

複素変数法と選点法の併用による有孔ばりの解法

— 特にキャストレーテッド・ビームの応力解析を対象として —

九州大学工学部 山崎徳也

九州大学工学部 〇後藤恵之輔

1. 序言

ウェブに六角形孔や八角形孔を有する、いわゆるキャストレーテッド・ビームは、近年我国や欧米諸国においてビルや工場、歩道橋などの土木、建築構造物の軽量化と大量生産による経済性を目的とした新工法として多用されている。このキャストレーテッド・ビームは、孔がばり高に比して小さければ、孔部分を単一孔を含む無限板として2次元弾性理論を用いて厳密に解析できるが、大抵の場合は、ばり全体をフラインティール・トラスと見做してフラインティール・トラスの近似解法⁽¹⁾やモーメント分配法⁽²⁾により近似的に解くことができる。しかし、実際には、孔の大きさに関係なく、後者の近似解法を用い、形態上一義的要素として取上げるべき応力集中も当然無視されたまま計算設計されている。本論文は、かかる現状に鑑み、キャストレーテッド・ビームを含む一般任意形孔を有するばりの応力集中をも考慮した理論解法を新たに提案し、有孔ばりの合理的設計も可能ならしめんとするもので、ここでは等分布荷重、両端固定のキャストレーテッド・ビーム(図-1)と例としてその解析解法を述べるとともに、簡単な計算例により本法の適用性を示唆することとする。

2. 解法

(i) 解法の概説

本題のキャストレーテッド・ビームは、構造および荷重の対称性よりばりの1/2部分を取扱えばよい。図-3に示すごとく、ばりも単一孔を含む孔間中心を通る断面で決まる複数のパネルに分り、各パネルについて孔縁と外縁の境界条

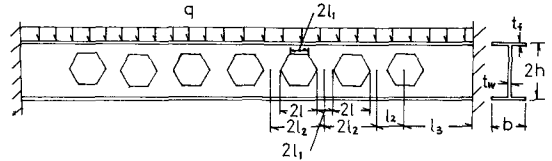


図-1 等分布荷重、両端固定のキャストレーテッド・ビームの諸元

件式および隣接パネルとの連続条件式も満足する応力関数を決定すれば問題は解けることになる。孔縁の境界条件式は Muskhelishvili の複素変数法 (complex variable method) の適用により完全に満足され、外縁の境界条件式および連続条件式は選点法 (point-matching method) により近似的に満足される。

(ii) 写像関数

複素変数法の適用に当っては、孔の外部領域を単位円の外部へ写像する関数を求めることが必要である。我国で市販されているキャストレーテッド・ビームの標準タイプは正六角形孔であるが、この正六角形孔に加えてここではさらに正八角形孔および製作可能な正方形孔についても写像関数を求めれば、いずれも共通の次式で表わされる(図-2参照)。

$$Z = w(\zeta) = R(\zeta + a_{m-1}\zeta^{-m+1} + a_{2m-1}\zeta^{-2m+1}) \quad (1)$$

ここに、 $Z = x + iy$, $\zeta = p \exp(i\theta)$, (x, y) は孔中心を原点とする直角座標, (p, θ) は極座標, R は孔の大きさを与える実数定数, m は孔の辺数を示すもので、 $2m$ は式(1)が $p = 1$ のとき孔縁

も表わすことと決定される実数係数である。

(iii) 応力、変位と応力関数との関係および応力関数の一般式

各パネルにおいて応力関数を $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ とすれば、このりと直角座標における応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ および変位 u, v との関係は次式で与えられる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}[\Phi(z)], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi'(z)] \quad (2)_a$$

$$u + iv = \frac{1}{2\mu} [\kappa \Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}] \quad (3)_a$$

ここに、 Re 記号は $\{\}$ 内の変数や関数の実数部を、 $\overline{}$ 記号はその変数や関数の共役数もそれぞれ意味し、 ∇ 記号は $\{\}$ 内の変数による微分を表わすもので、 μ は Lamé の定数であり、 κ は ν をはり材のポアソン比として次式で定義されるものである。

$$\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$$

式(2)_a, (3)_a の $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ に写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を適用すれば、応力関数は次式のごとく表示される。

$$\Phi(z) = \Phi[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta), \quad \Psi(z) = \Psi[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta)$$

しるべき、式(2)_a, (3)_a と与えられる応力および変位と応力関数との関係は次式に書き換えられる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right\}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left\{\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)}\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right]' + \frac{\psi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right\} \quad (2)_b$$

$$u + iv = \frac{1}{2\mu} \left[\kappa \varphi(\zeta) - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} \overline{\varphi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right] \quad (3)_b$$

さらに、直角座標における応力および変位と変換座標における応力 $\sigma_\theta, \sigma_\phi, \tau_{\theta\phi}$ および変位 u_θ, u_ϕ との関係は次式で与えられる。

$$\sigma_\theta + \sigma_\phi = \sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_\theta - \sigma_\phi + 2i\tau_{\theta\phi} = \frac{5^2 \omega(\zeta)}{\rho^2 \overline{\omega(\zeta)}} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$

$$u_\theta + iu_\phi = \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\rho \overline{\omega(\zeta)}} (u + iv)$$

したがって、変換座標における応力および変位と応力関数との関係は次式のごとくえられる。

$$\sigma_\theta + \sigma_\phi = 4 \operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)}\right\}, \quad \sigma_\theta - \sigma_\phi + 2i\tau_{\theta\phi} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \overline{\omega(\zeta)}} \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right]' + \frac{\psi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \right] \quad (2)_c$$

$$u_\theta + iu_\phi = \frac{1}{2\mu} \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\rho \overline{\omega(\zeta)}} \left[\kappa \varphi(\zeta) - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} \overline{\varphi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right] \quad (3)_c$$

式(2)_b, (3)_b および (2)_c, (3)_c において、応力関数 $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ はそれぞれ次式で仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \\ \psi(\zeta) &= \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)に含まれる B_k, b_k, C_k および c_k は、孔縁と外縁の境界条件式および隣接パネルとの連続条件式より決定される複素数係数である。

(iv) 孔縁の境界条件式および応力関数の係数間の関係

キャストレーテッド・ビームの孔縁には、パイプなどが通っている場合を除いて通常何らの外力も作用してはいないから、いま $\sigma_\theta = \tau_{\theta\phi} = 0$ として各パネルの孔縁における境界条件式として次式が成立する。

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega(\sigma)}} \overline{\varphi(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \quad (5)$$

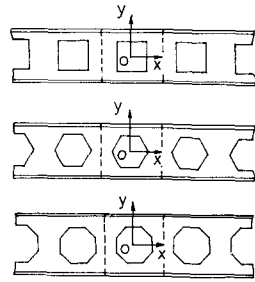


図-2 各種キャストレーテッド・ビーム

$$\text{ここに, } \sigma = (S)_{p=1} = \exp(i\theta)$$

式(5)に式(4)を代入して次式をうる。

$$y_0(\sigma) + y_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} [\overline{y_1(\sigma)} + \overline{y_0(\sigma)}] + \overline{\psi_0(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} = 0 \quad (6)a$$

式(6)aの両辺に $1/2\pi i(\sigma-S)$ を乗じ Cauchy の定理を用いて単位円 $\sigma=1$ のまわりに積分すれば、各項をそれぞれ次のように算定される。

$y_0(\sigma)$ の項: 式(4)を考慮して

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{y_0(\sigma)}{\sigma-S} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=0}^N B_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma-S} = 0 \quad (7)a$$

$y_1(\sigma)$ の項: 同様に式(4)を適用して

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{y_1(\sigma)}{\sigma-S} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=1}^N b_k \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma-S} = -y_1(S) \quad (7)b$$

$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{y_0(\sigma)}$ の項: 式(1)で与えられる写像関数 Z

$$Z = \omega(S) = R(S + \sum_{n=1}^N \lambda_n S^n) \quad (8)$$

ここに, λ_n : 一般的に複素数の係数

と表せば, 次式がえられる。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sigma^{N+j} \quad (9)$$

ここに, 係数 c_j は次式より算定される。

$$\lambda_{N+j} = c_j - \sum_{i=1}^{j-1} d_i c_{j-i-1} \quad (10)$$

一方, 式(4)より次式をうる。

$$\overline{y_0(\sigma)} = \sum_{k=1}^N k \overline{B_k} \sigma^{-(k-1)}$$

$$\text{よって, } \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{y_0(\sigma)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sigma^{N+j} \times \sum_{k=1}^N k \overline{B_k} \sigma^{-(k-1)} = \sum_{p=0}^{N-1} F_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} G_p \sigma^p \quad (11)$$

ここに, 係数 F_p, G_p は次式より c_j と未定係数 B_k の関数として与えられる。

$$F_p = \sum_{r=1}^N r c_{N+r-p-1} \overline{B_r} \quad (12)$$

$$G_p = \sum_{r=1}^N r c_{N+r-p-1} \overline{B_r} \quad (13)$$

$$\text{よって, } \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{y_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-S} = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{p=0}^{N-1} F_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} G_p \sigma^p \right) \frac{d\sigma}{\sigma-S} = - \sum_{p=1}^{N-1} F_p S^{p-k} \quad (7)c$$

$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{y_1(\sigma)}$ の項: 式(4)より

$$\overline{y_1(\sigma)} = - \sum_{k=1}^N k \overline{b_k} \sigma^{k+1}$$

これと式(9)より次式がえられる。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{y_1(\sigma)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sigma^{N+j} \left(- \sum_{k=1}^N k \overline{b_k} \sigma^{k+1} \right) = - \left(\sum_{p=0}^{N-2} f_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} g_p \sigma^p \right) \quad (14)$$

ここに, 係数 f_p, g_p は次式の c_j と未定係数 b_k の関数である。

$$f_p = \sum_{r=1}^{N-p-1} r c_{N+p-r-1} \overline{b_r} \quad (15)$$

$$g_p = \sum_{r=1}^{N-p-1} r c_{N+p-r-1} \overline{b_r} \quad (16)$$

$$\text{よって, } \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{y_1(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-S} = - \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{p=0}^{N-2} f_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} g_p \sigma^p \right) \frac{d\sigma}{\sigma-S} = \sum_{p=1}^{N-2} f_p S^p \quad (7)d$$

$\overline{\psi_0(\sigma)}$ の項: 式(4)を考慮して

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\psi_0(\sigma)}}{\sigma-S} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=0}^N \overline{c_k} \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma-S} = - \sum_{k=1}^N \overline{c_k} S^{-k} \quad (7)e$$

$\overline{\psi_1(\sigma)}$ の項: 同様にして

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\psi_1(\sigma)}}{\sigma-S} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\sum_{k=1}^N \overline{c_k} \sigma^k \right) \frac{d\sigma}{\sigma-S} = 0 \quad (7)f$$

したがって, 式(7)a ~ (7)f を用いて式(6)aの積分結果は次式のようになる。

$$-g_1(s) - \sum_{p=1}^{N+K-1} \bar{F}_p s^{-p} + \sum_{p=1}^{N-2} f_p s^{-p} - \sum_{k=1}^K \bar{C}_k s^{-k} = 0$$

これより

$$g_1(s) = \sum_{p=1}^{N-2} f_p s^{-p} - \sum_{p=1}^{N+K-1} \bar{F}_p s^{-p} - \sum_{k=1}^K \bar{C}_k s^{-k}$$

上式と式(4)の $g_1(s)$ とにおいて s の同一べき数の係数を比較することにより、次の方程式もえる。

$$b_k = \begin{cases} f_k - \bar{F}_k - \bar{C}_k, & k=1, 2, \dots, N-2 \\ -\bar{F}_k - \bar{C}_k, & k=N-1, N, \dots, K \end{cases} \quad (17)$$

式(12), (15)より $\bar{F}_k, f_k$ はそれぞれ B_k, b_k の関数に表わされるやうに、結局 $\bar{C}_k$ は式(17)より応力関数 $g_1(s)$ の係数 B_k, b_k の関数として次式のごとく求められる。

$$\bar{C}_k = \begin{cases} \bar{f}_k - \bar{F}_k - \bar{b}_k, & k=1, 2, \dots, N-2 \\ -\bar{F}_k - \bar{b}_k, & k=N-1, N, \dots, K \end{cases} \quad (18a)$$

次に、式(5)を与えらる境界条件式の共役式を考えれば、式(6a)より直ちに次式もえる。

$$\overline{g_1(\sigma)} + \overline{g_2(\sigma)} + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \{ g_1'(\sigma) + g_2'(\sigma) \} + \psi_0(\sigma) + \psi_1(\sigma) = 0 \quad (6b)$$

式(6b)の両辺に $1/2\pi i(\sigma-s)$ を乗じ、式(6a)と同様に複素積分を行えば、結果は次式となる。

$$-\sum_{k=1}^K \bar{B}_k s^{-k} - \sum_{p=1}^N \bar{G}_p s^{-p} + \sum_{p=1}^N \bar{g}_p s^{-p} - \sum_{k=1}^K \bar{C}_k s^{-k} = 0$$

これより $\bar{C}_k$ の算式として次式もえる。

$$\bar{C}_k = \bar{g}_k - \bar{G}_k - \bar{B}_k, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (18b)$$

式(13), (16)より $\bar{f}_k, \bar{g}_k$ はそれぞれ B_k, b_k の関数として算定されるやうに、式(18b)は応力関数 $g_1(s)$ の係数 B_k, b_k の関数として $\bar{C}_k$ を与えるものである。したがって、式(4)の応力関数は B_k, b_k だけで決定されることになる。

(v) 各パネルの応力関数および外縁の境界条件式と連続条件式

図-3に示すごとく、 $(2n-1)$ の奇数枚を有するキャストレーテッド・ビームを n 個のパネルに分割すると、各パネルの応力関数と外縁の境界条件式および隣接パネルとの連続条件式は次のようになる。

(1) 中央パネル：このパネルは対称性より $1/2$ 部分を取扱えばよく、応力関数は次式のごとく仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(s_1) &= \sum_{k=1,3,5}^K B_k s_1^k + \sum_{k=1,3,5}^K b_k s_1^k \\ \psi(s_1) &= \sum_{k=1,3,5}^K C_k s_1^k + \sum_{k=1,3,5}^K c_k s_1^k \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

いわゆる“換算断面”(h^*)を導

入のうえ外縁の境界条件式を求めれば、上、下縁と h とを次のごとくする。

$$\text{上縁}(y_1 = h^*) \text{ においては } \sigma_y = -\tau_y, \tau_{xy} = 0 \text{ なるやうに } (\sigma_y + i\tau_y)_1 = -\tau \quad (20a)$$

$$\text{下縁}(y_1 = -h^*) \text{ においては } \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \text{ なるやうに } (\sigma_y + i\tau_{xy})_1 = 0 \quad (20b)$$

$$\text{ここに、} h^* = h \sqrt{1 + 2bt_g / w h}$$

隣接パネルとの接合部、すなわち $1-1$ 断面においては、応力および変位の連続性より次式が成立する。

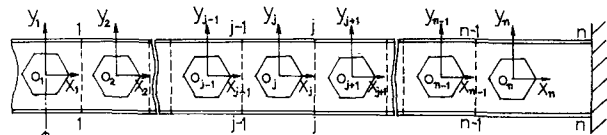


図-3 パネルと座標系

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 \text{ において } (\sigma_x + \sigma_y)_1 &= (\sigma_x + \sigma_y)_2, (\sigma_x - i\tau_{xy})_1 = (\sigma_x - i\tau_{xy})_2 \\ (u_x + iu_y)_1 &= (u_x + iu_y)_2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(2) 任意パネル (中央パネルと端パネルを除く) : 中央パネルについて考えれば, このパネルの応力関数は次式で決定される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(S_j) &= \sum_{k=0,1,2}^k B_{jk} S_j^k + \sum_{k=1,2,3} b_{jk} S_j^{-k} \\ \psi(S_j) &= \sum_{k=0,1,2}^k C_{jk} S_j^k + \sum_{k=1,2,3} c_{jk} S_j^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

上, 下縁の境界条件式としては, それぞれ式(20)a, (20)b と同一式が成立し, 隣接パネルとの接合部である $(j-1)-(j-1)$ 断面および $j-j$ 断面においても, 式(21)と同様な式が成立する。

(3) 端パネル : 端パネルの応力関数は, 任意パネルに同じく次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(S_n) &= \sum_{k=0,1,2}^k B_{nk} S_n^k + \sum_{k=1,2,3} b_{nk} S_n^{-k} \\ \psi(S_n) &= \sum_{k=0,1,2}^k C_{nk} S_n^k + \sum_{k=1,2,3} c_{nk} S_n^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

上, 下縁の境界条件式は前二者と同じく式(20)に表わされ, 隣接パネルとの接合部, すなわち $(n-1)-(n-1)$ 断面においては, 式(21)と同様の連続条件式が成立する。

また, 端部 $n-n$ 断面は固定されているゆえ, $\lambda_2 \gg \lambda_1$, $h \ll L$ とし, この断面において σ_x が直線化し, τ_{xy} が双曲線状に分布するものとして, 次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 = \lambda_3 \text{ において } (\sigma_x - i\tau_{xy})_n &= M_0 y_n / I - i\beta_n L (h^2 - y_n^2) / I \\ (u_x + iu_y)_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここに, M_0 : 端モーメント, L : $1/2$ スパン, I : $n-n$ 断面の断面二次モーメント

(vi) 応力関数の係数の決定

(V) により外縁の境界条件式および隣接パネルとの連続条件式が与えられたが, これら各式に式(2)b, (3)b の関係式を用いて各応力関数を代入すれば, 応力関数の係数 $B_{jk}, b_{jk}, C_{jk}, c_{jk}, B_{nk}, b_{nk}, C_{nk}, c_{nk}$ に関する連立方程式が与えられる。しかし, $C_{jk}, c_{jk}, C_{nk}, c_{nk}$ および B_{nk}, b_{nk} は各孔縁の境界条件式より与えられる式(18)より与えられる $B_{jk}, b_{jk}, B_{jk}, b_{jk}$ および B_{nk}, b_{nk} で表わされるゆえ, 上記連立方程式は B_{jk}, b_{jk} のみに関する方程式となる。この連立方程式を直接解くことは困難であるゆえ, 前者らは外縁および接合部において例えば図-4に示すごとく, 数個の点を選び, これらの点で近似的に満足させるいわゆる選点法を用いることも工夫し, もって応力関数の係数を決定することと可能ならしめた。

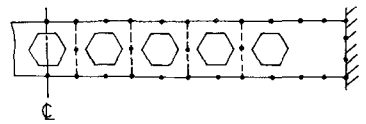


図-4 選点法の適用

3. 計算例

2. で述べた複素変数法と選点法の併用による本法の適用

性および味するため, 図-5に示すごとく最も簡単な算例である

3外縁に等分布荷重が作用する有孔正方形板について, 孔縁に生ずる応力を求め既往の解と比較するとともに, 孔縁応力に及ぼす孔径および荷重状態の影響とを察することとする。

(i) 導線関数および応力関数

有孔 (半径 d) の外部領域を単位円外へ写像する関数は, 式(1)において $R = d$, $a_{m-1} = a_{2m-1} = 0$ と置いて次式が与えられる。

$$Z = \omega(\zeta) = d\zeta \quad (25)$$

したがって、式(4)で仮定される応力関数もその代りに Z の関数として表すことができ、また、解法には荷重および構造の対称性より正方形板の1/4部分を対象とすればよいゆえ、応力関数は次の形式で表示される。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(Z) &= \sum_{k=1,3,5} B_k Z^k + \sum_{k=1,3,5} b_k \bar{Z}^k \\ \bar{\Phi}(\bar{Z}) &= \sum_{k=1,3,5} C_k \bar{Z}^k + \sum_{k=1,3,5} c_k Z^k \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(ii) 応力関数の係数間の関係

応力関数 $\Phi(Z)$ の係数 C_k 、 c_k と応力関数 $\bar{\Phi}(\bar{Z})$ の係数 B_k 、 b_k との関係を求めれば、式(18)を参照して次の結果がえられる。

$$\left. \begin{aligned} C_k &= -b_k d^{-2k} - (k+2) B_{k+2} d^2, \quad k=1,3,5,\dots,K \\ c_1 &= -2 B_1 d^2 \\ c_k &= -B_k d^{2k} + (k-2) b_{k-2} d^2, \quad k=3,5,7,\dots,K \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(iii) 外縁の境界条件式

対象とする1/4部分の側縁($x=a$)および上縁($y=a$)における境界条件式は、それぞれ次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x=a \text{ において} \quad \sigma_x - i \tau_{xy} &= T \\ y=a \text{ において} \quad \sigma_y + i \tau_{xy} &= \lambda T \end{aligned} \right\}$$

さらに、式(27)を考慮のうえ、式(26)で仮定される応力関数も式(2)aの関係式に適用すれば、応力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} も未定係数 B_k 、 b_k を含む関数として表わされ、結局外縁の境界条件式も次の形式で与えられることになる。

$$\left. \begin{aligned} x=a \text{ において} \\ 2 B_1 \left\{ 1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos 2\theta \right\} + \sum_{k=3,5,7} B_k \cdot k r^{k-1} \left\{ 2 \cos(k-1)\theta - (k-1) \cos(k-3)\theta + (k-2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos(k-3)\theta - \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \cos(k+1)\theta \right\} \\ + \sum_{k=1,3,5} b_k \cdot k r^{-(k+1)} \left\{ -2 \cos(k+1)\theta - (k+1) \cos(k+3)\theta + \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \cos(k-1)\theta + (k+2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos(k+3)\theta \right\} = T \\ - 2 B_1 \left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin 2\theta + \sum_{k=3,5,7} B_k \cdot k r^{k-1} \left\{ (k-1) \sin(k-3)\theta - (k-2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin(k-3)\theta - \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \sin(k+1)\theta \right\} \\ + \sum_{k=1,3,5} b_k \cdot k r^{-(k+1)} \left\{ -(k+1) \sin(k+3)\theta - \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \sin(k-1)\theta + (k+2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin(k+3)\theta \right\} = 0 \\ y=a \text{ において} \\ 2 B_1 \left\{ 1 + \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos 2\theta \right\} + \sum_{k=3,5,7} B_k \cdot k r^{k-1} \left\{ 2 \cos(k-1)\theta + (k-1) \cos(k-3)\theta - (k-2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos(k-3)\theta + \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \cos(k+1)\theta \right\} \\ + \sum_{k=1,3,5} b_k \cdot k r^{-(k+1)} \left\{ -2 \cos(k+1)\theta + (k+1) \cos(k+3)\theta - \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \cos(k-1)\theta - (k+2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \cos(k+3)\theta \right\} = \lambda T \\ - 2 B_1 \left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin 2\theta + \sum_{k=3,5,7} B_k \cdot k r^{k-1} \left\{ (k-1) \sin(k-3)\theta - (k-2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin(k-3)\theta - \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \sin(k+1)\theta \right\} \\ + \sum_{k=1,3,5} b_k \cdot k r^{-(k+1)} \left\{ -(k+1) \sin(k+3)\theta - \left(\frac{d}{r}\right)^{2k} \sin(k-1)\theta + (k+2) \left(\frac{d}{r}\right)^2 \sin(k+3)\theta \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、 $r = d\rho$

(iv) 応力関数の係数の決定

$x=a$ および $y=a$ において式(28)に逐点法を適用して、図-6に示すとき6個の点で近似的に満足させる。しかるとき、各点で2個、全点で12個の条件式が成立するゆえ、未知数は B_1, B_3, B_5, B_7, B_9 と b_1, b_3, b_5, b_7, b_9 の12個となる。かくして与えられる12元1次連立方程

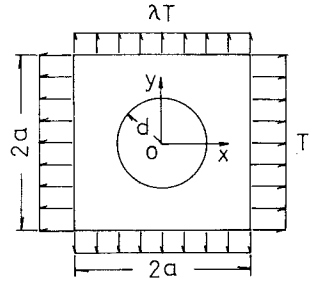


図-5 1 円孔をもつ正方形板

式を解いた結果を、 $\lambda = 1$ すなわち 2 方向等引張りの状態につき
孔径比 ($\mu = d/a$) をパラメーターとして表-1 に示す。

(V) 孔縁応力

孔縁においては $\sigma_p = \tau_{\theta\theta} = 0$ で σ_θ のみが生じ、これを σ_E と記せば、式(2)c の第1式より与えられる次式によつて算定される。

$$\sigma_E = (\sigma_\theta)_{\rho=1} = 4 \operatorname{Re}[\psi(z)]_{\rho=1} \quad (29)$$

表-2 は、上記連立方程式より決定される応力関数 $\psi(z)$ を式(29)に適用して求められた孔縁応力を、3 種の λ に対し μ もパラメーターとして示したもので、表中、

() 内の値は Schläcker, Little 両氏の最小自乗法による解³⁾である。表に見ると、本法は λ の値、すなわち荷重状態の如何にかかわらず、実

用上満足すべき解も与えており、有孔ばりの解析に対しては十分な適用性も有するものと判断される。

孔縁応力は、 $\mu = 0$ すなわち無限板の場合 $\lambda = 1, 0, -1$ の各値に対してそれぞれ 2, 3, 4 の最大応力集中係数値を示す。しかし、本題のふとき有孔板の場合には、最大孔縁応力は、 $\lambda = 1$ のとき μ の増加にかかわらず、すなわち孔径が増しても経増大しないが、 $\lambda = 0, -1$ のときには μ の増加とともに急激に増大し、 $\lambda = -1$ の方が当然著しく現われている。

4. 結び

上記に多数の孔をもつはりば、土木、建築、機械、造船、航空宇宙の工学分野に見られる構造であり、その理論的研究も多く認められるが、

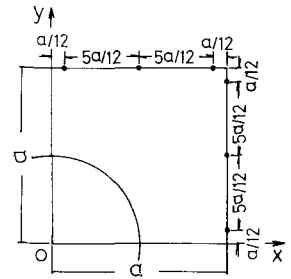


図-6 選点の位置

表-1 応力関数 $\psi(z)$ の係数 ($\lambda = 1$)

k	B_k				b_k			
	$\mu=0.4$	$\mu=0.5$	$\mu=0.6$	$\mu=0.7$	$\mu=0.4$	$\mu=0.5$	$\mu=0.6$	$\mu=0.7$
1	0.5849	0.6450	0.7397	0.8972	-0.1159 $\times 10^{-3}$	-0.2712 $\times 10^{-7}$	-0.8053 $\times 10^{-1}$	-0.4114 $\times 10^{-8}$
3	-0.1349 $\times 10^{-2}$	-0.3190 $\times 10^{-7}$	-0.7195 $\times 10^{-9}$	-0.2565 $\times 10^{-5}$	0.1479 $\times 10^{-3}$	0.1062 $\times 10^{-2}$	0.5438 $\times 10^{-1}$	-0.2736 $\times 10^{-1}$
5	0.9578 $\times 10^{-2}$	0.1912 $\times 10^{-1}$	0.3589 $\times 10^{-1}$	0.7686 $\times 10^{-1}$	-0.5010 $\times 10^{-6}$	0.1217 $\times 10^{-12}$	0.5987 $\times 10^{-12}$	-0.8515 $\times 10^{-12}$
7	-0.6581 $\times 10^{-3}$	-0.8930 $\times 10^{-12}$	-0.2641 $\times 10^{-10}$	-0.1336 $\times 10^{-7}$	0.6461 $\times 10^{-6}$	0.3697 $\times 10^{-6}$	0.8911 $\times 10^{-8}$	0.1720 $\times 10^{-9}$
9	0.6587 $\times 10^{-3}$	0.1691 $\times 10^{-2}$	0.3535 $\times 10^{-2}$	0.8785 $\times 10^{-2}$	0.1226 $\times 10^{-9}$	-0.2060 $\times 10^{-5}$	-0.5859 $\times 10^{-4}$	-0.1127 $\times 10^{-12}$
11	0.6736 $\times 10^{-2}$	-0.3387 $\times 10^{-1}$	-0.5647 $\times 10^{-1}$	-0.1416 $\times 10^{-1}$	-0.6638 $\times 10^{-12}$	-0.3629 $\times 10^{-7}$	-0.4420 $\times 10^{-7}$	-0.3432 $\times 10^{-5}$

表-2 孔縁応力

(a) $\lambda = 1$

θ	σ_t / T			
	$\mu=0.4$	$\mu=0.5$	$\mu=0.6$	$\mu=0.7$
0°	2.278 (2.264)	2.398 (2.408)	2.537 (2.595)	2.536 (2.839)
10°	2.292 (2.281)	2.442 (2.450)	2.642 (2.694)	2.807 (3.078)
20°	2.328 (2.324)	2.551 (2.555)	2.899 (2.926)	3.471 (3.595)
30°	2.370 (2.371)	2.671 (2.667)	3.172 (3.156)	4.132 (4.027)
40°	2.399	2.747	3.335	4.472
45°	2.404 (2.406)	2.758 (2.746)	3.356 (3.304)	4.511 (4.240)

ほとんどが円孔列⁴⁾に限定され、稀に楕円孔列⁵⁾に関するものが見受けられるのみで、他の形状孔も考察したものは皆無のようである。しかるに、本論文に示す複素変数法と逐点法の併用による解法は、単にキャステレーテッド・ビームにとどまらず、円孔列、楕円孔列を有するはりやこれら諸形状孔の任意の組合せを有するはりなどを含め、一般任意形状孔を有するはりに適用でき、さらに有孔板の曲げ問題にも応用可能な汎用解法であり、新形式の各種有孔はりや有孔板の開発の理論的根拠を与えるものと確信する。

参考文献

- 1) M.D.Altfillish, B.R.Cooke, and A.A.Toprac: An Investigation of Welded Open-Web Expanded Beams, Weld.Jour., Vol.22, No.2, Feb. 1957, pp.77-s-88-s.
- 2) J.Kolosowski: Stresses and Deflections in Castellated Beams, Struct.Eng., Vol.42, No.1, Jan. 1964, pp.19-24.
- 3) A.L.Schlack and R.W.Little: Elastostatic Problem of a Perforated Square Plate, Proc.ASCE, Vol.90, No.EM5, Oct.1964, pp.171-187.
- 4) 代表的なものとして
R.C.J.Howland: Stresses in a Plate Containing an Infinite Row of Holes, Proc.Roy.Soc.Lond., Ser.A, Vol.148, 1935, pp.471-491.
石田誠: 円孔列を有する無限板の二次元問題, 日本機械学会論文集, 才25巻, 才159号, 昭和34年11月, pp.1118-1124.
- 5) 西谷弘信: 楕円孔列を有する無限板の引張り, 日本機械学会論文集, 才29巻, 才197号, 昭和38年1月, pp.79-83.

(b) $\lambda = 0$

θ	σ_t/T			
	$\mu=0.4$	$\mu=0.5$	$\mu=0.6$	$\mu=0.7$
0°	-2.408	-4.089	-6.859	-13.29
10°	-2.167	-3.662	-6.099	-11.60
20°	-1.500	-2.517	-4.112	-7.163
30°	-0.5385	-0.9821	-1.639	-2.118
40°	0.5657	0.6312	0.6475	1.223
50°	1.690	2.189	2.687	3.249
60°	2.736	3.678	4.811	6.249
70°	3.605	5.011	7.011	10.63
80°	4.188	5.969	8.741	14.41
90°	4.395 (4.752)	6.320 (6.283)	9.396 (9.065)	15.82 (16.34)

(c) $\lambda = -1$

θ	σ_t/T			
	$\mu=0.4$	$\mu=0.5$	$\mu=0.6$	$\mu=0.7$
0°	-7.037 (-7.240)	-10.61 (-10.16)	-16.26 (-15.53)	-29.11 (-29.84)
10°	-6.571 (-6.782)	-9.793 (-9.452)	-15.10 (-14.27)	-26.01 (-26.56)
20°	-5.278 (-5.484)	-7.590 (-7.513)	-11.12 (-10.97)	-17.80 (-18.79)
30°	-3.408 (-3.547)	-4.620 (-4.761)	-6.450 (-6.658)	-8.367 (-10.36)
40°	-1.244	-1.465	-2.040	-2.026
45°	(0 0)	(0 0)	(0 0)	(0 0)