

立体骨組構造の弾塑性解析

早稲田大学理工学部 教授 堀 井 健一郎

○ 早稲田大学 大学院 川 原 睦 人

1. 緒 言

骨組構造の弾塑性解析において、R. Hill, W. Prager, P. G. Hodge, Jr., D. C. Drucker などにより、いわゆる、Plastic Hinge Theory が体系づけられている。これは、周知の通り、構造を構成する材料を、完全弾塑性体であるとして、部材内で、降伏応力を越えたある点が、変形に抵抗し得ないヒンジを形成するものとする理論であり、弾性解を順次積み重ねてゆくことにより、解を追跡することが出来、¹⁾ きわめて単純明解な理論構成がなされている。

上田²⁾は、塑性流れ理論にもとづく、塑性ヒンジ機構を考え、これにより降伏相関関係を考慮した立体骨組構造の解析法を提案している。これによれば、比例荷重のみでなく、変動荷重をも扱うことが出来る。

一方有限要素法により、平面問題（もちろん、3次元問題を含むが、元数が加速度的に多くなり、あまり、実用にはなっていないようである。）の弾塑性解析は、山田・吉村・桜井³⁾、J. P. King, O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan⁴⁾、G. G. Pope⁵⁾ などにより、行なわれている。平面問題では、三角形要素が一般に用いられており、これがもつとも有効であるが、この場合には、三角形要素内において、歪が一定であると考えることが出来るため、各要素ごとに、降伏したか否かを明確に判別することが出来る。又、J. F. Besseling⁶⁾は同様にしてクリープの問題も解決出来ることを指摘している。

塑性領域の発達を考慮に入れた、骨組構造の弾塑性解析は、山田⁷⁾、山崎・石川・大田^{8) 9)}などにより行なわれているが、山田は平面構造に限つて、又山崎らは、補正エネルギー法を用いて立体骨組構造を扱っているが、塑性流れ理論は用いていない。

ここでは、材料の応力と歪との関係が、塑性流れ理論により与えられるものとし、有限要素法の手法を用いることにより、弾性時に与えられる stiffness matrix を修正して解を求める方法を提案する。P. V. Marcal¹⁰⁾は塑性流れ理論により、有限変形の場合に対して、荷重増加法により、Shell の解析を行つており、有効な結果を得ているが、各要素ごとに、降伏が起るものとしており、各要素内での塑性領域の発達が加味されていない。そこで、ここでは、各分割した部材を、さらに細く分割し、その細分割区間内においては応力が一定であると考え、塑性流れ理論を適用することにする。このようにすれば、最終的な連立方程式の元数を増加させることなく、より誤差の少ない解式を得ることが出来、塑性ヒンジの発達を追跡することが出来る。

2. 応力と歪の関係

一般に用いられているごとく、応力-歪関係は、Mises の降伏条件に従う、塑性流れ理論によ

るものとする。ここでは、曲げにともなう前断応力の影響は無視し得るものとし、座標系を Fig-1 の如くに定めて、歪は弾性歪及び塑性歪より構成されるものとする。

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_z \\ d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{zy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & & \frac{2}{3}\sigma_z \\ & \frac{1}{G} & 2z_{zx} \\ & & \frac{1}{G} & 2z_{zy} \\ \frac{2}{3}\sigma_z & 2z_{zx} & 2z_{zy} & -\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\sigma_z \\ dz_{zx} \\ dz_{zy} \\ d\lambda \end{pmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

塑性領域では (1) 式が成立するものとする。逆に解けば

$$\begin{pmatrix} d\sigma_z \\ dz_{zx} \\ dz_{zy} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & & -\frac{2}{3}E\sigma_z \\ & G & -2Gz_{zx} \\ & & G & -2Gz_{zy} \\ -\frac{2}{3}E\sigma_z & -2Gz_{zx} & -2Gz_{zy} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_z \\ d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{zy} \\ d\lambda \end{pmatrix} \quad \text{----- (2)}$$

$$A = \frac{4E}{9}\sigma_z^2 + 4Gz_{zx}^2 + 4Gz_{zy}^2 + \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H'$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_z^2 + 3(z_{zx}^2 + z_{zy}^2), \quad H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} \quad (\text{変形硬化係数})$$

一方円形断面を対象とする場合 (2) 式はより簡単に

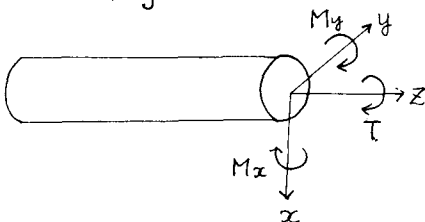
$$\begin{pmatrix} d\sigma \\ d\bar{z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & & -\frac{2}{3}E\sigma \\ & G & -2G\bar{z} \\ -\frac{2}{3}E\sigma & -2G\bar{z} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ d\gamma \\ d\lambda \end{pmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

$$A = \frac{4E}{9}\sigma^2 + 4G\bar{z}^2 + \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H'$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + 3\bar{z}^2, \quad \sigma = \sigma_z, \quad \bar{z} = \sqrt{z_{zx}^2 + z_{zy}^2}, \quad \varepsilon = \varepsilon_z, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2}$$

で与えられるものとする。

Fig-1



3. 剛性行列の誘導 (円形断面の場合)

簡単のため、円形断面をもつ直線材の場合について述べることにする。断面内においては、軸力 N 、曲げモーメント M_x, M_y による直応力 σ_z 、ねじりモーメント T による断面の図心からの距離 r に比例するせん断応力 τ のみが作用するものと考えることが出来るから、(3) 式を応力と歪との関係として用いることにする。

軸方向歪 $d\epsilon_n$, 曲率の変化 $d\chi_x$, $d\chi_y$, ねじり角の変化 $d\varphi$, により $d\epsilon$, $d\gamma$ は、それぞれ、次のように表わすことが出来る。

$$\begin{bmatrix} d\epsilon \\ d\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & -x \\ & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_n \\ d\chi_x \\ d\chi_y \\ d\varphi \end{bmatrix} \quad \text{----- (4)}$$

ただし

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

一方軸力の変化 dN , 曲げモーメントの変化 dM_x , dM_y , ねじりモーメントの変化 dT はそれぞれ、応力増分 $d\sigma$, $d\gamma$ と次の如き関係にある。

$$\begin{bmatrix} dN \\ dM_x \\ dM_y \\ dT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int d\sigma \cdot z \cdot dA \\ \int d\sigma \cdot y \cdot dA \\ - \int d\sigma \cdot (-x) \cdot dA \\ \int d\sigma \cdot r \cdot dA \end{bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

(5) 式の積分は全断面について行なうものとする。 (3) , (4) , (5) 式により

$$\begin{bmatrix} dN \\ dM_x \\ dM_y \\ dT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA \\ EI_y \\ EI_x \\ GJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_n \\ d\chi_x \\ d\chi_y \\ d\varphi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} E \int \sigma \cdot z \cdot dA \\ \frac{2}{3} E \int y \cdot \sigma \cdot dA \\ \frac{2}{3} E \int x \cdot \sigma \cdot dA \\ 2G \int r \cdot z \cdot dA \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

(6) 式の右辺才 2 項の積分は、断面内の各点において、応力 σ , γ が異つた値を取るから、いき

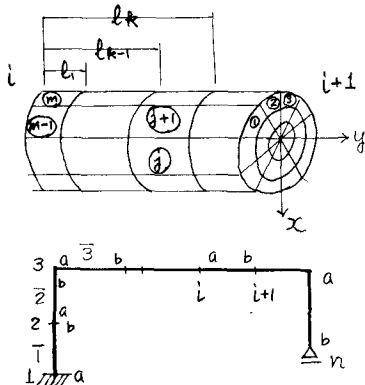


Fig-2

おい、断面を Fig-2 の如く、より細く分割して、その分割区間内において、応力が一定であるとして、加え合わせる方法をとるものとする。又、一方、Z 軸方向の応力の分布も一定ではないので、Z 軸方向にも Fig-2 の如く分割しておく。このようにすることにより、(6) 式右辺才 2 項は、次の如くなる。

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} E \int \sigma \cdot z \cdot dA \\ \frac{2}{3} E \int y \cdot \sigma \cdot dA \\ \frac{2}{3} E \int x \cdot \sigma \cdot dA \\ 2G \int r \cdot z \cdot dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n^{(1)} & R_n^{(2)} & \cdots & R_n^{(m)} \\ R_x^{(1)} & R_x^{(2)} & \cdots & R_x^{(m)} \\ R_y^{(1)} & R_y^{(2)} & \cdots & R_y^{(m)} \\ R_z^{(1)} & R_z^{(2)} & \cdots & R_z^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda^{(1)} \\ d\lambda^{(2)} \\ \vdots \\ d\lambda^{(m)} \end{bmatrix} \quad \text{--- (7)}$$

ここに $R_n^{(j)}, R_x^{(j)}, R_y^{(j)}, R_t^{(j)}$ はそれぞれ、 j 細分区分間について、

$$\begin{aligned} R_n^{(j)} &= -\frac{2E}{3}\sigma^{(j)} \int dA^{(j)} & R_x^{(j)} &= -\frac{2E}{3}\sigma^{(j)} \int y \cdot dA^{(j)} \\ R_y^{(j)} &= -\frac{2E}{3}\sigma^{(j)} \int x \cdot dA^{(j)} & R_t^{(j)} &= -2G\tau^{(j)} \int r dA^{(j)} \end{aligned} \quad \text{----- (8)}$$

で与えられるものである。積分は各細分割区間の断面について行うものとする。

これを用いると、(6)式は

$$\begin{pmatrix} dN \\ dM_x \\ dM_y \\ dT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA & & & \\ & EI_y & & \\ & & EI_x & \\ & & & GJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_n \\ d\chi_x \\ d\chi_y \\ d\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_n \\ R_x \\ R_y \\ R_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\ell \end{pmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

の如く与えられる。

一方、(3)式の σ 3式を、細く細分割した要素内で立てると、同様な関係を得ることが出来るから、これを(9)式とまとめて表わすと、次の如くなる。

$$\begin{pmatrix} dN \\ dM_x \\ dM_y \\ dT \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA & & & & R_n \\ & EI_y & & & R_x \\ & & EI_x & & R_y \\ & & & GJ & R_t \\ \hline R_n^T & R_x^T & R_y^T & R_t^T & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_n \\ d\chi_x \\ d\chi_y \\ d\varphi \\ d\ell \end{pmatrix} \quad \text{----- (10)}$$

これを簡単に

$$\begin{pmatrix} dN \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & R \\ R^T & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathbf{n} \\ d\ell \end{pmatrix} \quad \text{----- (11)}$$

とあらわしておく。 T は転置記号をあらわす。

軸歪 $d\epsilon_n$ 、曲率の変化 $d\chi_x, d\chi_y$ 、ねじり角の変化 $d\varphi$ はそれぞれ変形の変化 $du, dv, dw, d\theta$ により、

$$d\epsilon_n = \frac{\partial dw}{\partial z}, \quad d\chi_x = \frac{\partial^2 dv}{\partial z^2}, \quad d\chi_y = \frac{\partial^2 du}{\partial z^2} \quad \text{----- (12)}$$

で与えられる。各分割区間 $i, i+1$ 間 (Fig-2 参照) において、軸力、ねじりモーメントは一定、曲げモーメントが、a 端から b 端まで直線的に変化するものとした時の弾性解は次の如くであるが、近似的に変形はこれと同じ式で与えられるものとする。

$$dw = \xi_1 \cdot dw_a + \xi_2 \cdot dw_b + \{ \xi_3 (dw_a - dw_b) + \xi_4 d\theta_{xa} + \xi_5 d\theta_{xb} \} \cdot y \\ - \{ \xi_3 (du_a - du_b) + \xi_4 d\theta_{ya} + \xi_5 d\theta_{yb} \} \cdot x. \quad \text{----- (13)}$$

$$dv = \xi_6 \cdot dw_a + \xi_7 \cdot dw_b + \xi_8 d\theta_{xa} + \xi_9 d\theta_{xb} + (\xi_1 d\theta_a + \xi_2 d\theta_b) \cdot y$$

$$du = -\xi_6 du_a - \xi_7 du_b - \xi_8 d\theta_{ya} - \xi_9 d\theta_{yb} - (\xi_1 d\theta_b + \xi_2 d\theta_a) \cdot x$$

ここに,

$$\xi_1 = \frac{l-x}{l}, \quad \xi_2 = \frac{x}{l},$$

$$\xi_3 = 6 \frac{x}{l} - 6 \frac{x^2}{l^2}, \quad \xi_4 = -1 + 4 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2}, \quad \xi_5 = 2 \frac{x}{l} - 3 \frac{x^2}{l^2}$$

$$\xi_6 = 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}, \quad \xi_7 = 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3}, \quad \xi_8 = x - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, \quad \xi_9 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

これより,

$$d\epsilon_1 = \frac{1}{l} (du_a - du_b), \quad d\psi = \frac{1}{l} (d\theta_a - d\theta_b)$$

$$d\chi_x = \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) (dw_a - dw_b) + \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) d\theta_{xa} + \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) d\theta_{xb} \quad \text{----- (14)}$$

$$d\chi_y = -\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) (du_a - du_b) - \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) d\theta_{ya} - \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) d\theta_{yb}$$

(14) 式を簡単に次の如くあらわしておく。

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\chi_x \\ d\chi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_a^T & B_b^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dw_a \\ dw_b \end{bmatrix} \quad \text{----- (15)}$$

(11) 式, (15) 式より、変分原理を用いることによつて、次の如く材端部材力と材端変位との関係式を得る。

$$\begin{bmatrix} dF_a \\ dF_b \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\frac{\int \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} \cdot [R] \cdot \begin{bmatrix} B_a^T & B_b^T \end{bmatrix} dz}{\int [R^T] \cdot \begin{bmatrix} B_a^T & B_b^T \end{bmatrix} dz} \mid \frac{\int \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} [R] dz}{\int [A] dz} \right] \begin{bmatrix} dw_a \\ dw_b \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{----- (16)}$$

(16) 式は、より簡単に

$$\begin{bmatrix} dF \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] \\ [Q^T] \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} [Q] \\ [A] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{----- (17)}$$

であるからこれより $(d\lambda)$ を消去すれば

$$\begin{bmatrix} dF \end{bmatrix} = ([K] - [Q] \cdot [A^{-1}] \cdot [Q^T]) \cdot \begin{bmatrix} dw \end{bmatrix} \quad \text{----- (18)}$$

と与えられる。ここに $[K]$ は、通常用いられている Stiffness Matrix

であり、塑性領域では (18) 式の如く、これを補正する項が加わつて来る。 (18) 式を用いて通常の変形法とまったく同様に変形・応力を求めることが出来る。

行列〔Q〕の内容は、次の通りである。

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix}, \quad [Q_a] = \begin{bmatrix} [R_n \cdot a] \\ -[R_x \cdot b] \\ [R_x \cdot d] \\ [R_y \cdot b] \\ -[R_y \cdot d] \\ [R_t \cdot a] \end{bmatrix}, \quad [Q_b] = \begin{bmatrix} -[R_n \cdot a] \\ -[R_x \cdot c] \\ -[R_x \cdot d] \\ [R_y \cdot c] \\ [R_y \cdot d] \\ -[R_t \cdot a] \end{bmatrix}$$

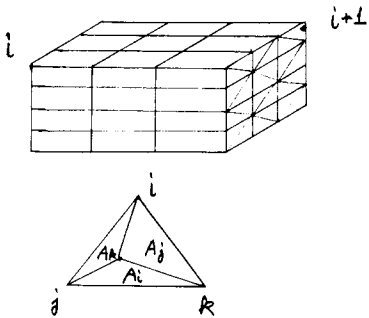
$$a = \frac{l_k - l_{k-1}}{l}, \quad c = \frac{2(l_k - l_{k-1})}{l} - \frac{3(l_k^2 - l_{k-1}^2)}{l^2}$$

$$b = \frac{4(l_k - l_{k-1})}{l} - \frac{3(l_k^2 - l_{k-1}^2)}{l^2}, \quad d = \frac{6(l_k - l_{k-1})}{l^2} - \frac{6(l_k^2 - l_{k-1}^2)}{l^3}$$

4. 剛性行列の誘導（円形断面以外の中実断面の場合）

円形断面以外の中実断面の場合には、ねじり変形が、ゆがみを伴うため、応力と歪の関係に（3）式を用いるのは不都合であり、（2）式を用いる必要がある。いま、ゆがみ変形に伴う直歪 ε_x の影響は、きわめて小さいとし、これを無視することになれば、3・項で誘導した剛性行列のうち、ねじり変形に関する部分のみを次の如く変更すればよい。

Fig-3



この場合には、Fig-3 に示すごとく、各部材を多数の三角柱に分割することにし、（13）式の ω の最後に、細分割要素のゆがみを $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ として

$$\frac{A_i}{A} d\omega_i + \frac{A_j}{A} d\omega_j + \frac{A_k}{A} d\omega_k$$

をつけ加えねばならない。ここに、A は、細分割した三角形要素の面積をあらわし、 A_i, A_j, A_k はそれぞれ、頂点 i, j, k に対する面積座標をあらわす。これを用いることにより、せん断歪 $d\gamma_{zx}, d\gamma_{zy}$ はそれぞれ、次の如くになる。

$$\begin{bmatrix} d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & \frac{b_i}{2A} & \frac{b_j}{2A} & \frac{b_m}{2A} \\ y & \frac{c_i}{2A} & \frac{c_j}{2A} & \frac{c_m}{2A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\omega_i \\ d\omega_j \\ d\omega_k \end{bmatrix} \quad \text{----- (19)}$$

ここに

$$\Delta = \{x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j)\} / 2$$

$$b_i = y_j - y_m \quad b_j = y_m - y_i \quad b_m = y_i - y_j$$

$$c_i = x_m - x_j \quad c_j = x_i - x_m \quad c_m = x_j - x_i$$

（2）式，（5）式，（19）式を用いることにより、ねじりモーメントの変化 dT は、3・項と同様にして、

$$\begin{bmatrix} dT \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(I_x + I_y) & G_R \\ G_R^T & G_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_e \\ G_w \end{bmatrix} [dl]$$

$$[G_R] = \begin{bmatrix} G(-yb_l + xc_l)/2 & G(-yb_j + xc_j)/2 & G(-yb_m + xc_m)/2 \end{bmatrix}, \quad G_e = 2G\Delta(-yZ_{zx} + xZ_{zy})$$

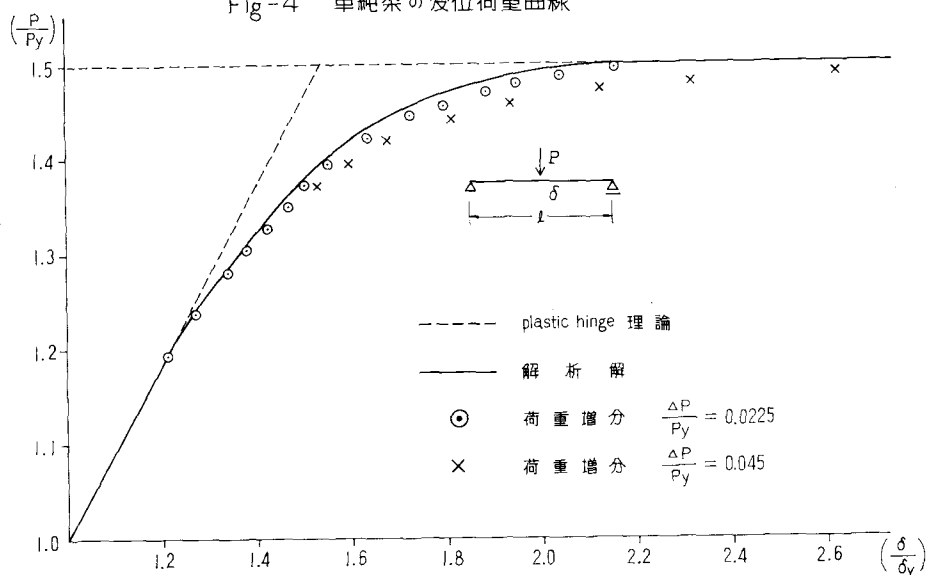
$$[G_R] = \frac{G}{4\Delta} \begin{bmatrix} (b_l^2 + c_l^2) & (b_l b_j' + c_l c_j') & (b_l b_m + c_l c_m) \\ & (b_j'^2 + c_j'^2) & (b_j' b_m + c_j' c_m) \\ \text{SYM.} & & (b_m^2 + c_m^2) \end{bmatrix}, \quad [G_w] = G \begin{bmatrix} (b_l Z_{zx} + c_l Z_{zy}) \\ (b_j' Z_{zx} + c_j' Z_{zy}) \\ (b_m Z_{zx} + c_m Z_{zy}) \end{bmatrix}$$

$$[dT] = (G(I_x + I_y) - [G_R][G_R^T][G_R]) [d\varphi] - (G_e - [G_R][G_R^T][G_w]) [dl]$$

であるから、これを(10)式とおき変えればよい。

5. 数値計算例

Fig-4 単純梁の変位荷重曲線



塑性領域の形成

— 解析解
 数値解

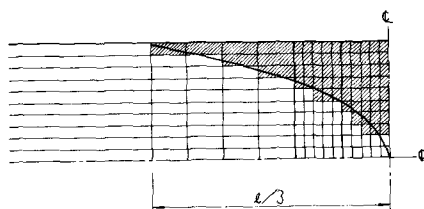
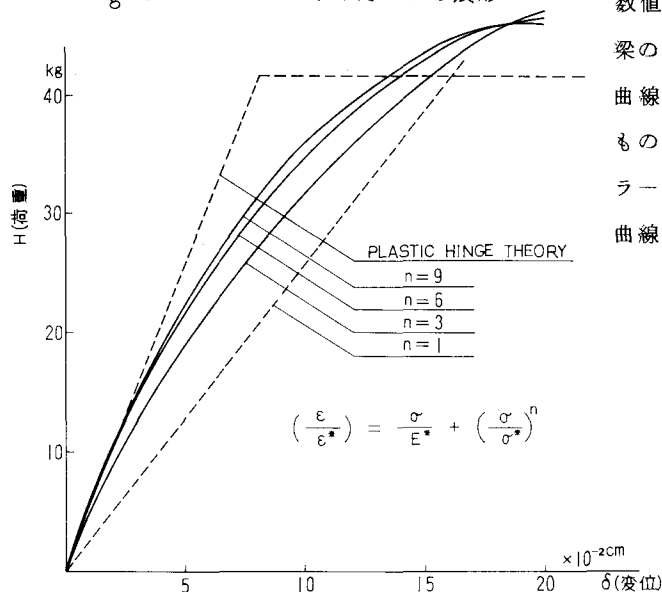
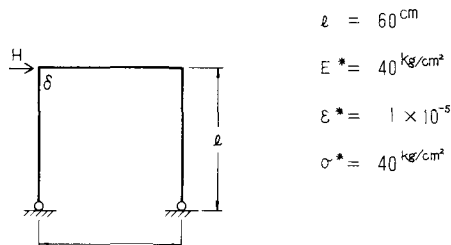


Fig-5 ラーメンの水平力による変形



数値計算例として、完全弾塑性体よりなる単純梁の中央に集中荷重が作用した場合の荷重変位曲線及び塑性域の発達状況を解析解と比較したもの及び、非線型な歪応力曲線を持つ2ヒンジラーメンに水平荷重が作用した場合の荷重変位曲線を挙げる。



6. 結 言

塑性流れ理論による骨組構造の解析法について述べた。有限要素法の手法を用いており、分割区内で、より細く細分割し、その細分割区間で応力が一定であると考えることにより、解式が組み立てられている。当然、荷重を少しずつ増加させ、その間には、応力の変動がないと仮定して解を求める荷重増加法により計算を進める方法をとる。このため比例荷重の場合のみでなく、除荷、あるいは、変動荷重に対しても用いることが出来る。又、細分割区間は、かなり細くとる必要があるが、この間での変形は、消去されているので、最終的な連立方程式の数を増すことなく、塑性領域の発達を計算することが出来る。

一方、荷重増加法による場合、常に問題になることであるが、荷重増分の大きさによつて、異つた解を得ることがあるので、荷重増分のとり方には、充分の注意が必要である。ここでは、微小変形によつたが、有限変形の導入は比較的簡単に行うことが出来る。

7. 参考文献

- 1) 服部正・コンピューターによる構造数値解析法、建築構造学大系、彰国社。
- 2) 上田幸雄・他3名；“マトリックス法による骨組構造の弾塑性解析” 日本鋼構造協会・マトリックス構造解析講演文集 昭和44年5月
- 3) Y. Yamada and Others; "Plastic Stress-Strain matrix and its application for the Solution of Elastic plastic problems by the Finite Element Method" INT. J. Mech. Sci. 10 (1968)
- 4) C. Zienkiewicz and others; "Elasto-plastic Solutions of Engineering problems" INT. J. num. Meth. in Eng. Vol. No. 1. (1969)
- 5) G. G. pope; "The Application of the Matrix Displacement Method in Plane Elasto-plastic Problems" AFDL-TR-66-80 Wright Patterson air Force base (1966)
- 6) J. F. Besseting "Matrix analysis of creep and plasticity problems" AFDL-TR-66-8 (1966)
- 7) 山田孝一郎 "撓角法形式による骨組の弾塑性解析とその応用" 日本建築学会論文集80号81号 (昭37)
- 8) 山崎徳也・他2名 "補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析" 土木学会論文集 134号 (和41)
- 9) 山崎徳也・他2名 "直線材立体ラーメンの弾塑性たわみ曲線算定法" 才22回土木学会年講 (昭42)
- 10) P. V. Marcal; "Large deflection Analysis of elastic-plastic shells of revolution," AIAA/ASME 10th Structures structural Dynamics and materials, Conference (1969)