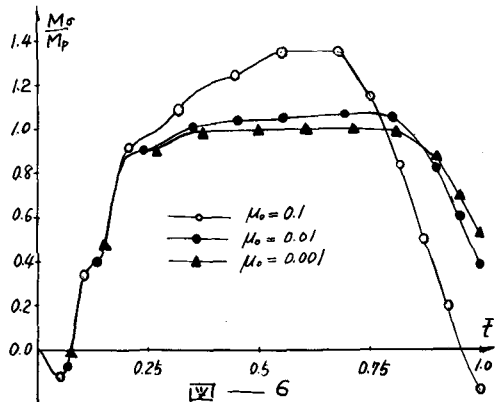
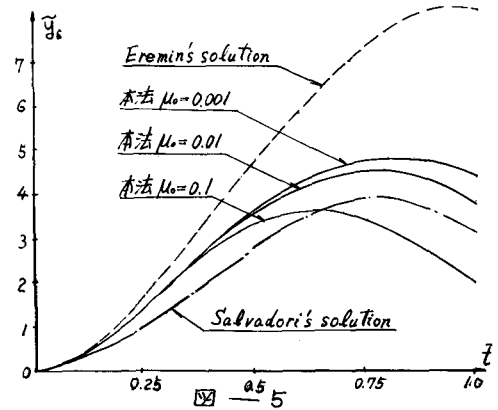
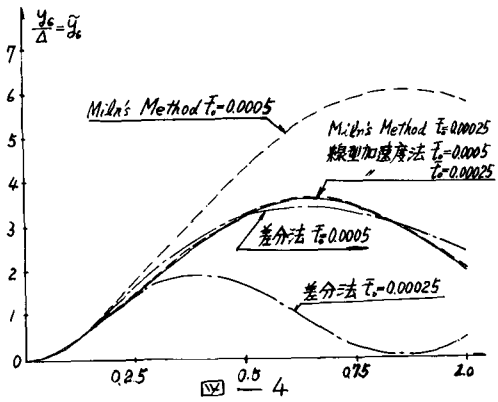
以上の諸量を用いて、時間間隔を  $\bar{t}_0 = 0.00025, 0.0005$  にとり、 $\bar{t} = 0 \sim 1.0$  で変化させて計算を行った。

図-4 は、歪硬化を表わすパラメータ  $\mu_0$  を  $\mu_0 = 0.1$  とおいて中央点のたわみ  $\bar{y}_5 = y_5 / \Delta_s$  ( $\Delta_s$  は  $g_s$  による中央点の静的たわみ) を図示したものである。

図中の実線は線型加速度法、点線および一点鎖線は、Miln's Method および差分法により求めた値である。

この図から、線型加速度法による場合が最も収束が早く、差分法による場合が最悪であることが看取される。その原因は、 $\bar{t} = 0.0005$  では、Miln's Method および差分法による場合には、モーメント値が振動して収束せず、その誤差が累積されて、たわみ誤差として現われたものと考えられる。

次に、図-5 の実線は、本法による解 ( $\bar{t}_0 = 0.0005, \mu_0 = 0.1, 0.01, 0.001$ )  $\bar{y}_5$  で



あり、また点線は Eremín<sup>5)</sup>により求められた差分法による解(集中 Mass)であり、一英鎖線は剛塑性体を仮定した Salvadori の解<sup>6)</sup>である。

本法と他の解法とは、定性的にはほぼ合致するか、定量面では、弾性限界までは一致するも、それ以降はかなりの開きがあることが判読される。

その理由は、他解法が 1) 歪硬化現象を無視していること、2) モーメントと曲率の関係式が近似式であること、3) 集中 Mass の概念を採用していること、4) 収束性の良く無い差分法を採用していること、などが数えられる。

なお、図-6 は、同じはりの中央点のモーメント  $M_0$  の時間的变化を円示したものである。

## 6. 片持はり

図-7 に示す一様な正方形断面を有片持はり AB の支持端 A から、加速度  $d_s = d_s \sin \omega t$  を生じたとする。

このときのはりの示す弾塑性応答を明らかにすれば、次のとおりである。

ただし  $d_s = 2M_{ps}/m_s l^2$ ,  $g_s = m_s d_s$ ,  $\omega = 0.5 \omega_0$  とし、歪硬化を表わす  $\mu_0$  は 0.01 とする。

ここで、はりを簡単のため  $n=4$  等分割し、式(8)、(B)の係数行列  $d_p, d_g$  を求めれば、それぞれ

$$d_p = a = \frac{-1}{96} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 & 11 \\ 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d_g = \frac{-1}{96} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 & 18 & 11 \\ 0 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

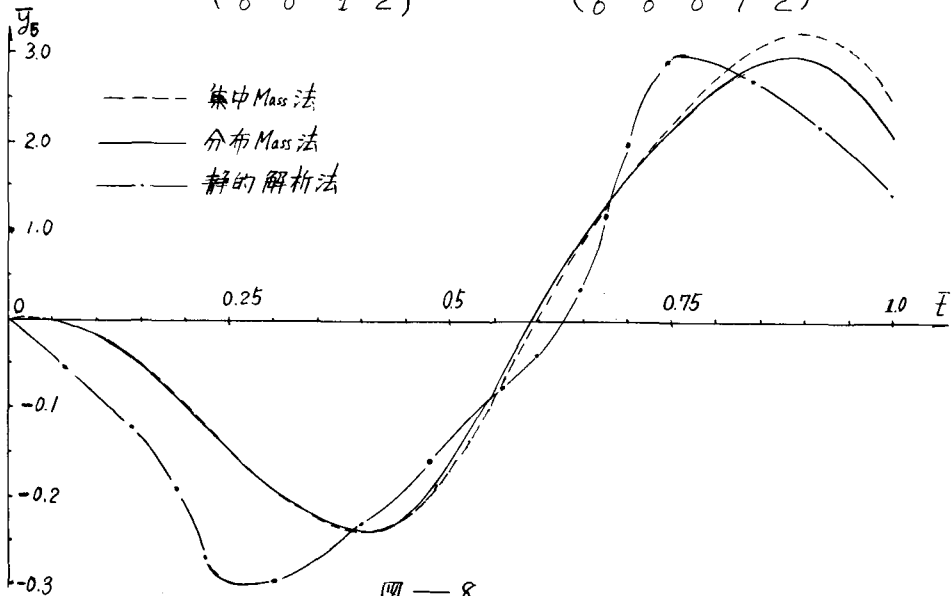


図 — 8

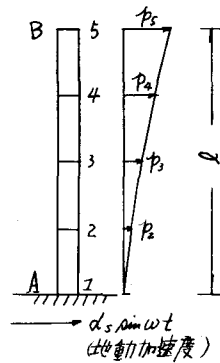


図 - 7

また、 $\bar{M}$ ,  $\bar{\Phi}$ ,  $\bar{\delta}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{v}$  および  $\bar{a}$  は、図-7を参照して

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{M}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_3 \\ \bar{\Phi}_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\delta}_4 \\ \bar{\delta}_5 \end{bmatrix} = \sin \pi \bar{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \\ \bar{y}_5 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{v}_5 \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \\ \bar{a}_5 \end{bmatrix}$$

さらに、片持はりの固有円振動数  $\omega_0 = \sqrt{C_0 EI / m_s l^4}$  ( $C_0 = 3.515$ ) を用いて  $\kappa$ ,  $\gamma$  および  $S$  を算定すれば、それぞれ次の値となる。

$$\kappa = 2 \frac{M_p}{M_f} = 2 f_s f, \quad \gamma = \frac{M_y l^2}{EI y_0} = \frac{C_0^2}{2 f_s f}$$

$$\therefore S = \kappa \gamma = C_0^2$$

以上から、時間間隔を  $\bar{t}_0 = 0.0005$  にとり、 $\bar{t} = 0 \sim 1.0$  (1周期) まで変化させて計算を行った。結果の一部を示せば図-8 および図-9 のようになる。

図-8 の実線は、本法によるたわみ値で、点線は集中 Mass にする値である。

集中 Mass にする誤差は、 $\bar{t} = 1.0$  で約 30% であり、その差は周期が増すと累積増大する傾向にある。

また、一点鎖線は、くり返し荷重  $P = P_0 \sin \omega t$  を静的に加えたときのたわみ値であり、動的な場合との差は、 $\bar{t} = 1.0$  で 60% に達する。

なお、図-9 は、固定端の曲げモーメントの変化を示したものである。

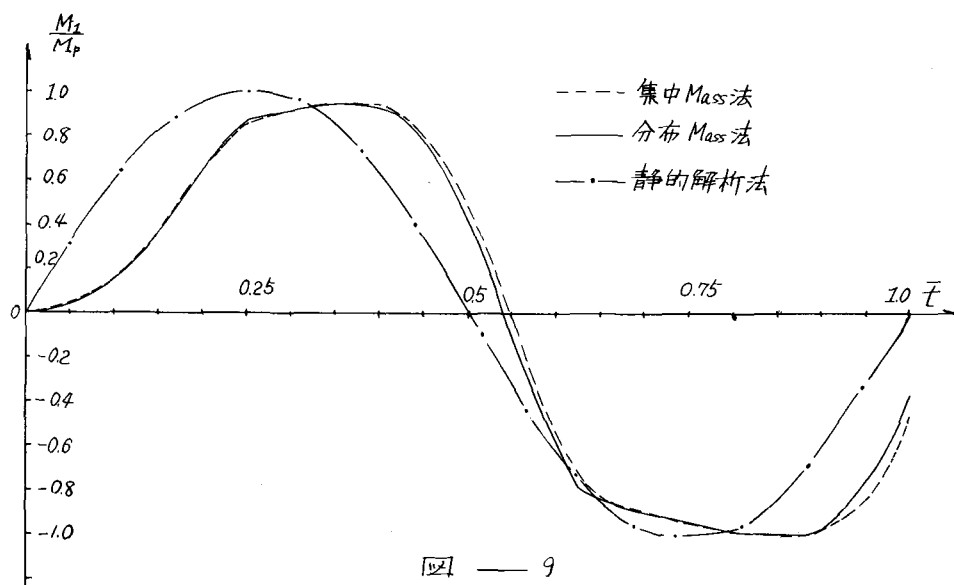


図 9

## 7. 結論

著者は、本論文において分布 Mass の概念を導入し、かつ bilinear 型の応力-ひずみ曲線に基づいたはりの動的弾塑性解析、いわゆる連続体の非線型曲げ振動

解析理論の確立に成功した。

本法の特色は、任意形状断面のほりに適用できること、文献(2)で著者が示した方法によって初期残留応力を有する場合の動的解析も可能であること、さらには、不静定構造物にも拡張応用できることなど、その一般性と厳密性にあると云える。

また、本計算結果において明らかにされた諸点を要約すれば次のとおりである。

- (1) たわみを推定する3つの方法 すなわち、線型加速度法と Milns Method ならびに差分法のうち、収束性が最も良いのは、線型加速度法であり最も悪いのは、差分法である。特に後者は、時間間隔のとり方において塑性たわみが全く異って算出されるので注意を要する。
- (2) 集中 Mass 法による誤差は、分割数  $n=4$  程度の片持ばりでは、たわみ誤差は 1 cycle で 15% となり、cycle の増加によって累積される。
- (3) 静的くり返し荷重と動的な場合との差は、振中に限しては、それほど大きくはないが、周期のずれと、たわみ形の相違が著しい。
- (4) 動的塑性たわみに及ぼす歪硬化の影響は、極めて大きい。  
などが挙げられる。

なお、本研究に当っては、九州大学小坪教授、福岡大学黒木助教授の示唆を受けることが大である。また、本研究は、文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表す。

## 8. 参考文献

- (1) T. Ohta and T. Yamasaki : *Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures Considering the Effects of Residual Stress and Finite Deformation*, Proc. of JSCE, No. 174, Oct. 1971
- (2) 渡辺 : 軟鋼の動的弾塑性復元力特性, 土木学会論文報告集, No. 182, Oct. 1970
- (3) 山崎, 太田, 石川 : 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第 134 号, 昭和 41 年 10 月
- (4) 日本鋼構造協会 : 建築物の動的解析, 彰国社  
田治見 宏 : 建築振動学, コロナ社
- (5) A.A. Exonin, M.L. Baron and H. Bleich : *Dynamic Elasto-Plastic Analysis of Structures*, Trans. of the ASCE, Vol. 127, Part I, 1962
- (6) M.G. Salvadori and P. Weidlinger : *On the Dynamic Strength of Rigid-Plastic Beams Under Blast Loads*, Proc. of the ASCE, Vol. 83, EM.4, Oct. 1957
- (7) A.C. Heidbrecht, J.F.F. Fleming and S.L. Lee : *Dynamic Analysis of Inelastic Multi-Degree Systems*, Proc. of the ASCE, Vol. 89, EM.6, Decem. 1963
- (8) A. Çakiroğlu and G. Özgen : *Numerical-Integration of Forced-Vibration Equations*, Proc. of the ASCE, Vol. 94, EM.3, June 1968