

有限変形理論によるR.C.および合成桁の弾塑性解析

九州大学工学部 山崎 徳也
宮崎大学工学部 太田 俊昭

1. 序言

R.C.および合成桁は、引張に強い鋼材と圧縮に強いコンクリートを効果的に組合せて、曲げ部材としての機能を生かした極めて経済性の高い構造形式であり、今日、その施工例は土木および建築構造分野において数多く見られる。その設計計算は、通常単純な弾性理論に基づいて行われているが、これを粘弾塑性複合体と見做して解析すれば、崩壊荷重ならびに許容たわ量などに基づき合理的な安全率が見い出せるゆえ、より厳密かつ経済的な設計が可能となる。

かかる分野に関しては、既にJ.N.Kar⁽¹⁾, C.E.Eckeberg⁽²⁾, R.C.Fenwick⁽³⁾, I.O.Oladapo⁽⁴⁾, J.W.Roderick⁽⁵⁾およびH.Robinson⁽⁶⁾らによる基礎的研究があるが、いずれもこの種桁の破壊性状を左右する諸因子すなわち、コンクリート固有の粘弾塑性や亀裂およびコンクリートと鋼材の付着、さらには桁の変形の有限性などを総て網羅する一般理論解ではない。

本研究は、R.C.および合成桁の粘弾塑性有限変形理論の体系的確立を目的とし、その第1段階として軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受けるこの種桁のコンクリート部の亀裂を考慮した弾塑性有限変形についての解析を試みたものである。すなわち、鋼材およびコンクリートの応力-歪曲線にそれぞれ図-1および図-3に示すとき曲線を採用し、これらに基づいて軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受ける断面応力と歪さらには曲率の算定公式を導き、かつ補正エネルギー法に有限変形理論を導入することにより、かかる桁の弾塑性挙動ならびに力学的諸特性を解明把握せんとしたものである。

2. 応力ならびに歪

鋼材の応力-歪曲線を歪硬化の影響を考慮した図-1に示すときBilinearの折線でモデル化すれば、弾性および塑性応力状態を包含する鋼材の応力-歪曲線式は、歪 ϵ_s の1次式で次のごとく一般表示される。

$$\sigma_s = \mu_s(\epsilon_s - \epsilon_s^0) \quad (1)$$

ただし σ_s, ϵ_s : 鋼材の応力および歪, μ_s, ϵ_s^0 : 表-1に示す定数。

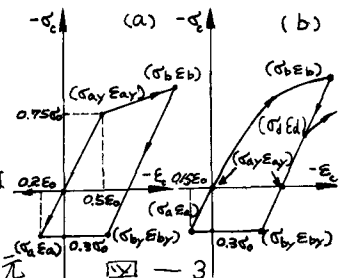
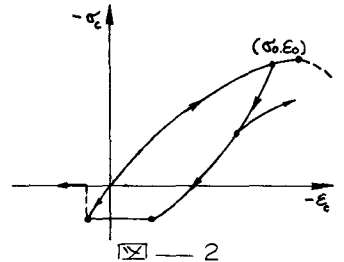
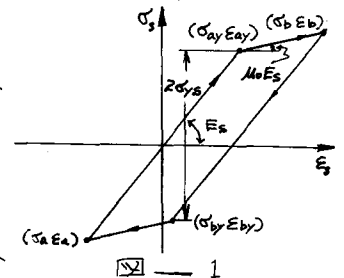
一方、コンクリートの応力-歪曲線は、一般に図-2のようになるゆえ、本論文では、これを図-3のごとく1次もしくは2次曲線で置換する。

すなわち、コンクリートの応力-歪曲線式は、一般に

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c &= \mu_c \epsilon_c + f(\epsilon_c) \\ f(\epsilon_c) &= \nu_c' + \gamma_c' \epsilon_c^2 \\ \text{または} \\ f(\epsilon_c) &= \nu_c' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに σ_c, ϵ_c はコンクリートの応力、歪を表わし、また係数 ν_c, μ_c, γ_c はコンクリートの材質、材令によって定まる定数である。

ここで $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0, \bar{\epsilon} = \epsilon/\epsilon_0$ を用いて式(1), (2)を無次元



化すれば、それぞれ

$$\bar{\sigma}_s = \mu_s (\bar{\epsilon}_s - \bar{\epsilon}_s^0) \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_c = \mu_c \bar{\epsilon}_c + f(\bar{\epsilon}_c) \quad (4)$$

たに、 $\mu_s = \mu'_s \epsilon_0 / 100$, $f(\bar{\epsilon}_c) = \nu_c + \eta_c \bar{\epsilon}_c^2$, $\nu_c = \nu'_c / 100$,
 $\mu_c = \mu'_c \epsilon_0 / 100$, $\eta_c = \eta'_c \epsilon_0^2 / 100$, η'_s, η'_c : 鋼材降伏応力 $\bar{\epsilon}_s$ に至る,
 ν_c, μ_c, η_c : 表-2 に示すとき定数,

ϵ_0, ϵ_0 : コンクリートの圧縮極限応力および歪。

さて、桁の断面の上縁および下縁の歪をそれぞれ ϵ_u および ϵ_d とし、平面保持の法則を仮定すれば、任意点 k の歪 ϵ_k は図-4 より次式で与えられる。

$$\bar{\epsilon}_k = (1 - \bar{y}_k / \bar{y}_h) \left(\frac{\bar{\epsilon}_d}{\bar{\epsilon}_u} \right) \quad (5)$$

たに、 $\bar{y}_k = y_k / h$, $\bar{\epsilon}_c = \epsilon_c / \epsilon_0$, $\bar{\epsilon}_u = \epsilon_u / \epsilon_0$, $\bar{\epsilon}_d = \epsilon_d / \epsilon_0$,
 y_k : 下縁より任意点 k までの距離, h : 桁高。

さて任意点 k の応力は、式(3)、(4)に式(5)を代入して

$$\bar{\sigma}_{sk} = (\mu_{sk}(1 - \bar{y}_k) / \mu_{sh} \bar{y}_h) \left(\frac{\bar{\epsilon}_d}{\bar{\epsilon}_u} \right) - (\mu_{sk} \bar{\epsilon}_{sk}^0) \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{ck} = (\mu_{ck}(1 - \bar{y}_k) / \mu_{ch} \bar{y}_h) \left(\frac{\bar{\epsilon}_d}{\bar{\epsilon}_u} \right) + f(\bar{\epsilon}_{ck}) \quad (7)$$

式(6)、(7)より断面全部の応力が算定可能となるが、この場合歪が表-1および表-2で定義された各Stepのうち、どのStepにあるかを判別し、式(6)、(7)の未知係数 μ_s, μ_c, η_c および $\bar{\epsilon}_{sk}^0$ を決定する必要があり、その判別操作プログラムを図-5、6 に示した。

3. 曲率の算定式

軸力 N と曲げモーメント M の組合せ負荷を受ける桁断面に働く外力と内力の釣合、式は一般に次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -dh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \sigma dA_0 \\ -\int \sigma y dA_0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

たに、 dA_0 : 微小面積, dh : 純曲げの場合の中点より下縁までの距離

式(8)に式(6)、(7)を代入のうえ無次元化すれば

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -d/d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \end{pmatrix} = \left(\frac{\int \mu_s (1 - \bar{y}) dA_0 + \int \mu_c (1 - \bar{y}) dA_0}{\int \mu_s \bar{y} dA_0 + \int \mu_c \bar{y} dA_0} \right) \left(\frac{\bar{\epsilon}_d}{\bar{\epsilon}_u} \right) - \left(\frac{\int \mu_s \bar{\epsilon}_s^0 dA_0 - \int f(\bar{\epsilon}_c) dA_0}{\int \mu_s \bar{\epsilon}_s^0 dA_0 - \int f(\bar{\epsilon}_c) dA_0} \right) \quad (9)$$

たに、 $\bar{M} = M / M_0$, $\bar{N} = N / N_0$, A_0 : 断面積,

M_0, N_0 : 無次元化のための基準モーメント および軸力,

Step	Range	μ_s'	ϵ_s^0
1	$\epsilon_a < \epsilon_s \leq \epsilon_{ay}$	E_s	$\epsilon_a - \bar{\sigma}_a / E_s$
2	$\epsilon_{ay} < \epsilon_s \leq \epsilon_b$	$\mu_c E_s$	$\epsilon_{ay} - \bar{\sigma}_{ay} / \mu_c E_s$
3	$\epsilon_b \leq \epsilon_s < \epsilon_b$	E_s	$\epsilon_b - \bar{\sigma}_b / E_s$
4	$\epsilon_a \leq \epsilon_s < \epsilon_{ay}$	$\mu_c E_s$	$\epsilon_{ay} - \bar{\sigma}_{ay} / \mu_c E_s$

$\bar{\sigma}_{ay} = \epsilon_a + 2\bar{\sigma}_{ys}$, $\bar{\sigma}_{by} = \epsilon_b - 2\bar{\sigma}_{ys}$
 $\bar{\sigma}_{by} = \bar{\sigma}_a + 2\bar{\sigma}_{ys}$, $\bar{\sigma}_{by} = \bar{\sigma}_b - 2\bar{\sigma}_{ys}$

表-1

(1次式の場合)			
Step	Range	ν_c	μ_c
1	$\bar{\epsilon}_{ay} < \bar{\epsilon}_c < \bar{\epsilon}_b$	$\bar{\epsilon}_{ay} - \bar{\sigma}_{ay} / 0.5$	0.5
2	$\bar{\epsilon}_b < \bar{\epsilon}_c < \bar{\epsilon}_{ay}$	$\bar{\epsilon}_b - \bar{\sigma}_b / 1.5$	1.5
3	$\bar{\epsilon}_{by} < \bar{\epsilon}_c < 0.2$	0.3	0
4	$\bar{\epsilon}_{ay} < \bar{\epsilon}_c < \bar{\epsilon}_a$	$\bar{\epsilon}_a - \bar{\sigma}_a / 1.5$	1.5
5	$\bar{\epsilon}_c > 0.2$	0	0

$$\bar{\epsilon}_{by} = (0.3 - \bar{\sigma}_b) / 1.5 + \bar{\epsilon}_b, \bar{\epsilon}_{ay} = \bar{\epsilon}_a - 0.7$$

$$\bar{\sigma}_{ay} = 1.5(\bar{\epsilon}_{ay} - \bar{\epsilon}_a) + \bar{\sigma}_a, \bar{\sigma}_{by} = 0.3$$

(2次式の場合)

Step	Range	ν_c	μ_c	η_c
1	$\bar{\epsilon}_b \leq \bar{\epsilon}_c \leq \bar{\epsilon}_d$	$-\bar{\epsilon}_d(2 - \bar{\epsilon}_d)$	$2(1 - \bar{\epsilon}_d)$	1
2	$\bar{\epsilon}_b \leq \bar{\epsilon}_c \leq \bar{\epsilon}_{ay}$	$\bar{\sigma}_b - 2\bar{\epsilon}_b$	2	0
3	$\bar{\epsilon}_{ay} < \bar{\epsilon}_c \leq \bar{\epsilon}_a$	$\bar{\sigma}_{ay} - 2\bar{\epsilon}_{ay}$	2	0
4	$\bar{\epsilon}_a < \bar{\epsilon}_c \leq 0.15$	0.3	0	0
5	$\bar{\epsilon}_c > 0.15$	0	0	0

$\bar{\sigma}_b = 2(\bar{\epsilon}_b - \bar{\epsilon}_d) + (\bar{\epsilon}_b - \bar{\epsilon}_d)^2$, $\bar{\epsilon}_{ay} = \bar{\epsilon}_b - \bar{\sigma}_b / 2$
 $\bar{\epsilon}_a = \bar{\epsilon}_{ay} + 0.15$, $\bar{\sigma}_{ay} = 0$, $\bar{\sigma}_{by} = 0.3$

表-2

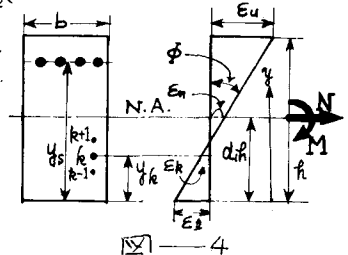


図-4

$\bar{\epsilon}_a, \bar{\epsilon}_b, \bar{\epsilon}_{ay}, \bar{\epsilon}_{by}$ の初期値

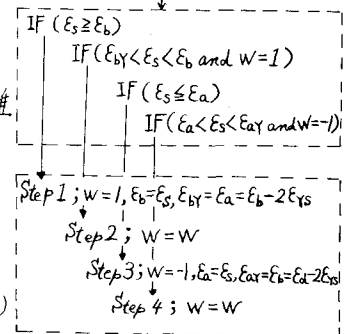


図-5

A_s : 鋼材の断面積, A_c : コンクリートの断面積,

$$d_o = h N_o / M_o$$

一方、曲率中おしび中立軸の歪 ϵ_n (純曲げの場合) は、それぞれ (4) - (4) より

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (\epsilon_e - \epsilon_u) / h \\ \epsilon_n &= (1 - d_1) \epsilon_e + d_1 \epsilon_u \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

で与えられるゆえにおしび ϵ_n をそれぞれ M_o に対応する曲率 ϕ_o おしび ϵ_o に無次元化したうえで、式(9)を代入して整理すれば結局次式がえられる。

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \epsilon_n \end{pmatrix} = (G_o) + (H_o) \begin{pmatrix} \bar{M} \\ \bar{N} \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここに $\phi = \phi / \phi_o$, $\bar{\epsilon}_n = \epsilon_n / \epsilon_o$,

$$(G_o) = \begin{pmatrix} d_2 & -d_2 \\ -d_1 & d_1 \end{pmatrix} (g)^{-1} (f), \quad (H_o) = \begin{pmatrix} d_2 - d_2 & 0 \\ -d_1 & d_1 \end{pmatrix} (g)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -d_{o1} \end{pmatrix},$$

$$(g) = \begin{pmatrix} \int_{A_o} \mu_s (1 - \bar{y}) dA_o + \int_{A_c} \mu_c (1 - \bar{y}) dA_o / A_o & \int_{A_o} \mu_s \bar{y} dA_o + \int_{A_c} \mu_c \bar{y} dA_o / A_o \\ d_o \left\{ \int_{A_o} \mu_s (1 - \bar{y}) \bar{y} dA_o + \int_{A_c} \mu_c (1 - \bar{y}) \bar{y} dA_o / A_o \right. & \left. d_o \left\{ \int_{A_o} \mu_s \bar{y}^2 dA_o + \int_{A_c} \mu_c \bar{y}^2 dA_o / A_o \right\} \right\}$$

$$(f) = \begin{pmatrix} \int_{A_o} \mu_s \bar{\epsilon}_s dA_o - \int_{A_c} f(\bar{\epsilon}_c) dA_o / A_o \\ d_o \left\{ \int_{A_o} \mu_s \bar{\epsilon}_s \bar{y} dA_o - \int_{A_c} f(\bar{\epsilon}_c) \bar{y} dA_o / A_o \right\} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \phi_o h / \epsilon_o$$

よって式(5), (6), (7) おしび式(11) を用いれば、任意の M おしび N が与えられる場合の応力-歪さらには、 ϕ , $\bar{\epsilon}_n$ が算定可能となり、その Flow Chart は図-7 のごとくなる。

次に、矩形断面 R.C. 桁 おしび T 字形合成桁について式(11)の係数行列を形成する (g) , (f) を考察してみる。

1) 矩形断面 R.C. 桁

図-8 に示す $h \times b$ の矩形断面 R.C. 桁を対象に選ぶ。

まず、無次元化に必要な M_o おしび ϕ_o として、桁上縁の亀裂発生時の曲げモーメント M_{yc} おしび曲率 ϕ_{yc} を採用し、応力-歪曲線に 1 次式を用いれば、弾性計算より M_{yc} おしび ϕ_{yc} がそれぞれ

$$M_o = M_{yc} = 0.30 \sigma_b h^2 \{ 2\beta_1 - 1 - 3(\beta_1 - 1)\bar{y}_s \} / 6$$

$$\phi_o = \phi_{yc} = \epsilon_o (1 + \beta_1) / 5 h \beta_1$$

$$\text{したがって } \beta_1 = \{ 0.5 + \beta_o (1 - \bar{y}_s) \} / \{ 0.5 + \beta_o \bar{y}_s \}$$

$$\beta_o = E_s (A_s / A_o) (\epsilon_o / 1.5 \sigma_o), \quad \bar{y}_s = y_s / h,$$

y_s : 桁下縁より鉄筋までの距離。

特に、応力-歪曲線に 2 次式を用いた場合は、それぞれ次の諸値となる。

$$M_o = M_{yc} = \sigma_o b h^2 (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

$$\phi_o = \phi_{yc} = 0.15 \epsilon_o / (1 - \bar{y}_o) h$$

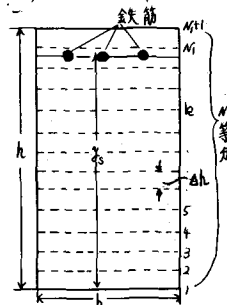
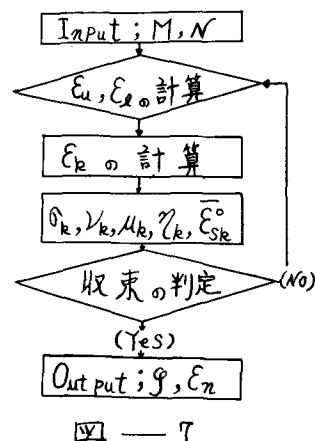
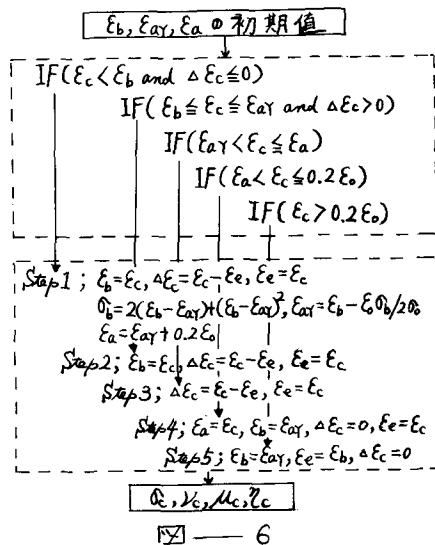


図-8

$$\begin{aligned}
A_1 &= 4\bar{y}_0^3 \bar{E}_2 + 2(3\bar{y}_0^2 - 2\bar{y}_0^3) \bar{E}_2, \\
A_2 &= 15\bar{y}_0^4 \bar{E}_1 + (4\bar{y}_0^3 - 3\bar{y}_0^4) \bar{E}_1 \bar{E}_2 + 0.5(6\bar{y}_0^2 - 8\bar{y}_0^3 + 3\bar{y}_0^4) \bar{E}_2^2, \\
A_3 &= 4(1 - \bar{y}_0^3) \bar{E}_1 + 2(1 - 3\bar{y}_0^2 + 2\bar{y}_0^3) \bar{E}_2, \\
A_4 &= 6 E_s (E_s / \sigma_s) \{ \bar{y}_s \bar{E}_1 + (1 - \bar{y}_s) \bar{E}_2 \} \bar{y}_s (A_s / A_0), \\
\bar{E}_1 &= 0.15, \quad \bar{E}_2: \int \sigma dA = 0 \text{ の条件を満足する下縁の歪を } \bar{E}_2 \text{ で除いた値}, \\
\bar{y}_0 &= \bar{E}_2 / (\bar{E}_2 - 0.15)
\end{aligned}$$

次に、曲率算定式の行列 $(g), (f)$ の要素 g_{ij}, f_{ij} を求めるため、断面を N_s 等分 (台形公式) を用いて近似積分を行えば、 g_{ij}, f_{ij} はそれぞれ下記の諸値となる。

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \frac{\Delta \bar{h}}{2} \sum_{k=1}^{N_s} \{ \mu_{ck} (1 - \bar{y}_k) + \mu_{ck+1} (1 - \bar{y}_{k+1}) \} + \mu_s A_s (1 - \bar{y}_s) / A_0 \\
g_{12} &= \frac{\Delta \bar{h}}{2} \sum_{k=1}^{N_s} \{ \mu_{ck} \bar{y}_k + \mu_{ck+1} \bar{y}_{k+1} \} + \mu_s A_s \bar{y}_s / A_0 \\
g_{21} &= \frac{\alpha_0 \Delta \bar{h}}{6} \sum_{k=1}^{N_s} \{ (3\bar{y}_k + \Delta \bar{h}) \mu_{ck} (1 - \bar{y}_k) + (3\bar{y}_k + 2\Delta \bar{h}) \mu_{ck+1} (1 - \bar{y}_{k+1}) \} + \alpha_0 \mu_s A_s \bar{y}_s (1 - \bar{y}_s) / A_0 \\
g_{22} &= \frac{\alpha_0 \Delta \bar{h}}{6} \sum_{k=1}^{N_s} \{ (3\bar{y}_k + \Delta \bar{h}) \mu_{ck} \bar{y}_k + (3\bar{y}_k + 2\Delta \bar{h}) \mu_{ck+1} \bar{y}_{k+1} \} + \alpha_0 \mu_s A_s \bar{y}_s^2 / A_0 \\
f_{11} &= \frac{\Delta \bar{h}}{2} \sum_{k=1}^{N_s} \{ f(\bar{E}_{ck}) + f(\bar{E}_{ck+1}) \} + \mu_s A_s \bar{E}_s^2 / A_0 \\
f_{12} &= \frac{\Delta \bar{h}}{2} \sum_{k=1}^{N_s} \{ (3\bar{y}_k + \Delta \bar{h}) f(\bar{E}_{ck}) + (3\bar{y}_k + 2\Delta \bar{h}) f(\bar{E}_{ck+1}) \} + \alpha_0 \mu_s A_s \bar{y}_s \bar{E}_s^2 / A_0
\end{aligned}$$

ただし $\Delta \bar{h} = \Delta h / h$, Δh : 分割長さ, $N_0 = \sigma_s b / h$

以上の誘導諸式を用いて断面諸元から $h = 55 \text{ cm}$, $b = 40 \text{ cm}$, $y_s = 51 \text{ cm}$, $A_s / A_0 = 0.01$, $E_s = 1.62 \times 10^3$, $\rho_s = 2.1 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_s = 300 \text{ kg/cm}^2$, $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ の単鉄筋コンクリート桁の $M/M_0 - \phi/\phi$ 曲線を求めれば $\bar{N} = N/N_0 = 0, 0.1, 0.2$ に対してそれぞれ図-9 のとき結果をうる。図-9 より軸圧縮の作用によって曲げ剛性は著しく高められ、一種の P.C. 効果が生ずることが分かる。

2) T 字形断面の合成桁

図-10 に示すときコンクリートスラブと I 形鋼材とを結合された T 字形の合成桁について矩形断面の場合と同様の考察を行えば以下のとおりである。

すなわち、コンクリートの応力-歪曲線に 1 次式を用い、 M_0, ϕ_0 として桁上縁の圧縮応力か弾性限界時の応力 $0.75\sigma_s$ (図-3a の直線 A-B の屈折点に相当する。) となる場合の曲げモーメント M_{y1} および曲率 ϕ_1 を採用すれば (図-10S)

$$\begin{aligned}
M_{y1} &= M_{y2} = 0.75 \sigma_s A_0 h \left[\beta_2 \{ 2 \bar{A}_s n_1 (\bar{E}_2^3 - \bar{E}_1^3) h_1 \right. \\
&\quad \left. + 2 \bar{A}_0 (1 - \bar{E}_1^3) / h_2 + 3 \bar{A}_1 n_1 (\bar{y}_1^3 + \bar{y}_2^3) \} \right. \\
&\quad \left. - [\bar{A}_s n_1 \{ 3(\bar{E}_2^3 - \bar{E}_1^3) - 2(\bar{E}_2^2 - \bar{E}_1^2) / h_1 \} \right]
\end{aligned}$$

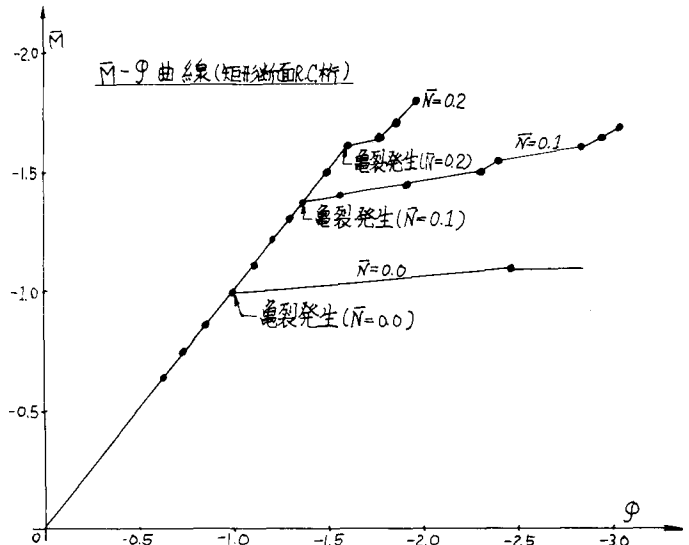


図 — 9

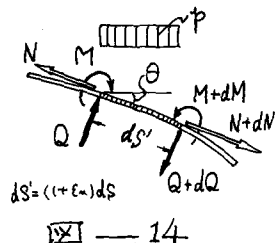
4. 補正エネルギー法

1) 補正エネルギーの定義

構造物の変形成分を u_i , それに対応する一般力を F_i とする

$$u_i = \frac{\partial C}{\partial F_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

の関係をも唯一の条件とする関数 $C = C(F_1, F_2, F_3, \dots)$ を考える。



一方, この構造物に貯えられる歪エネルギー U の増分 dU は, 一般に次式で与えられる。

$$dU = \sum F_i du_i \quad (13)$$

$$\text{式(12), (13) より} \quad dC = \sum u_i dF_i = \sum d(u_i F_i) - \sum F_i du_i$$

$$\text{ゆえに} \quad dC = \sum d(u_i F_i) - dU$$

両辺を積分して

$$C = \sum u_i F_i - U \quad (14)$$

この C を補正エネルギーと定義する。

2) 部材要素に対する補正エネルギー

桁を適当な数に区分し, k 番目の分割桁 (これを部材要素 k と名付ける。) に式(14)を適用すれば, 次式が成立する。

$$C_k = \sum F_{ki} u_{ki} - U_k \quad (15)$$

ただし F_{ki} : 部材要素 k に加一般力, u_{ki} : F_{ki} に対応する変形成分, U_k : 部材要素 k の歪エネルギー

さて, 桁全体の補正エネルギー C は

$$C = \sum_k C_k = \sum_k \sum F_{ki} u_{ki} - \sum_k U_k \quad (16)$$

さて, 長さ ds の部材要素が 図-14 のとき外力を受けて最終平衡状態にあるものとする。この時生ずる歪エネルギーは

$$dU = U_0 ds' \quad (17)$$

ここに U_0 は, 単位長さ当たりの歪エネルギーであり, 一般に軸力と曲げモーメントを受ける桁の場合には次式で与えられる。

$$U_0 = \int M d\phi + \int N d\epsilon_n \quad (18)$$

また, この部材要素に貯えられる補正エネルギー dC は, 式(16)より

$$dC = M \{ \theta + \phi (1 + \epsilon_n) ds/2 \} + (M + dM) \{ -\theta + \phi (1 + \epsilon_n) ds/2 \} + V (1 + \epsilon_n) ds \sin \theta + H \{ (1 + \epsilon_n) \cos \theta - 1 \} ds - dU$$

高次の微小項を省略し, $dC = C_0 ds$ とおけば, C_0 が次式で求められる。

$$C_0 = M \phi (1 + \epsilon_n) - \frac{dM}{ds} \theta + N \epsilon_n + V \sin \theta + H (\cos \theta - 1) - U_0 (1 + \epsilon_n) \quad (19)$$

ここに $N = V \sin \theta + H \cos \theta$, $ds' = (1 + \epsilon_n) ds$, V : 鉛直反力, H : 水平反力, θ : 水平軸と部材要素との接角。式(19)に式(18)を代入のうえ整理すれば

$$C_0 = \int \phi (1 + \epsilon_n) dM - \frac{dM}{ds} \theta + \int \epsilon_n dN + V \sin \theta + H (\cos \theta - 1) \quad (20)$$

さて, 桁全体の補正エネルギー C は, 結局次式で与えられる。

$$C = \iint \phi (1 + \epsilon_n) dM ds - \int \frac{dM}{ds} \theta ds + \iint \epsilon_n dN ds + \int V \sin \theta + H (\cos \theta - 1) ds \quad (21)$$

さらに式(21)は, Simpson 公式を用いることにより次のとき解析可能な式に書改められる。

すなわち, 桁を $2n_0$ 等分するものと仮定すれば

$$C = \lambda \{ X_1 + X_{2n_0+1} + 4(X_2 + X_4 + \dots) + 2(X_3 + X_5 + \dots) \} / 3 \quad (22)$$

したがって $X_k = \int_{M_k} \phi (1 + \epsilon_{nk}) dM - \frac{dM_k}{\lambda} \theta_k + \int_{N_k} \epsilon_n dN + V_k \sin \theta_k + H_k (\cos \theta_k - 1)$, ($k=1, 2, \dots, 2n+1$),
 $\lambda (=dS)$: 部材要素の長さ,

3) 変形の適合条件と力の釣合い式

未知変角 θ_k に関する変形の適合条件式は、変分原理より次式で与えられる。

$$\frac{\partial C}{\partial M_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, 2n) \quad (23)$$

一方、部材要素 k に働く力の釣合い式は、図-14より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} dQ_k + \phi (1 + \epsilon_{nk}) dS \cos \theta_k &= 0 \\ dN_k + \phi (1 + \epsilon_{nk}) dS \sin \theta_k &= 0 \\ dM_k - Q_k (1 + \epsilon_{nk}) dS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, 2n) \quad (24)$$

4) 解法および計算例

図-15(a) に示すごとき矩形断面を有片持はりか、一定水平荷重 N_0 および漸増鉛直荷重 P を受ける場合の変形および応力解析を行えば以下の通りである。ただしはりの長さは $l=550\text{cm}$ 、断面諸量は、3.1)の図-9のそれと同一とする。

さて、はりの分割数を10として各部材要素について力の釣合い式を求めれば、式(24)より(図-15(b)参照)。

$$\left. \begin{aligned} Q_{k+1} &= P \cos \theta_k + N_0 \sin \theta_k \\ N_{k+1} &= P \sin \theta_k - N_0 \cos \theta_k \\ M_{k+1} &= M_k + Q_{k+1} (1 + \epsilon_{nk}) \lambda \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots, 10) \quad (25)$$

したがって $\lambda = l/10$

で与えられ、また境界条件は $M_{11}=0$, $N_2=-N_0$, $Q_1=P$ とする。

また、式(22)を用いて式(23)を変形すれば、結局次式をえる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_k &= \theta_{k-1} - \frac{\lambda}{6} \{ 2\phi_k (1 + \epsilon_{nk}) + (\phi_k + \phi_{k+1}) (2 + \epsilon_{nk} + \epsilon_{n,k+1}) / 2 \\ &\quad + (\phi_k + \phi_{k+1}) (2 + \epsilon_{nk} + \epsilon_{n,k+1}) / 2 \}, \quad (k=2, \dots, 10) \\ \theta_1 &= -\frac{\lambda}{6} \{ \phi_1 (1 + \epsilon_{n1}) + (\phi_1 + \phi_2) (2 + \epsilon_{n1} + \epsilon_{n2}) / 2 \} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

よって、式(25)、(26)を併用すれば、与荷重に対する M, N, Q および θ が繰返し試算によって算出決定されることになる。

また、自由端のたわみ S_c は変分原理より、次のように求められる。

$$S_c = \frac{\partial C}{\partial P} = \frac{\lambda}{3} \{ \chi_1 + \chi_{11} + 4(\chi_2 + \chi_4 + \dots + \chi_{10}) + 2(\chi_3 + \chi_5 + \dots + \chi_9) \} \quad (27)$$

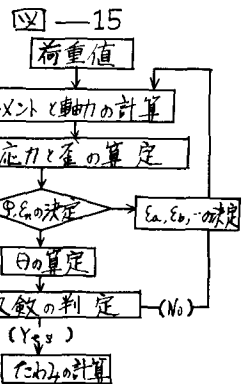
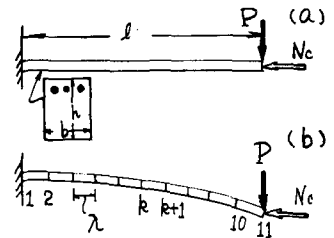


図-16

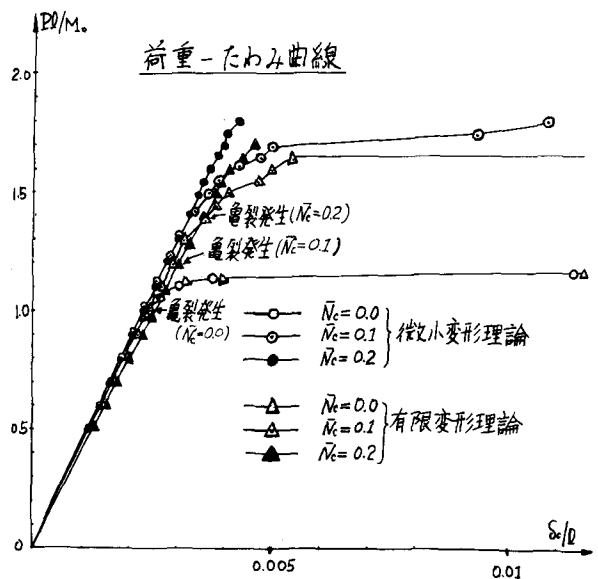


図-17

たに

$$\begin{aligned} \chi_k &= \frac{\partial X_k}{\partial P} = \phi_k (1 + \epsilon_{rk}) \frac{\partial M_k}{\partial P} - \theta_k (1 + \epsilon_{rk}) \frac{\partial \theta_k}{\partial P} + \epsilon_{rk} \frac{\partial M_k}{\partial P} + \frac{\partial M_k}{\partial P} \sin \theta_k + \frac{\partial H_k}{\partial P} (\cos \theta_k - 1) \\ &= (1 + \epsilon_{rk}) (\phi_k \xi_k + \sin \theta_k - \theta_k \cos \theta_k) \quad (k=1, 2, \dots, 10) \end{aligned}$$

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{10} (1 + \epsilon_{ri}) \cos \theta_i \quad , \quad \xi_{11} = 0$$

以上から $N_c = N_c/N_0 = 0, 0.1, 0.2$ で $P = 0 \sim 1.8 (M_0/l)$ の漸増荷重に対する荷重-たわみ曲線を図-16のFlow-Chartを用いて求め、その結果を微小変形理論と比較すれば図-17のようになる。図-17より、 N_c が作用する場合の微小変形理論のたわみは明らかに過小評価されており、その誤差は亀裂発生と共に増大することが判読される。(ただしコンクリートの ϵ 曲線は1次式とする)

一方、図-18は、破壊に至る段階のコンクリートの応力分布を求めたものであり、また図-19は、亀裂の進行状態を示したものである。

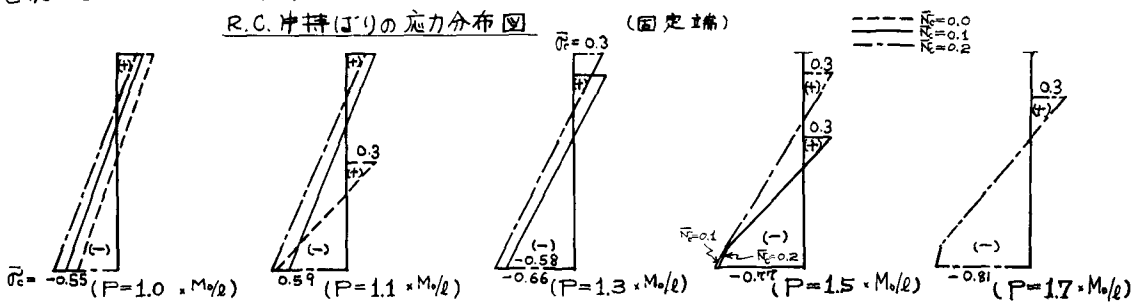


図 18

5. 結語

本論文は、軸力と曲げモーメントの組合せ負荷を受けるR.C.および合成桁のコンクリート部の亀裂を考慮した弾塑性有限変形に関する解析理論を提示したものであるが、本法を拡張すれば、曲げおよびせん断応力の組合せ応力に関する破壊条件を導入することになり、せん断亀裂現象も解明でき、さらに式(2)に粘性を考慮した応力-歪曲線式を用いることにより、より実体に即した粘弾塑性解析が可能となる。

また、本理論がエネルギー法に基づくものであるため、この種の方法で構成される連続はりおよびラーメンなどの不静定構造物も、従来の弾性エネルギー法に準じて解析でき、これらについては逐次報告の予定である。

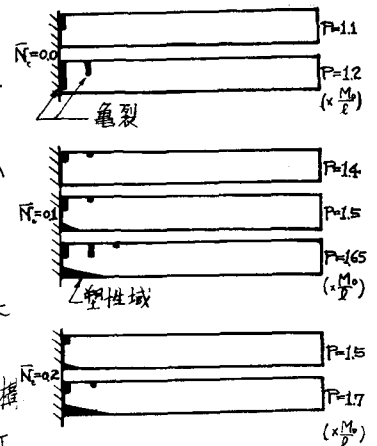


図 19

〔参考文献〕

- 1) Jitendra M. Kar; Diagonal Cracking in Prestressed Beams, Jour. of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., January, 1968
- 2) Carl E. Eckberg; Development and Use of Prestressed Steel Flexural Members, Jour. of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., September, 1968
- 3) R.C. Flonwick; Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams, Jour. of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., October, 1968
- 4) I.O. Oladapo; Stability of Tensile Crack in Prestressed Concrete Beams, Jour. of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., January, 1969
- 5) J.W. Roderick; Load Carrying Capacity of Simple Composite Columns, Jour. of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., February, 1969
- 6) Hugh Robinson; Composite Beams Incorporating Cellular Steel Decking, Jour. of the S.D., Proc. of the A.S.C.E., March, 1969