

H形鋼圧縮フランジの塑性座屈

東大生研 高築晃一

1. はしがき

単純な引張り(圧縮)試験によれば、軟鋼は降伏応力に達すると、ほとんど応力の増減なしに塑性変形する。この間の荷重方向の剛性は0となり、その後歪硬化して、再び剛性を持つ。したがって、両縁が支持されていない鋼板が面内圧縮を受けると、柱と同様、図-1に示すように変形し、その圧縮応力は降伏応力に達することが出来ない。しかし、H形鋼柱を材軸方向に圧縮すると、フランジやウェブの巾厚比(板巾/板厚)がある限度以下であれば、降伏応力においても耐力を失うことなく歪硬化して再び応力が増大する(図-1参照)。これは明かに降伏応力度においても鋼板のもつせん断剛性が存在するためであると考えられる。この実験事実を理論的に説明するために、せん断剛性が主要な働きをするH形鋼のフランジの塑性域、特に、降伏応力における塑性流れ(以下、降伏歪流れと略称する)における挙動を詳しく調べるのが本研究の目的である。

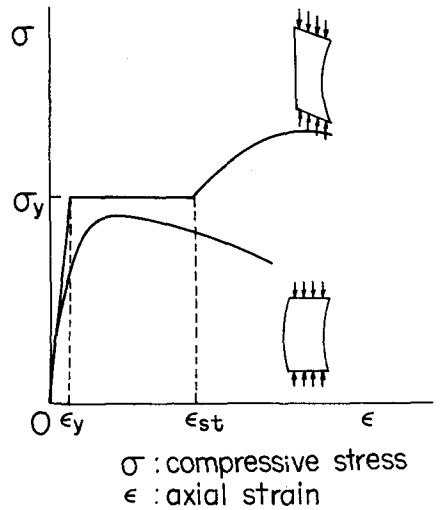


図-1

Haaijer, Lay はH形鋼圧縮フランジの挙動を鋼板のねじり座屈として扱った。このとき、塑性座屈応力度は、

$$\sigma_{cr} = G \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (1)$$

で与えられ、弾性座屈値と一致する。ただし、 G は弾性せん断係数、 b はフランジの巾、 t は板厚である。しかし、上式の値はあまりに実験値と異なるため、実験値と合致するような G_t を求めて G に置換える努力がなされた。Haaijerは、降伏歪流れの状態は弾性状態と歪硬化状態との混在した状態であるから歪硬化状態のみを考慮すればよいとして、垂直応力を一定としたときの、せん断歪の変化に対する接線係数 G_t の変化を調べて、 G_t の値を提案した。¹⁾²⁾ 一方、Lay は、歪は降伏歪 ϵ_y から "dynamic jump" して直ちに歪硬化歪 ϵ_{st} に達するから降伏歪流れの状態は存在しないとして、やはり ϵ_{st} における G_t を独得な方法で求めた。³⁾

上に述べた考え方は、初期不整のない理想的な鋼板の塑性座屈を対象にするときには可能であるが初期不整が存在すると歪硬化域に達する前に耐力を失う場合があり、この考え方では説明が出来なくなる。そこで、圧縮フランジの塑性挙動を統一的に説明するため、軟鋼の応力-歪関係に忠実にしたがって板の増分釣合式を逐次解き、材料の性質、初期不整が鋼板の降伏後の挙動にいかなる影響を与えるかを明らかにしたい。

2. 増分釣合式

図-2に示すように、圧縮フランジがウェブとの交線のまわりに回転して釣合いの状態にあるものと

する。いま、この回転量は非常に小さく、板はほとんど平らであるとするれば、この板が面内圧縮を受けて降伏すると、板はほぼ一様に降伏変流れの状態となり、曲げ剛性を期待することは出来ない。したがって、これを無視し、図中のOB, ACは単なるセンター線と考えて、OBCA部分がOA向で一様にねじれた状態で釣合っているものと理想化する。

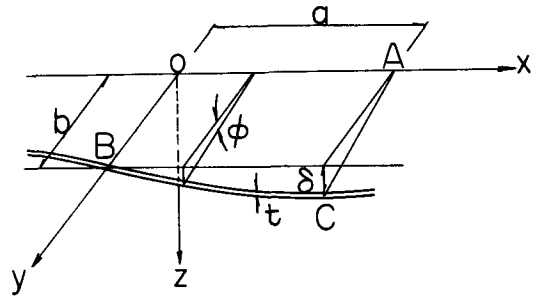


図-2

x方向の面内力を N_x , ねじりモーメントを M_{xy} と

すれば、x方向およびx軸まわりの釣合いを考えて、次の増分釣合式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{N}_x}{dx} &= 0 \quad \text{注)} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{b^2}{3} \frac{d\dot{\phi}}{dx} N_x + \frac{b^2}{3} \frac{d\dot{\phi}}{dx} \dot{N}_x - 2\dot{M}_{xy} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2a, b)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } \quad \dot{u} &= 0, \quad x=a \text{ で } \quad \dot{u} = \dot{\Delta} \\ x=0 \text{ で } \quad \dot{\phi} &= 0 \\ x=a \text{ で } \quad \frac{b^2}{3} \frac{d\dot{\phi}}{dx} N_x + \frac{b^2}{3} \frac{d\dot{\phi}}{dx} \dot{N}_x - 2\dot{M}_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3a, b, c)$$

ただし、 $\dot{u}$ はx方向の変位増分、 $\dot{\Delta}$ は境界における変位増分である。この境界条件は、鋼板の圧縮実験におけるそれに等しい。式(3a, b, c)のもとで、式(2a, b)を解くと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_x &= \text{const} \\ \frac{b^2}{3} \frac{d\dot{\phi}}{dx} N_x + \frac{b^2}{3} \frac{d\dot{\phi}}{dx} \dot{N}_x - 2\dot{M}_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4a, b)$$

となる。

塑性域における応力と歪の関係は、塑性流れ理論にもとづく次の関係式にしたがうものとする。

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = E \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \sigma_x \cdot \sigma_x & \frac{3\tau}{2(1+\nu)} \cdot \sigma_x \\ \sigma_x \cdot \frac{3\tau}{2(1+\nu)} & \frac{3\tau}{2(1+\nu)} \cdot \frac{3\tau}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{ただし } D = \frac{1}{\mu-1} \frac{3}{3(1+\nu)} (\sigma_x^2 + 3\tau^2) + \sigma_x^2 + \frac{9}{2(1+\nu)} \tau^2$$

$$\mu = 1 + 3\gamma \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right), \quad \nu = \text{ポアソン比}, \quad E_t = \text{接線係数}$$

上式を用いて、式(4a, b)から、塑性域におけるx方向の変形量とねじり角の関係は、次式で与えられる。

$$\left[S_D + s \cdot N + S_B \cdot s \cdot \frac{d\dot{\phi}}{dx} \right] \frac{d\dot{\phi}}{dx} + \left[S_A \cdot s \cdot \frac{d\dot{\phi}}{dx} + S_C \right] \dot{X} = 0 \quad (6)$$

ただし、

注) ・は、この場合 増分を表わすものと考えらる。

$$n = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{t}$$

$$X = \frac{u}{a \varepsilon_y}, \quad \psi = \frac{t}{a \varepsilon_y} \phi, \quad \varepsilon_y = \text{降伏歪}$$

$$S = \frac{\varepsilon_z}{6} \left(\frac{b}{t} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(\sqrt{\varepsilon_y} \frac{b}{t} \right)^2$$

$$S_A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{\sigma_z^2}{D} \right\} d\zeta,$$

$$S_B = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \frac{\frac{3\tau}{2(1+\nu)} \sigma_z}{D} \zeta d\zeta,$$

$$S_C = \frac{1}{2} S_B$$

$$S_D = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2 \left\{ \frac{1}{2(1+\nu)} - \frac{\left(\frac{3\tau}{2(1+\nu)} \right)^2}{D} \right\} \zeta^2 d\zeta$$

$$N = \frac{N_x}{t \sigma_y} = \sum [S_A \dot{X} + S_B \frac{d\psi}{dn}]$$

式(6)は、応力状態が既知のときに、与えられた x 方向変位増分 $\dot{X}$ に釣合うねじり角の増分 $\dot{\psi}$ を求める式であるから、鋼材の応力歪関係にしたがって、逐次 $\dot{X}$ を与えては $\dot{\psi}$ を求める操作をくりかえせば、荷重変形曲線等、塑性域での鋼板の挙動を追跡することが出来る。

この計算を実際に行うには、まず、降伏を開始するときに存在する元変形を与えなければならぬ。元変形は実測によって求めるべきものであるが、後で述べるように、いま、対象にしている元変形の量は非常に小さいので、実測によらずに、適当に仮定して計算を行ない、その結果が妥当であるかどうかを実験結果と比較して検討する。

3. 増分釣合式の解

図3は、図中に示されたそれぞれの元変形 δ_0/a を仮定したときの式(2a,b)の解である。鋼板の応力歪関係は、細線で示すように三直線によって表わされるものとする。太線は、板に加わる圧縮

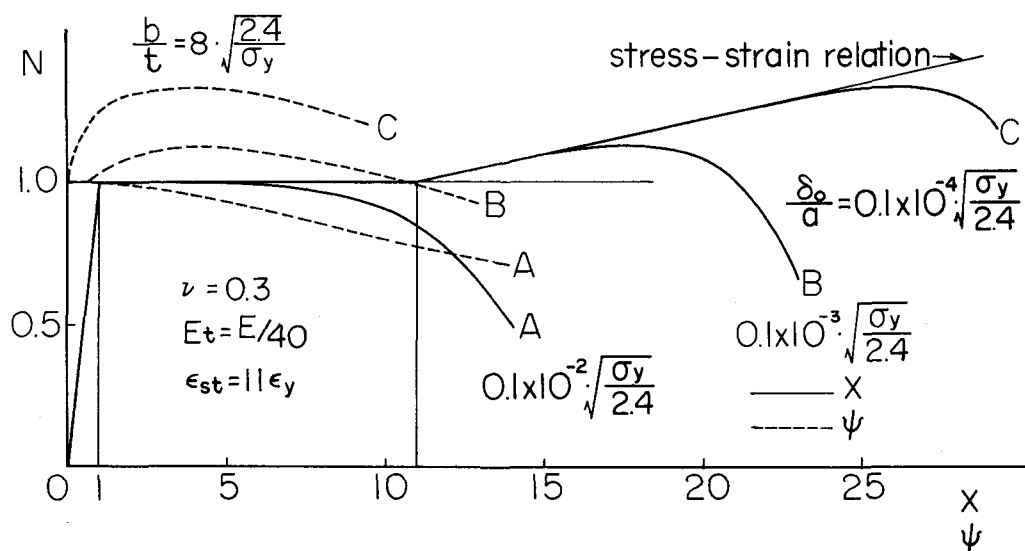


図 - 3

応力と x 方向の平均歪の関係を示し、破線は、圧縮応力とねじり角の関係を示している。(いずれの場合も式(6)で用いた無次元量で表わしている。)この結果より、鋼板の場合も、特別な仮定を設けなくとも、応力-歪関係に忠実にしたがって解析することが可能であることが明かになるとともに、次のことがいえる。

- i) 元変形 δ_0/a の大きさによつて、塑性域における挙動が大いに異なること
- ii) 元変形の量が比較的大きい場合(A)は、圧縮応力は変形が進むにつれて降伏応力より徐々に低下し、歪硬化しても回復せず、再び降伏応力に達することは出来ない。すなわち、"降伏応力において座屈した"ことになる。このような挙動を示す部材は、塑性設計する構造物に用いることは出来ない。
- iii) これにひきかえ、元変形の量が比較的小さいB、Cの場合には、圧縮応力は、変形が進むにつれてわずかに低下するが、載荷能力は衰えずにほぼ降伏応力を保ち、歪硬化すると再び応力が上昇する。塑性設計された構造物におけるH形鋼部材のフランジは、塑性ヒンジにおいて、このような性状を示すことが要求される。
- iv) 以上のことから分るように、降伏点流れの間に鋼板が載荷能力を失うかどうかは元変形の大きさに依るほか、歪硬化歪 ϵ_{st} 、歪硬化域における接線係数 E_t によつても左右される。当然、 ϵ_{st} は小さい程、 E_t は大きい程載荷能力は増大する。
- v) iii項でふれたように、降伏してから塑性流れが開始すると応力は少しつつ減少する。これは、通常の試験機で鋼板の座屈実験を行うときと同様、変形制御を行っているためである。したがって、応力の増減なしとして解く座屈の問題とは根本的に異なる問題である。

4. 実験との比較

前節の例題で用いた元変形量 δ_0/a は、きわめて微小なものである。このような考え方が実際問題として妥当であるかどうかを実験結果と比較して検討せねばならない。筆者らは、さきに、溶接に

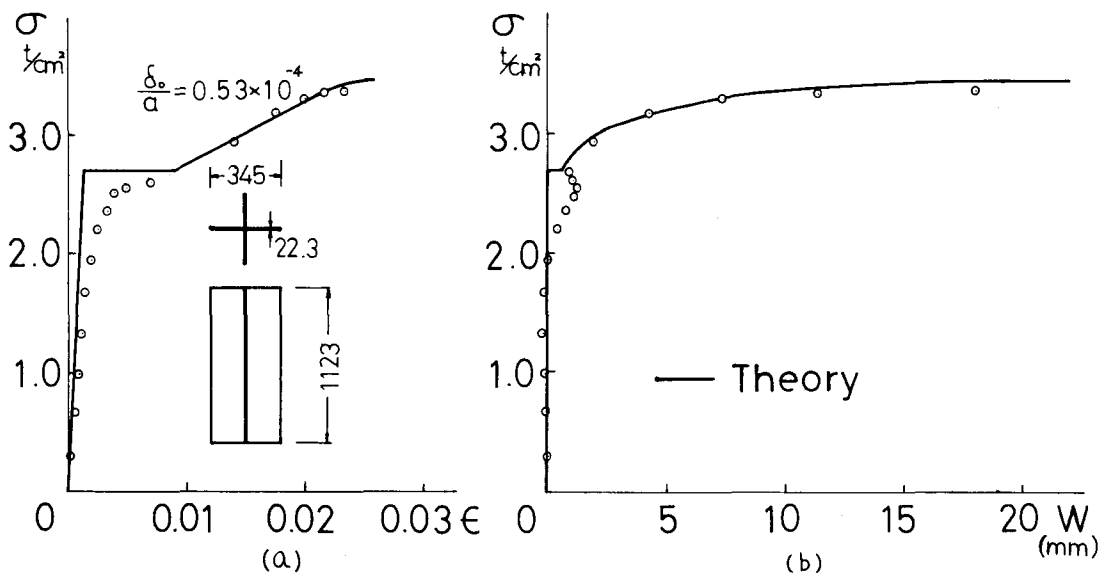


図-4

よって集成した十字型柱の圧縮実験を行ない、板の巾厚比をパラメーターにとって、塑性域における鋼板の性状を調べた。⁴⁾ この結果を用いて前節の計算結果を検討する。

図-4aは、断面内の平均圧縮応力 σ と軸方向の平均歪 ϵ との関係を実験によって求め、プロットしたものである。これと計算値とも比較するのであるが、計算に用いる元変形は次のようにして定めた。数多くの δ_0/α を与えて計算した結果より、この図に示す実験に比較的近いものを探し出し、その値を元変形と定めるのである。この場合は、 $\delta_0/\alpha = 0.53 \times 10^{-4}$ となる。これは、全く任意に与えたものであるから、その正統性を保障するには、ほかの実験データとの比較が必要である。こゝでは、図-4bに示すように、 σ とフランジのたわみ w の関係において比較した。すなわち、 σ - ϵ 関係において δ_0/α を定め、そのときの σ - w 関係の計算値と実験値との比較を行ったのである。計算を行う際、歪硬化域においても、板の曲げ剛性が無視されていること、実験結果より座屈の波形を正確に知ることが出来なかったこと、溶接による残留応力の影響が顕著であること等の問題点はあるにせよ、前節の解析結果は、十分、鋼板の塑性域における挙動を説明している。

弾性、塑性を問わず、座屈実験では、荷重条件、支持条件の他に、どうしても避けることの出来ない材質の不均一性や試験体の元変形によって、その結果は大いに影響される。特に、板のねじり座屈のように、きわめて微細な初期不整によっても、その挙動が全く異なってしまう場合⁵⁾には、設計方法を見い出すのに数多くの実験結果の集積が必要である。そこで、奥村教授(東大・工・土木)、加藤教授(東大・工・建築)のもとで行われた実験結果⁶⁾⁷⁾および筆者らの行った実験結果⁴⁾から、巾厚比と最大応力における軸方向の平均歪 ϵ_{max} の関係も求めたものが図-5である⁸⁾。同図では、実験に用いられた鋼材の降伏応力 σ_y や歪硬化開始の歪 ϵ_{st} がそれぞれ異なつたので、それを統一的に表わすために、巾厚比を表わす量として λ を導入し、歪 ϵ_{max} はその鋼材の ϵ_{st} で除してある。鋼種や試験体の形状が多種多様であるにも拘わらず、巾厚比にのみ注目して整理したため、結果は相当ばらついているが、一つの傾向は表われていると考えられるので、この結果を用いて前節の計算結果を検討したい。

図-3で示したように、元変形が小さいと、応力は歪硬化域に入つて上昇し、最大値に達した後降下する。そこで、元変形の量を固定したまゝ、巾厚比を変化させて、それぞれの場合における最大応力に対応する歪 ϵ_{max} を求めて図に表わすと図-5に示すような直線となる。ただし、実験に用いた鋼材の ϵ_{st} は、ほぼ、 $7\epsilon_y \sim 9\epsilon_y$ の範囲にあるので、計算もそれに合せたため、結果を帯状で示した。したがって、これは、 ϵ_{st} のばらつきによる ϵ_{max} のばらつきの程度を表わす。

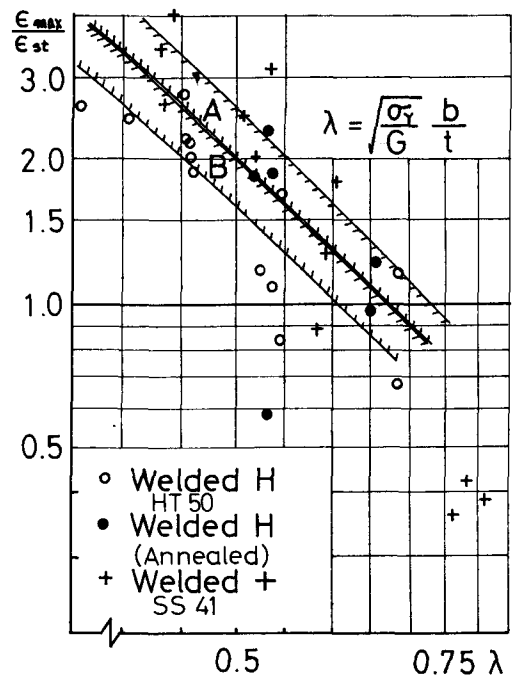


図-5

計算に用いた元変形は、次の通りである。

$$\frac{\delta_0}{a} = 0.1 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{\sigma_y}{2.4}} \quad : \text{zone A}$$

$$\frac{\delta_0}{a} = 0.5 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{\sigma_y}{2.4}} \quad : \text{zone B}$$

この結果、元変形の量を $0.1 \sim 0.5 \times 10^{-4} \cdot \sqrt{\sigma_y / 2.4}$ と仮定すれば、ほとんどの実験値を包含出来、実験の傾向と一致していることが分る。

5. むすび

以上、鋼板の応力歪関係にしたがって、増分釣合式を解いた結果は、よく鋼板の面内に圧縮力を受けたときの挙動を説明していることも実験結果と対比させながら示した。よって、この方法を用いてさらに複雑な構造物を解析することは可能である。

[謝辞] 貴重な実験資料の借用を許された奥村教授、加藤教授に感謝いたします。

[参考文献]

1. G. Haaijer : Plate Buckling in the Strain-Hardening Range, Proc. ASCE, Vol.83, EM2, 1957
2. G. Haaijer, B. Thürlimann : On Inelastic Buckling in Steel, Proc. ASCE, Vol.84, EM2, 1958
3. M.G. Lay : Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes, Proc. ASCE, Vol.91, ST6, 1965
4. 田中 尚、高梨晃一、角田忠之：プラスチックヒンジにおけるウェブ巾フランジ巾の制限に関する研究(6)、建築論文報告集 136号、昭和42年6月
5. E.T. Onat, D.C. Drucker : Inelastic Instability and Incremental Theories of Plasticity, J. Aero. Sci., Vol. 20, 1953
6. 奥村 敏恵：溶接H形鋼の局部座屈実験、奥村研究室報告
7. 加藤 勉：局部座屈実験資料
8. 田中 尚、高梨晃一：プラスチックヒンジにおけるウェブ巾フランジ巾の制限に関する研究(7)、建築論文号外、昭和42年10月