

衝撃力を受ける Timoshenko はりの弾塑性応答について

金沢大学工学部

小堀為雄

石川工業高等専門学校

○ 出村 禮典

1. まえがき

変形が弾性範囲内にとどまる場合の衝撃力に対する構造部材の強度や変形に関する研究は、従来から盛んに行なわれ設計法も確立されてきている。しかし、このように生じる応力を許容応力内に抑えている弾性設計法だけでは、まれにしか作用しないような大きな衝撃力を取り扱うには、構造物が不経済なものになってしまう。そこで、このような大きな衝撃力が構造物に作用した場合、構造部材の一部が弾性範囲を越え塑性変形が生じて、構造物が崩壊したり、構造物の機能に有害な二次応力などが生じなければ良いという考え方が注目されるようになってきた。そのために、衝撃力によるはりの弾塑性応答に関する研究論文も数多く発表され、設計の合理化に寄与してきている。

ところで、はりの弾塑性応答の解析には、一般に回転慣性やせん断変形の影響を無視している Euler-Bernoulli はりの振動理論に基づいて解析されている。このような要素の影響は、一般の構造物では小さいと思われるが、スパン長が短かく腹板の薄い工形断面はりでは、せん断変形の影響はかなり大きくなると考えられる。また、大きな変形が生じる場合の両端固定はりや軸力の作用するラーメンのような場合、軸力による変形の影響も無視できない要素になってくると考えられる。しかし、このように曲げ変形に加え、せん断変形や軸力による変形も考慮に入れて弾塑性応答を解析するには、応答が非線形振動であるとともに、はりの挙動が塑性領域に入り、その場合には、曲げモーメントとせん断力および軸力の相互作用も考慮に入れなければならない。

本研究は以上の点に注目したもので、その中のせん断変形、回転慣性、またせん断力と曲げモーメントの相互作用が、はりの弾塑性応答におよぼす影響を調べ、それらが構造部材の強度や変形に与える影響を設計の立場から考察したものである。

2. 計算方法

せん断変形や回転慣性の影響をも考慮に入れている振動理論は、Timoshenko はりの理論として知られ、弾性応答に関してはかなり詳しく知られている。しかし、変形が塑性領域にまでおよぶ弾塑性応答は、前述のように応答が非線形振動であるとともに、相互作用をも考慮に入れなければならないため、はりを連続体として解析するには困難な点が多い。そこで、Michigan 州立大学の Wen 教授は、はりを集中質量に分けた近似モデルに置き換え、それに数値積分法を用いた計算方法を提案した。そこで、このモデルを Wen モデルと呼ぶことにする。著者らは、この方法を参考として数値解析によることとした。以下簡単に計算方法について説明する。

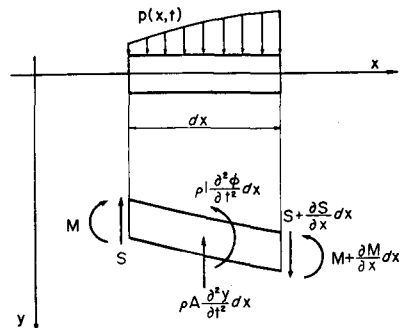


Fig.1 Forces Acting on an Element of Continuum

Timoshenko はりの振動理論は、鉛直方向の慣性力とともに回転方向の慣性力をも考慮に入れているため、運動方程式は回転方向と鉛直方向に分けて次式のように表わされる (Fig. 1 参照)。

$$\frac{\partial S}{\partial x} = PA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p(x, t) \quad (1)$$

$$S = \frac{\partial M}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2)$$

式 (2) の $\rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ として回転慣性が入っている。

また、Wen モデルは Fig. 2 に示すように、はりを変形しない rigid bar に分けて、変形は force point によう入されている spring (曲げモーメントによる変形は moment spring が、せん断力による変形は shear spring) が受け持つものと考える。このようなモデルの panel における各々の力の関係は、Fig. 3 のようになっている。すなわち、連続体の微小要素もモデルの panel に拡張したものであり、運動方程式はやはり鉛直方向と回転方向に分け、次式のように表わされる。

$$m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = S_i - S_{i+1} + P_i \quad (3)$$

$$(\rho I h)_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = M_i - M_{i+1} + \frac{1}{2} h_i (S_i + S_{i+1}) \quad (4)$$

はりを連続体とした場合の運動方程式 (1) はモデルにおける運動方程式 (3) に相当し、式 (2) は式 (4) に相当する。 P_i , m_i は集中質量、集中外力である。

せん断変形は連続体では、はりのたわみ角は曲げモーメントによるたわみ角とせん断力によるたわみ角の和であるとして、次式のように組み入れている。

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \phi + \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (5)$$

こゝで、 β はせん断力によるたわみを表わす。

モデルでは、変形状態を Fig. 4 のように考え、 β_i にせん断変形も入れている。

次に、応力と変形の関係は、弾性範囲内では連続体の場合次式のように表わされる。

$$M = -EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6)$$

$$S = GA' \beta \quad (7)$$

これらの式に対して、モデルでは bar の flexibility を半分ずつ force point に集中しているとして spring のバネ定数を考え、 M_i と d_i (曲げモーメントによる変形量) と S_i と β_i (せん断力による変形量) の関係は次式のように表わす。

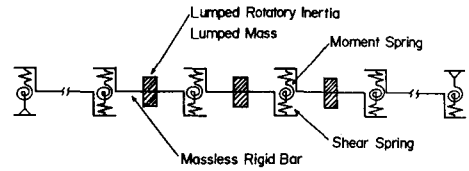


Fig. 2 Timoshenko Beam of Wen Model (Undeformed State)

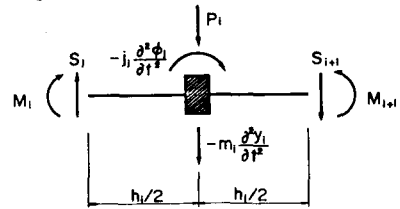


Fig. 3 Forces Acting on a Typical Panel

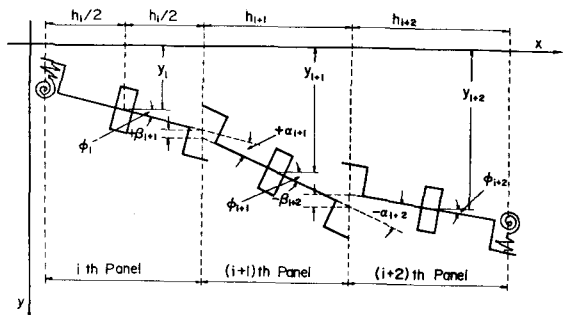


Fig. 4 Timoshenko Beam of Wen Model (Deformed State)

$$M_i = -EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (8)$$

$$S_i = GJ \frac{d\theta}{dx} \quad (9)$$

連続体では、式(1)、(2)、(5)、(6)および式(7)を用いて、1つの式にたがすことができる。しかし、この式は、弾性範囲内においても特殊な外力や境界条件を除いては解くことは困難である。これに対してモデルでは、式(3)、(4)、(8)および式(9)を、Fig.4に示される幾何的条件を考え、数値積分法を適用すれば、より広範な荷重状態や境界条件についても解析を行なうことができる。

以上、弾性領域における計算方法について述べたが、次にばりの挙動が塑性領域に入る場合について説明する。ばりの一部が塑性領域に入ると、その断面では式(6)、(7)、(8)および式(9)の弾性条件式は成立しなくなる。Eulerははりのように曲げ変形のみを考えている場合には、 M と θ の関係を新たに塑性領域における関係に置き換えて計算を進めればよい。しかし、Timoshenkoは曲げモーメントとせん断力の相互作用を考えなければならぬ。そこで、塑性領域におけるばりの挙動は塑性ポテンシャル理論に従うとする。

ばりの任意の断面において塑性ポテンシャル関数 $f(M, S)$ が存在し、interaction curve または降伏限界曲線は次式で表わされる。断面に働く曲げモーメントとせん断力が $f(M, S) < 0$ なる関係にあるときは、断面のすべてが弾性であることを示し、

$$f(M, S) = 0 \quad (10)$$

これでは塑性状態になり、塑性変形が生ずる。また $f(M, S) < 0$ なることはあり得ない。 $f(M, S) = 0$ なる場合の塑性変形は次の法則に従う (Fig. 5 参照)。

$$\frac{\partial f(M, S)}{\partial M} - \frac{\partial f(M, S)}{\partial S} = C \quad (11)$$

ここで、サフィックス p は変形の塑性部分を示している。 C はスカラー量である。

式(10)も加えて連続体として解くことは不可能である。

ここでモデルでは次のように取り扱っている。塑性ヒンジはforce pointで生じるものとし、そのforce pointの塑性ポテンシャル関数 $f(M_i, S_i)$ は対応する連続体の断面の塑性ポテンシャル関数を使用する。数値積分を進めて行くうちに、 $f(M_i, S_i)$ が負になる時、まづ十分正確に $f(M_i, S_i) = 0$ なる時刻 $t = t_p$ を求める。 $t = t_p$ より塑性領域の計算に入る。

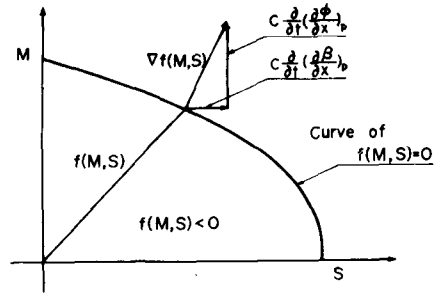


Fig.5 Plastic Potential Function

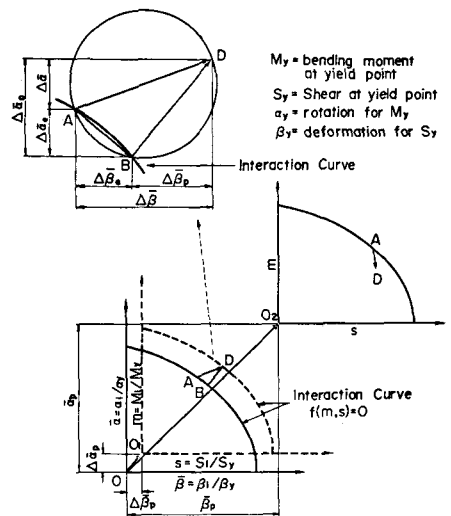


Fig.6 Treatment of Plastic Behavior

はりの挙動が塑性領域に入った場合に、式(8)、(9)は d_{ie}, β_{ie} の全体に対して適用できなくなる。すなわち、応力に関する d_{ie}, β_{ie} (弾性部分)と関係しない d_{ip}, β_{ip} (塑性部分)に分けなければならぬ。この分割は、式(10)で表わされる法則を満足していなければならぬ。分割のテクニックを示すと、本研究では変形状態を表わす d_{ie}, β_{ie} 座標系と応力状態を表わす $m-s$ 座標系を用いる (Fig. 6 参照)。 $t = t_{p0}$ 時には両座標系は一致しており、その時の変形状態を点Aとする。さらに、時間増分 Δt だけ進んだ $t = t_{p1} (= t_{p0} + \Delta t)$ における変形状態を求めることができ、その点をDとする。ADを直径とする円を描き、interaction curveとの交点をBとする。点Bを $m-s$ 座標系で求めた値から t 時の応力状態を示す。次に点Bを点Dと一致するように $m-s$ 座標系を d_{ie}, β_{ie} 座標系に対して平行移動し、その点をAとする。この方法を繰り返せばよい。 $\overrightarrow{OD}$ が塑性変形の増分を示す。 $\overrightarrow{AD}$ が内側に向えば弾性が復元したことを意味し、 $\overrightarrow{OD}$ は塑性変形として残る。

3. セン断変形と回転慣性の影響

ここで行なう数値解析は主にセン断変形や回転慣性が、衝撃力によるはりの最大応答や残留変形に与える影響、またその影響によってはりの強度がどのように変化するかを注目して行なう。

(1) 計算における仮定 — 計算に用いた

衝撃力は Fig. 7 K 示すように、まず一定荷重 p_0 をはりに等分布に載荷し、スパン中央点が最大応答 Y_m を達した後取り除いたもので、荷重強度 p_0 が決定されれば、最大応答 Y_m や残留変形 Y_r が定まってくる。

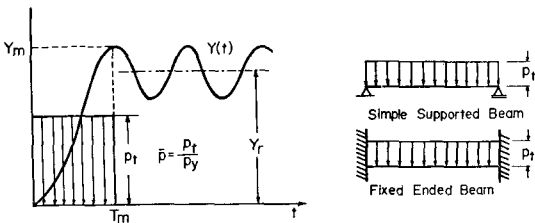


Fig. 7 Impact Force and Dynamic Response

す、計算に使用した断面は土木・建築構造物

に採用されているところの JIS 543192 に定められている H 形鋼を使用した。

Timoshenko はりの interaction curve は次式で示される。なお、本研究に用いた Timoshenko はり

$$m^2 + S^2 - 1 = 0 \quad (12)$$

の計算方法は、stress-hardening の影響を考慮に入れることができないので、Euler はりでは対応上、その影響を無視した $M-\phi$ の関係を使用している。

(2) セン断変形の影響 — セン断変形の影響の度合いは、セン断応力の曲げ応力に対する割合

によって異なってくる。そこで、 $\bar{v} (= v/L)$ 、 $\bar{w} (= w_x/f_w)$ のようなパラメータを考える。 v は I 形断面の析高、 L ははりのスパン長、 w_x は腹板厚、 f_w はフランジ幅である。 $\bar{v}$ は、セン断応力を一定にした場合の曲げ応力の変化を示す。すなわち、 L が大きくなるにつれ曲げモーメントのセン断力に対する割合が大きくなり、また $\bar{v}$ が小さくなるにつれ曲げ応力のセン断応力に対する割合は大きくなる。同様に、 $\bar{w}$ は曲げ応力を一定にした場合のセン断応力を示す。そこで、 $\bar{v}$ によってセン断変形の影響がどのように変化するかを調べてみる。

数値計算結果を Fig. 8、9 に示す。Fig. 8 は単純支持はりの結果、Fig. 9 は両端固定はりについての結果である。ここでは、 $\bar{w} = 0.036$ と腹板厚を一定にしているが、この値は一般の構造物に使用されている H 形鋼の標準的な値である。載荷した衝撃力は $p = 0.6$ で、これは Euler はりが少く塑性領

域に入る荷重強度である。なお、 p_g は静的計算のための弾性限界荷重強度であり、図中の Y は同じく静的計算のための弾性限界力のみである。

解析結果より

① Euler 通りの最大応答 $\bar{Y}_m$ 、残留変形 $\bar{Y}_r$ は $\bar{\alpha}$ に依存する一定である。

② 単純支持はりの場合、 $\bar{\alpha} = 0.05$ ぐらいまでは、せん断変形や回転慣性の影響を考慮に入れている Timoshenko はりによって計算した最大応答 $\bar{Y}_m$ や残留変形 $\bar{Y}_r$ と、これらの影響を無視している Euler はりによる計算結果とはほとんど一

致している。また、せん断残留変形 $\bar{\beta}_r$ もほとんど見られず。しかし、 $\bar{\alpha}$ が0.1 ぐらいになると、Timoshenko はりより求めた $\bar{Y}_m$ の値は Euler はりより約20%程大きく生じており、 $\bar{Y}_r$ の値も約35%程増加している。また、 $\bar{\beta}_r$ も少し表れてきている。 $\bar{\alpha}$ が0.12 ぐらいになると、 $\bar{Y}_m$ は約56%も増加し、 $\bar{Y}_r$ もかなり Euler はりの場合より大きくなる。残留変形はせん断残留変形 $\bar{\beta}_r$ がほとんど占めている。そして、 $\bar{\alpha}$ が0.12 以上になると、Timoshenko はりによって求めた $\bar{Y}_m$ や $\bar{Y}_r$ は急激に増加し、 $\bar{\alpha} = 0.1425$ で、これらの値は無限大になる。以上のことより、衝撃力によるはりの塑性変形には、回転慣性の影響はほとんどみられず。しかし、せん断変形の影響は、 $\bar{\alpha} = 0.10$ ぐらいまではそれほど大きくないが、 $\bar{\alpha} = 0.10$ 以上になるとかなり大きくなり、 $\bar{\alpha} = 0.12$ 以上になるとほぼ無視できなくなる。

③ 両端固定はりの場合は、単純支持はりの場合とほぼ同様の傾向を示しているが、単純支持はりに比べかなり小さい $\bar{\alpha}$ でせん断変形の影響が生じはじめてくる。 $\bar{\alpha} = 0.02$ 付近では、Timoshenko はりで計算した $\bar{Y}_m$ 、 $\bar{Y}_r$ と Euler はりによる $\bar{Y}_m$ 、 $\bar{Y}_r$ とはほとんど一致しているが、 $\bar{\alpha} = 0.05$ 付近では、Timoshenko はりの $\bar{Y}_m$ は約2/3ほど Euler はりより小さく生じている。また、 $\bar{Y}_r$ も0.5ほど生じている。しかし、せん断残留変形 $\bar{\beta}_r$ はまだほとんど生じていない。またこの付近ではそれほど大きいせん断変形の影響はないと思われるが、 $\bar{\alpha} = 0.6$ 付近になると $\bar{Y}_m$ は約45%も大きくなり、 $\bar{Y}_r$ も1.0 ぐらい生じ、せん断残留変形 $\bar{\beta}_r$ も少し表れ、もはやせん断変形の影響は無視することはできなくなってくる。そして、 $\bar{\alpha} = 0.07$ 以上になると、Timoshenko はりの $\bar{Y}_m$ 、 $\bar{Y}_r$ 、 $\bar{\beta}_r$ は急激に増大し、 $\bar{\alpha} = 0.092$ 付近で変形が無限大になる。両端固定はりの場合、単純支持はりよりかなり

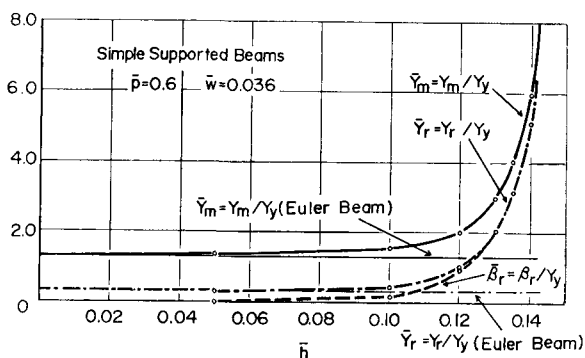


Fig.8 Response of I-Beams with Defferent Lengths

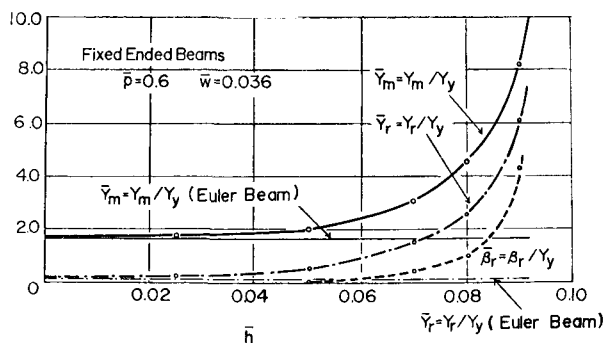


Fig.9 Response of I-Beams with Defferent Lengths

り小さい $\bar{\kappa}$ でせん断変形の影響が表われ、変形が無限大になるのは、単純支持はりの場合支点のせん断力で降伏しても曲げモーメントは存在しないが、両端固定はりでは両端固定でせん断力の他に曲げモーメントが存在するのために、同スパン長の場合単純支持はりより小さいせん断力で降伏し始める。また、 $\bar{\kappa} = 0.06$ ぐらいでせん断変形の影響はあまり全くなくなるが、この程度の $\bar{\kappa}$ の値は一般の構造物で普通に使用されている値である。

④ 単純支持はりの場合、残留変形は $\bar{\kappa}$ の小さいときは曲げ変形によるものが大部分であるが、 $\bar{\kappa}$ が大きくなるとほとんどせん断残留変形を占められてしまう。これに対して、両端固定はりでは $\bar{\kappa}$ が大きくなっても曲げ変形による残留変形は残っている。これも、両端固定にある曲げモーメントの存在による。

(3) 塑性領域における曲げモーメントとせん断力の相互作用

両端固定はりの支点における曲げモーメントとせん断力の相互作用についての計算結果を Fig. 11～14 に示す。Fig. 10 は参考のため Euler はりのせん断力と曲げモーメントの関係で、Fig. 11～14 は Timoshenko はりで、 $\bar{\kappa}$ も次第に大きくして、各場合の相互作用の変化を示している。なお、曲げモーメント M 、せん断力 S は支点におけるものであるが、 Y ははりの中央点の応答である。図は、Fig. 14 を除いては、応答 Y が最大応答 Y_m に達するまでの間の M 、 S 、 Y の時間による変化をプロットしてある。図中の T は、両端固定はりの固有周期である。

計算結果より

① Euler はりでは塑性領域に入ると、1.0 で一定値になる。

② Timoshenko はりの応答は、 $\bar{\kappa} = 0.05$ ではその形は Euler はりに似たものであるが、 $\bar{\kappa} = 0.07$ 以上になると少し異なり、くる。また、最大応答の生じる時間は、 $\bar{\kappa}$ が大きくなるほど遅くなる。

③ Timoshenko はりでは、塑性領域に入る時間はほぼ同じである。

④ $\bar{\kappa} = 0.05$ の場合、 M の方が大きい状態で塑性領域に入るが、塑性領域に入った後、その関係は

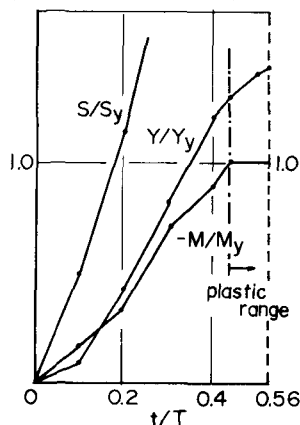


Fig. 10 Euler Beam

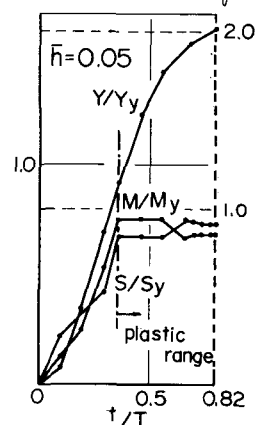


Fig. 11 Timoshenko Beam

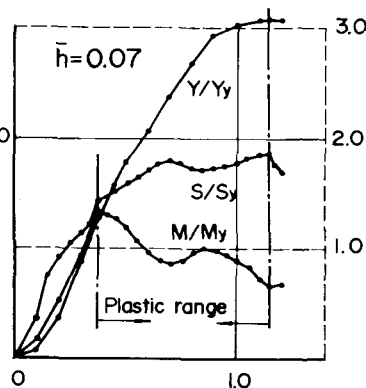


Fig. 12 Timoshenko Beam

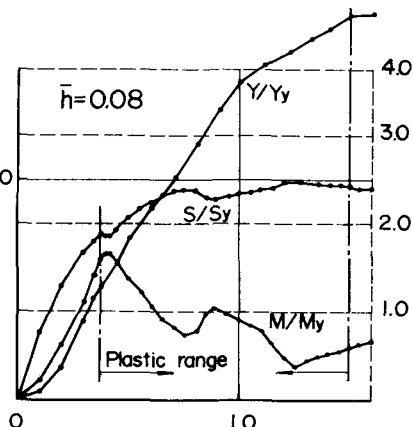


Fig. 13 Timoshenko Beam

並になる。

⑤ $\bar{h}=0.07$ 以上になると、せん断力の方が大きい状態に塑性領域に入り、 $\bar{h}$ が大きくなるにつれその傾向が大きくなる。

⑥ 塑性領域においては、曲げモーメント M とせん断力 S はお互に増減しながら、一方が次第に大きくなり一方は減少する。とくに $\bar{h}=0.09$ ではその傾向は大きく、ある時間になると S は 1.0 に一定になる。

⑦ 以上のことより、 $\bar{h}$ が大きくなると相互作用はかなり大きいものとなる。

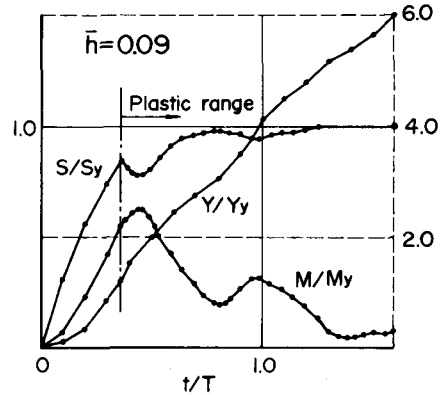


Fig.14 Timoshenko Beam

(4) はりの強度におよぼすせん断変形の影響 これまでの計算結果より、スパン長の比較的短いはりにおいては、せん断変形の影響はかなり大きいことが分る。たゞ、 λ を小さく、はりの衝撃力に対する強度におよぼすせん断変形の影響について検討してみることにする。

数値計算結果は、Fig. 15, 16 に示す。Fig. 15 は単純支持はり、Fig. 16 は両端固定はりの結果である。

・縦軸は衝撃荷重強度 $\bar{p}$ で、横軸は最大応答 $\bar{Y}_m$ を示し、実線は Euler はりによる $\bar{p}-\bar{Y}_m$ で、点線は $\bar{h}$ の異なる、Timoshenko はりによるものである。なお、Euler はりの結果は $\bar{h}$ が異なる、ても変化しない。腹板は $\bar{w}=0.036$ で一定であり、黒く塗り潰した点は、はりの挙動が塑性領域に入り始める点を示す。

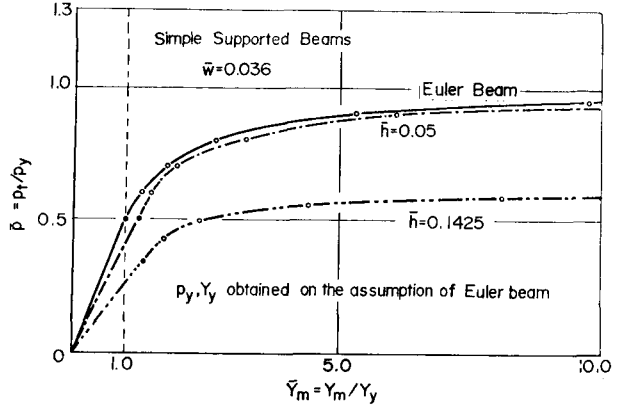


Fig.15 Relationship between $\bar{p}$ and $\bar{Y}_m$

これらの計算結果より

① 単純支持はりの場合、Euler はりでは $\bar{p}=0.5$ で塑性領域に入り始め、変形は次第に増加し、 $\bar{p}=0.95$ を越えると無限に大きくなる。

② $\bar{h}=0.05$ は、Fig. 8 よりせん断変形の影響がほとんど見られない場合の値である。この値のとき、はりが弾性領域を越える $\bar{p}$ の値は Euler はりの場合と等しく、変形が約 25% 程増加するに過ぎない。また、変形が無限に大きくなる $\bar{p}$ の値も Euler はりに比べてわずかに減少しているだけである。このことから、スパン長が大きい場合、衝撃力に対するはりの強度におよぼす

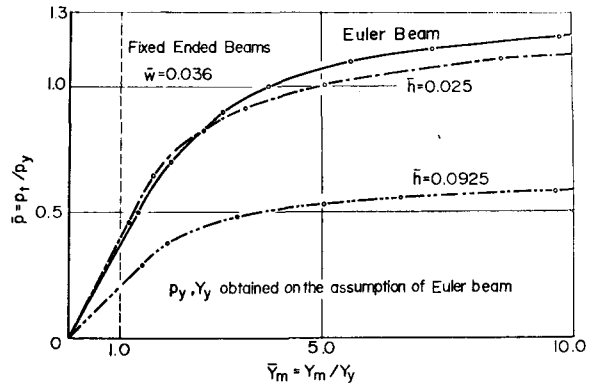


Fig.16 Relationship between $\bar{p}$ and $\bar{Y}_m$

せん断変形の影響はきわめて小さい。

③ $\bar{\kappa} = 0.1425$ は、変形が無限に大きくなる場合である。この場合、変形が弾性領域を越える $\bar{p}$ の値は Euler はりより約 32% も減少し、またその変形量 $\bar{y}_m$ は 32.5% 増加する。また、 $\bar{p}$ が 0.34 を越えると変形は増し、 $\bar{p} = 0.5$ 付近からその増加急激になり、 $\bar{p} = 0.58$ 付近で変形は無限大となる。その時の $\bar{p}$ の値は Euler はりより約 39% も減少する。これから、スパン長の小さいはりでは、せん断変形の影響により、かなりはりの衝撃力に対する強度は減少するといえる。

④ 両端固定はりの場合、Euler はりではやはり $\bar{p} = 0.5$ で塑性領域に入り始めるが、 $\bar{p} = 1.2$ 以上になり変形が無限大になる。これは、単純支持はりの場合中央点に塑性ヒンジができればすぐ降伏し始めるが、両端固定はりでは、まず両端に塑性ヒンジができ、さらに中央点に塑性ヒンジができて降伏しない。

⑤ $\bar{\kappa} = 0.025$ は、せん断変形の影響がほとんど見られない場合の値である。この場合、単純支持はりとは異なり、塑性領域に入り始める $\bar{p}$ は Euler はり約 7.0% 減少する。また変形もめがかりに減少する。そして、Euler はりより約 8% 程小さい $\bar{p}$ で変形が無限大になる。このことより、両端固定はりの場合、スパン長の大きいはりでもはりの強度は少し減少する。

⑥ $\bar{\kappa} = 0.0925$ では、Euler はりより約 42% も小さい $\bar{p}$ で塑性領域に入り、 $\bar{p} = 0.6$ 付近で変形が無限大になっている。この $\bar{p}$ の値の減少の割合は、単純支持はりよりさらに大きく、その値はむしろ単純支持はりの場合に近くなっている。これはスパン長の短いはりではせん断力によって降伏するが、せん断力のカー変形特性は両端固定はりとは単純支持はりの場合と同じである。以上のことより、スパン長の短いはりでは、せん断変形のはりの強度の減少にあきらか影響は大きく、単純支持はりよりさらに大きくなる。

4. おすび

以上の結果から、回転慣性の影響は小さいが、スパン長の短いはりでは、せん断変形の影響によって衝撃力によるはりの塑性変形は増加し、はりの強度は減少するといえる。せん断変形の影響は、(a) せん断変形による慣性力の変化、(b) 弾性領域の減少、(c) 塑性領域における曲げモーメントとせん断力の相対作用、以上3つに分けることができる。これらの影響の中で (a)、(c) の影響は、interaction curve によってかなり異なる。とくる。しかし、interaction curve についての実験データは乏しいのでまだ不明な点が多い。著者は今後この点について、できれば実験などによって確かめを行い、さらに改良を加えたいと考えている。

参考文献

- 1) 土木学会第25回年次学術講演講演集, p 241~244, 同じく26回講演集, p 171~174
- 2) R.K.Wen and N.Beylerian: "Elastic-Plastic Response of Timoshenko Beams", Journal of the Structural Division, Proc. of the ASCE, Vol. 93, No. ST3, June 1967
- 3) J.M. Biggs: Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1964
- 4) P.G. Hodge: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, 1959
- 5) 田中尚: 構造物の極限解析, 建築構造学大系, 章国社, 1966

その他