

地盤上の桁の荷重・変形関係と崩壊に関する理論的研究

信州大学工学部 ○ 草間孝志

吉田俊弥

1. まえがき

連続基礎などの地盤上の桁は、いか程の荷重まで耐えることができるのか不明確な点が多い。このような桁の崩壊荷重を求めることは設計上有意義なことと考えられる。それには、地盤上の桁は、どのような経過をたどって崩壊に到達するのか、地盤ならびに桁の性質と崩壊荷重との間には、いかなる関係があるかが問題となる。これらの問題を少しでも明らかにすることによって、構造物の設計に際し、構造計画を上部構造と基礎構造の両者を含めた全体的な計画に近づけることができると思われる。しかし、地盤は非常に複雑な力学的性状を示すものであつて、取扱いにくい問題があまりにも多い。本文では、一つの試みとして、まず地盤の力学的性状を理想化し、その理想化した地盤上のかなり長い桁に単一荷重が作用したときの崩壊に至る経過と崩壊荷重を計算し、さらに、多負載荷時の有限長さの崩壊荷重について求めたものである。

2. 仮定

桁は完全弾塑性体であるものとし、せん断力の影響は無視する。地盤に対しては、載荷試験の結果によると、締った砂質土ならびに硬い粘土上の場合には荷重沈下曲線は図-1の曲線(a)のようになり、ゆるい砂質土ならびに軟かい粘土の場合には図-1の曲線(b)のようになるといわれている。一方、弾性地盤上の桁に働く接地圧力は取扱いが簡単かつ比較的よく合うことより、接地圧は沈下量に比例するというWinklerの仮定のもとに広く取扱われている。そこで地盤には負の反力が生じないことを考慮して、地盤は次のような性質を有するものと仮定した。(図-2)

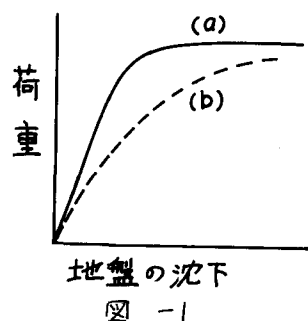


図 - 1

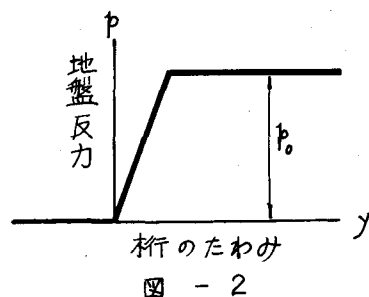


図 - 2

i) $y \geq 0$ として p が $p < p_0$ なるときには、地盤は Winkler 地盤とする。

ii) p が p_0 に達するとその奥の地盤は塑性状態となり、以後の荷重の増加に対しては、その奥における p は p_0 より大となることはない。

iii) $y \leq 0$ なるときには常に $p = 0$ である。(図-2)

なお、こゝに示した計算は桁の自重を無視し、かつ桁はその両端で $y = 0$ が常に成り立つ程度に長いものとした場合である。

3. 単一集中荷重が働くときの崩壊までの経過 (長い桁の場合)

曲げ剛さ EI 、接地中 B 、全塑性モーメント M_p のかなり長い桁が、地盤反力係数 K (Kg/cm^3)、極限支持力 p_0 の地盤上にあり、桁に単一集中荷重 P が働いている場合を考える (図-3(a))。桁ならびに地盤が弾性限界にあるとき、桁の接地長さ $2l$ 、最大たわみ δ 、最大モーメント M_0 、

最大地盤反力 p_0 (Kg/cm^2) は, それぞれ, つぎのようになる。

$$2l = \frac{\pi}{\lambda}, \quad y_c = \frac{P\lambda}{2BK_0} \coth \frac{\pi}{2} = 0.545 \frac{P\lambda}{BK_0}, \quad M_c = \frac{P}{4\lambda} \coth \frac{\pi}{2} = 0.273 \frac{P}{\lambda} \quad (1)$$

ここに, $\lambda = \sqrt{BK_0/4EI}$ である。いま, 荷重の増加にともない, C 点の全塑性モーメント M_p に達したとすると, そのときの荷重と, C 点の単位面積あたりの地盤反力 p_0 は

$$P = 4\lambda M_p \tanh \frac{\pi}{2} = 3.669 \lambda M_p, \quad p_0 = \frac{2\lambda^2 M_p}{B} \quad (2)$$

となる。

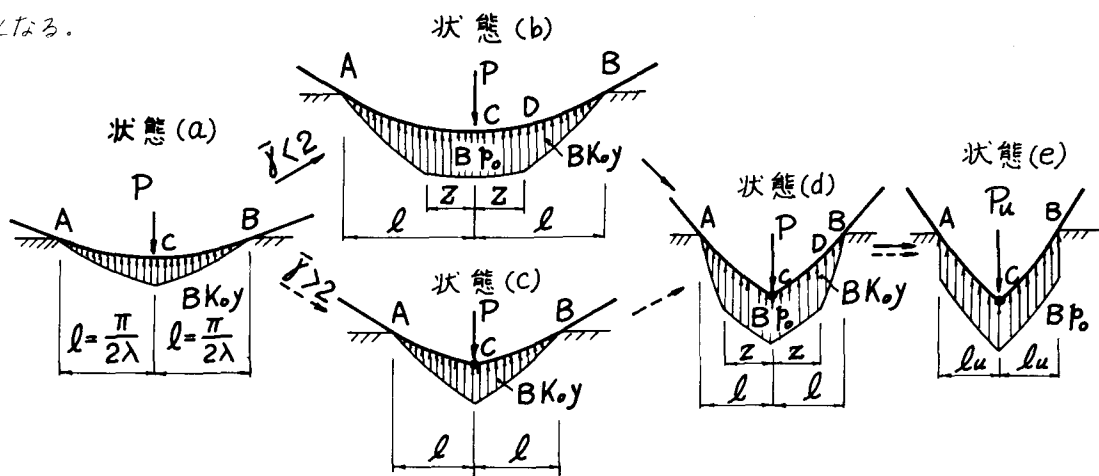


図 - 3

いま, 極限支持力 p_0 を $p_0 = \bar{\gamma} \lambda^2 M_p / B$ とおくと, $\bar{\gamma} = B p_0 / \lambda^2 M_p$ となって, $\bar{\gamma}$ は桁と地盤の性質によって定まる定数である。そして, p_0 と p_0 との比較によりつぎのような関係が得られる。

- i) $\bar{\gamma} < 2$ のとき, C 点にて桁よりさきに地盤が降伏する。
- ii) $\bar{\gamma} > 2$ のとき, C 点にて地盤よりさきに桁が降伏する。
- iii) $\bar{\gamma} = 2$ のとき, C 点にて桁と地盤が同時に降伏する。

図-3は, 次々に荷重を増加していったときの崩壊に至るまでの経過を $\bar{\gamma} \leq 2$ について, 示したものである。すなわち,

- i) $\bar{\gamma} < 2$ のとき, 状態(a)→状態(b)→状態(d)→状態(e)
- ii) $\bar{\gamma} > 2$ のとき, 状態(a)→状態(c)→状態(d)→状態(e)

のように変化していく。そこで, これらの状態に対するつり合い式を求めて, 計算を行なった。計算に用いた記号は, α , β , γ をそれぞれ, 荷重, 曲げモーメント, 接地圧の係数として,

$$P = \alpha \lambda M_p, \quad M = \beta M_p, \quad p = \gamma \frac{\lambda^2 M_p}{B} \quad (3)$$

とおき, さらに, C 点の曲げモーメント M_c が M_p ($\beta = 1$) になったときの α を α_1 , C 点の接地圧 p_0 が p_0 ($\gamma = \bar{\gamma}$) になったときの α を α_2 , 崩壊時の α を α_u と定めた。なお, 図-3の z は

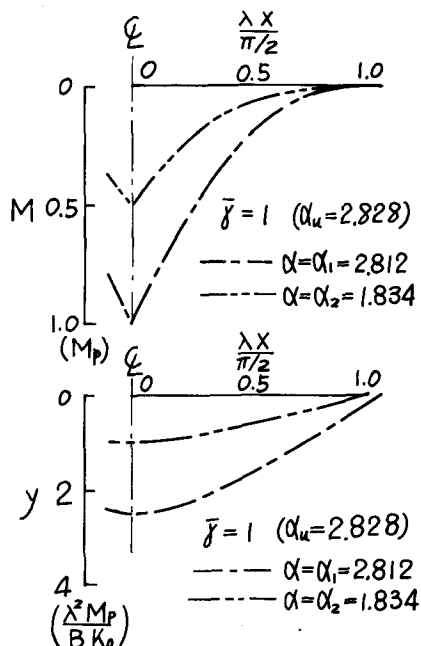


図 - 4

地盤の塑性領域の長さであり、 l_u は崩壊時の桁の接地長さである。

4. 各種状態におけるつり合い式

i) 状態 (b) ($\bar{\gamma} < 2$, $\alpha_2 < \alpha < \alpha_1$, $\beta_c < 1$, $\gamma_c = \bar{\gamma}$)

この場合の α_2 は、式(1)より、つぎのようになる。

$$\alpha_2 = 3.669 \bar{\gamma} / 2$$

そして、この場合のつり合い式は $y_B = 0$, $\beta_c = \beta_0$, ならびに D 点での連続条件より

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha - 2\bar{\gamma}\lambda Z)[S(\lambda t)c(\lambda t) - C(\lambda t)s(\lambda t)] \\ & + 2[2\beta_c - \alpha\lambda Z + \bar{\gamma}(\lambda Z)^2]S(\lambda t)s(\lambda t) = 0, \\ & (\alpha - 2\bar{\gamma}\lambda Z)[S(\lambda t)C(\lambda t) - s(\lambda t)c(\lambda t)] - [\bar{\gamma} + 2\beta_c - \alpha\lambda Z + \bar{\gamma}(\lambda Z)^2]S^2(\lambda t) \\ & + [\bar{\gamma} - 2\beta_c + \alpha\lambda Z - \bar{\gamma}(\lambda Z)^2]s^2(\lambda t) = 0, \\ & [-4\beta_c\lambda Z + \alpha(\lambda Z)^2 - \frac{2}{3}\bar{\gamma}(\lambda Z)^3][S^2(\lambda t) - s^2(\lambda t)] + (\alpha - 2\bar{\gamma}\lambda Z)[S^2(\lambda t) + s^2(\lambda t)] \\ & - [4\beta_c - 2\alpha\lambda Z + 2\bar{\gamma}(\lambda Z)^2][S(\lambda t)C(\lambda t) + s(\lambda t)c(\lambda t)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $S(\lambda t) = \sinh(\lambda l - \lambda Z)$, $s(\lambda t) = \sin(\lambda l - \lambda Z)$, $C(\lambda t) = \cosh(\lambda l - \lambda Z)$, $c(\lambda t) = \cos(\lambda l - \lambda Z)$ である。

式(4)において、 α を与えると、 β_c , λl , λZ が求められ、さらに、これよりたわみ曲線、曲げモーメント図なども計算することができる。また、 $\beta_c = 1$ において、式(4)を解くと、 α_1 と、その時の λl , λZ が求められる。図-4は、 $\bar{\gamma} = 1$ のときの曲げモーメント図と、たわみ曲線の一例である。

ii) 状態 (c) ($\bar{\gamma} > 2$, $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $\beta_c = 1$, $\gamma_c < \bar{\gamma}$)

この状態は、地盤は弾性であるが、桁は C 点に塑性ヒンジを生じた状態である。 $y_B = 0$ より

$$4S(\lambda l)s(\lambda l) - \alpha[C(\lambda l)s(\lambda l) - S(\lambda l)c(\lambda l)] = 0 \quad (5)$$

を得る。この場合の α_1 は、式(2)より $\alpha_1 = 3.669$ である。式(5)において、 α を与えると、桁の接地長さ λl が求められ、それより、たわみ曲線、曲げモーメント図なども計算することができる。また、 α_2 を求めるには、C点にて $\gamma_c = \bar{\gamma}$ とおくと式(6)を得る。

$$\bar{\gamma}[S^2(\lambda l) - s^2(\lambda l)] + 2[S^2(\lambda l) + s^2(\lambda l)] - \alpha[S(\lambda l)C(\lambda l) - s(\lambda l)c(\lambda l)] = 0 \quad (6)$$

式(5), (6)の連立方程式を解くと α_2 と、そのときの λl が求まる。図-5は $\bar{\gamma} = 4$ のときの曲げモーメント図とたわみ曲線を示したものである。

iii) 状態 (d) ($\bar{\gamma} < 2$ の場合には $\alpha_1 < \alpha$, $\bar{\gamma} > 2$ の場合には $\alpha_2 < \alpha$, $\beta_c = 1$, $\gamma_c = \bar{\gamma}$)

$y_B = 0$ と D 点での連続条件より

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha - 2\bar{\gamma}\lambda Z)[S(\lambda t)c(\lambda t) - C(\lambda t)s(\lambda t)] + 2[2 - \alpha\lambda Z + \bar{\gamma}(\lambda Z)^2]S(\lambda t)s(\lambda t) = 0, \\ & (\alpha - 2\bar{\gamma}\lambda Z)[S(\lambda t)C(\lambda t) - c(\lambda t)s(\lambda t)] - [\bar{\gamma} + 2 - \alpha\lambda Z + \bar{\gamma}(\lambda Z)^2]S^2(\lambda t) + [\bar{\gamma} - 2 + \alpha\lambda Z - \bar{\gamma}(\lambda Z)^2]s^2(\lambda t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を得る。これより α を与えると、 λl , λZ が求まる。

iv) 状態 (e) ($\alpha = \alpha_u$)

地盤の塑性領域の長さ Z が次々に増大し、 Z は接地長さ l に近づく、したがって、その極限として、桁の不安定になる条件は、 $Z \rightarrow l$ によって与えられる。すなわち、崩壊時の状態は C 点に塑性ヒンジが発生し、接地長さ $2l$ 全体にわたって $\beta = \beta_0$ の状態を考えればよい。崩壊時の α_u , l_u , Z_u

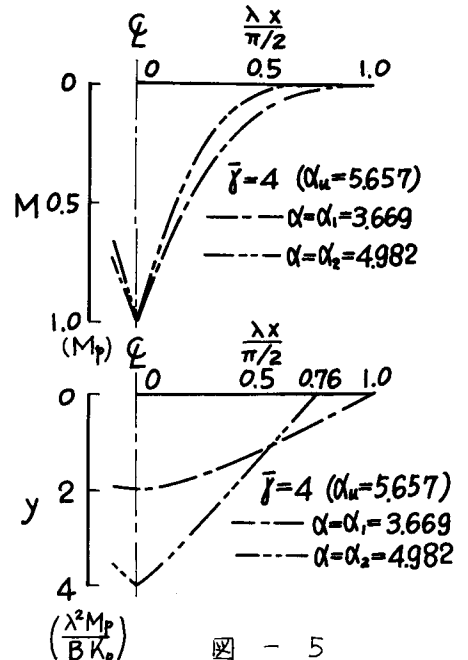


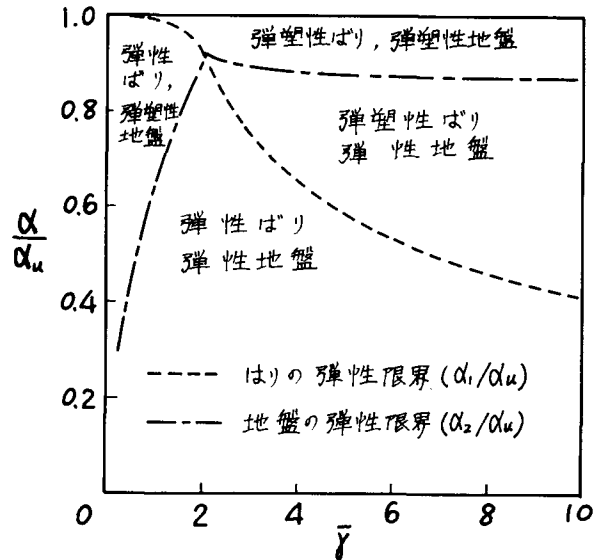
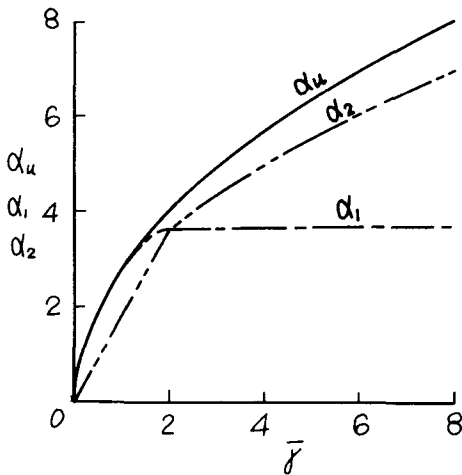
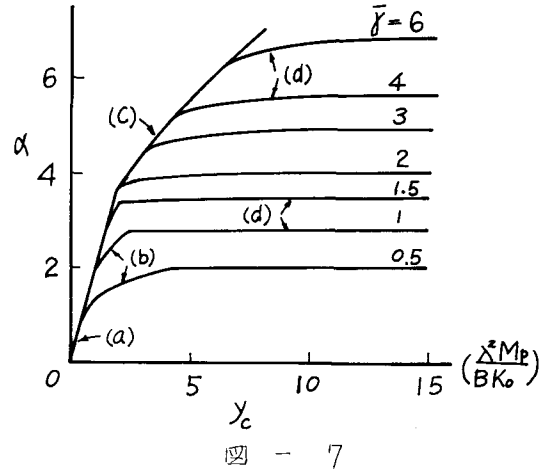
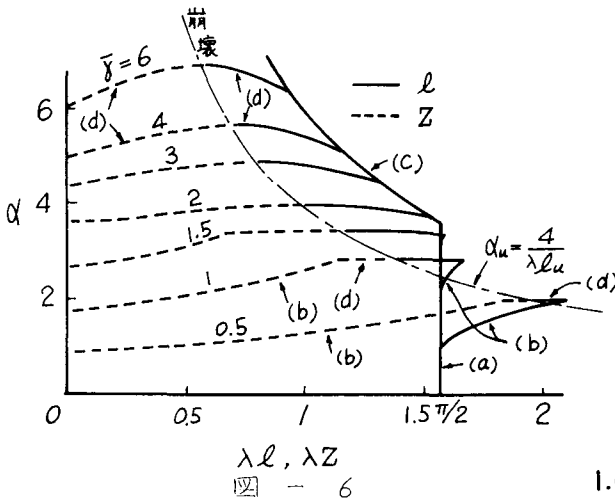
図 - 5

は、つり合い条件より

$$\lambda \ell_u = \lambda Z u = \sqrt{2/\bar{\gamma}}, \quad \alpha_u = \sqrt{8\bar{\gamma}} \quad (8)$$

となる。

以上の関係を図-6, 7, 8に示した。図-6, 7の図中に示した記号 (a), (b), (c)----は、それぞれ、図-3の状態の記号に一致させた。図-9は α/α_u と $\bar{\gamma}$ との関係を示したものであり、この図より、 $\bar{\gamma}=2$ のときが、 α_u に対する弾性限界が高いことがわかる。



5. 有限長ばりの崩壊荷重

さきに述べたように、図-2に示すように理想化した地盤上の桁の崩壊時における条件は、崩壊時の桁の接地長さ全体にわたって、接地圧が地盤の極限支持力に等しいということと与えられる。そこで、2, 3の荷重状態に対する有限長ばりの崩壊形と崩壊荷重について計算を行なった。

A) 桁の中央点に単一集中荷重が働く場合

この場合になしは、図-10に示す3種類の崩壊形が考えられる。(a)は、荷重点に塑性ヒンジが生じ、地盤は2Z全体にわたって塑性状態であり、桁の両端が浮き上っている場合である。(b)

は同様な状態であるが、桁の両端が沈下する場合で、(a) に比し、桁の長さが短い場合に考えられる状態である。(c) の崩壊形は、桁は弾性であるが、桁の接地長さ全体にわたって、地盤が降伏した場合であり、(b) よりさらに短い桁の場合とか、極度に地盤が弱い場合に生ずると考えられる形

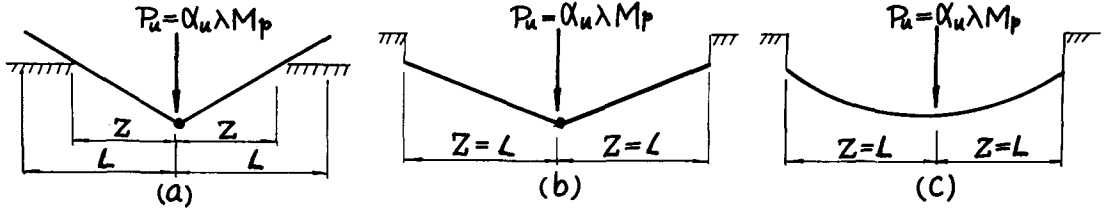


図 - 10

である。それぞれの場合について、つり合い条件より、つぎの式を得る。

i) $\lambda L > \sqrt{2/\delta}$ のとき、崩壊形図-10(a), $\lambda Z = \sqrt{2/\delta}$, $\alpha_u = \sqrt{\delta \bar{\gamma}}$

ii) $\lambda L = \sqrt{2/\delta}$ のとき、崩壊形図-10(b), $Z = L$, $\alpha_u = \sqrt{\delta \bar{\gamma}}$

iii) $\lambda L < \sqrt{2/\delta}$ のとき、崩壊形図-10(c), $Z = L$, $\alpha_u = 2 \bar{\gamma} \lambda L$

ここに、 $2L$ = 桁の長さ、 $2Z$ = 崩壊時の接地長さである。

B) 対称な2点集中荷重が働く場合

この場合には、表-1に示す9種類の崩壊形が考えられ、それぞれの場合に対し、つり合い条件より表-1に示すような結果が得られる。これらのうち、崩壊形9は、桁は弾性であるが、桁の長さ全体にわたって、地盤が降伏した状態である。

表-1 崩壊形と崩壊荷重

No.	崩壊形	適要範囲	崩壊時の接地長さ	崩壊荷重
1		$\lambda b > \sqrt{2/\delta}$ $\lambda a < 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$\lambda Z = \sqrt{2/\delta}$ $x = a$	$\alpha_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2} + \sqrt{\bar{\gamma}} \lambda a)$
2		$\lambda b > \sqrt{2/\delta}$ $\lambda a = 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$\lambda Z = \sqrt{2/\delta}$ $x = a$	$\alpha_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2} + 2)$
3		$\lambda b > \sqrt{2/\delta}$ $\lambda a > 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$\lambda Z = \sqrt{2/\delta}$ $\lambda x = 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$\alpha_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2} + 2)$
4		$\lambda b = \sqrt{2/\delta}$ $\lambda a < 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$Z = b$ $x = a$	$\alpha_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2} + \sqrt{\bar{\gamma}} \lambda a)$
5		$\lambda b = \sqrt{2/\delta}$ $\lambda a = 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$Z = b$ $x = a$	$\alpha_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2} + 2)$
6		$\lambda b = \sqrt{2/\delta}$ $\lambda a > 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$Z = b$ $\lambda x = 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$	$\alpha_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2} + 2)$
7		$\lambda b < \sqrt{2/\delta}$ $(\lambda a)^2 - (\lambda b)^2 = 2/\bar{\gamma}$	$Z = b$ $x = a$	$\alpha_u = \bar{\gamma}(\lambda a + \lambda b)$

表-1 の つぎ

No.	崩壊形	適要範囲	崩壊時の接地長さ	崩壊荷重
8		$\lambda b < \sqrt{2/\bar{\gamma}}$ $(\lambda a)^2 - (\lambda b)^2 > 2/\bar{\gamma}$	$Z = b$ $\lambda x = \sqrt{\frac{2}{\bar{\gamma}} + (\lambda b)^2}$	$\alpha_u = \bar{\gamma} \left[\lambda b + \sqrt{\frac{2}{\bar{\gamma}} + (\lambda b)^2} \right]$
9		$\lambda b < \sqrt{2/\bar{\gamma}}$ $(\lambda a)^2 - (\lambda b)^2 < 2/\bar{\gamma}$	$Z = b$ $x = a$	$\alpha_u = \bar{\gamma} (\lambda a + \lambda b)$

表-1に示した適要範囲を、図示したものが図-11である。この図より、載荷位置と桁と地盤の性質によつて、どのような崩壊形となるかがわかる。図-12は、 λa 、 λb 、 $\bar{\gamma}$ と α_u との関係を図示したものである。

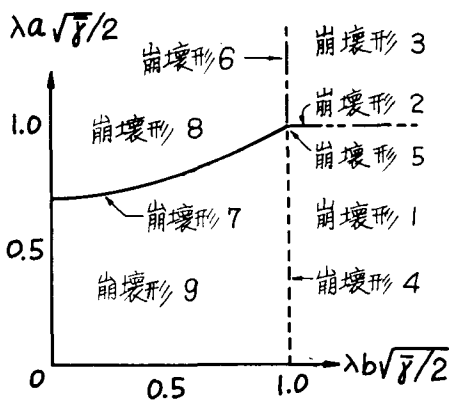


図-11

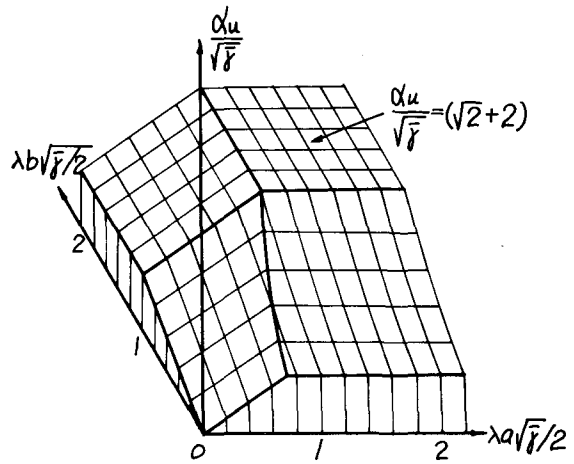


図-12

C) 経済設計

桁端な2点集中荷重が作用している場合について考えると、9種類の崩壊形のうち、 P_u が最も大きく、桁の長さの小さい状態は、崩壊形5の場合で、 $\lambda a = 2/\sqrt{\bar{\gamma}}$ 、 $\lambda b = \sqrt{2/\bar{\gamma}}$ 、 $P_u = \sqrt{\bar{\gamma}}(\sqrt{2}+2)\lambda M_p$ である。いま、荷重間隔 $2a$ ならびに P_u 、 P_0 が与えられたとすると、

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.707a, \quad B = \frac{2}{\sqrt{2}+2} \frac{P_u}{P_0 a}, \quad M_p = \frac{P_u a}{2(\sqrt{2}+2)} = 0.147 P_u a$$

を得る。これらの式より、桁の長さが小さい経済的な基礎が設計できよう。

6. おまけ

地盤は非常に複雑な性質を有し、不確実な要素があまりにも多い。したがって、単純な仮定のもとに行なった計算が果してどの程度合うか疑問ではあるが、一応、一般的な傾向をつかむことはできるものと考えられる。

有益なる助言を戴いた、名古屋大学成岡昌夫教授、福本啓士助教授に心から感謝致します。

本報告は一部すでに発表したものを加筆まとめたものである。^{1) 2)}

1) 草間孝志 地盤上の桁の塑性計算に関する一試案 土木学会第22回年次講演会 昭42.5

2) 草間孝志 吉田俊弥 弾塑性地盤上の有限長さの崩壊について 土木学会中部支部研究発表会 昭和43.11