

§ 1 概 要

本論文では、A.I.S.C. 1963年度版の鋼構造設計仕様書⁽¹⁾に基いて、Fig. 1-1に示す、ビル建築によく用いられる矩形ラーメンの最小重量設計を、線形計画法を繰返し適用することにより、求めるものである。この場合、設計変数として、断面二次モーメントと、建物の各部寸法を考えている。設計の対象として考えられたラーメンは、最下階の柱脚固定、部材は、等断面のものと仮定する。用いられた電子計算機は、M.I.T.のコンピューターセンターのI.B.M 7094である。

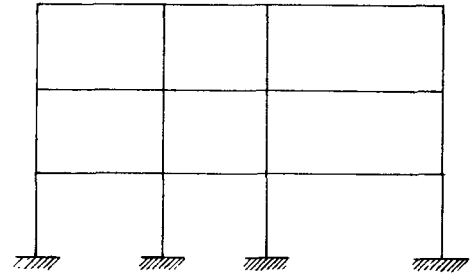


Fig. 1.1 Unbraced Frame

又、本論文は、筆者が、M.I.T.に留学中に、修士論文として、土木工学科のコーネル助教授の指導のもとに、完成したものである。

§ 2. 最適設計法

建物のような構造物を設計する際、昔から構造技術者は、構造物を、予想される外力に対して、安全に、又、要求される機能を満足して、しかも、できるだけ安いコストで設計するように、経験とか、試行錯誤に基いて、求めてきた。しかし、一般には、考えるべき設計変数があまりにも多いこと、最適設計を求める手法が確立していないことから、大体、最適設計法に近いであろうと思われるものを設計してきた。最近、電子計算機の著るしい進歩により、正確な構造解析が行えるようになり、それに基づいて、数多くの試算による経済的な構造設計も行えるようになってきた。又、特に経営学の分野で、最適設計の手法が、急速に開発されつつあり、種々の問題を系統的に、解くことができるようになった。土木建築の構造設計の分野では、単純塑性理論による骨組の設計に、線形計画法が、1950年頃より、用いられてきたのは、よく知られていることである。この場合、制約条件式及び、目的関数が、線形変数の線形の関数で表わされるために、線形計画法が、直接に、適用できる。しかし、弾性設計の場合には、制約条件式及び、目的関数が、非線形になるために、線形計画法の単純な適用は不可能なため、確立された最適設計法の数は、少ない。

さて、最適設計法を定義してみよう。最適設計法とは、構造物に要求される種々の制約条件をすべて、同時に満足した上で、目的関数（構造物のコスト、或いは、重量等）を最小にする設計変数の組合せを得ようとするものである。

構造設計の際に、設計変数として考慮されるものは、広義に考えて次のものであろう。

1. 構造形式（トラス、アーチ、ラーメン、シェル等）
2. 構造物の幾何学的条件（形、寸法等）
3. 材料（軟鋼、高張力鋼、アルミニウム等）

4. 部材の断面形状 (H-200×100×5.5×8, STK-139.8φ×4.0等)

実際の構造設計で、これらの設計変数を、同時に考慮することは、組合せの数も莫大なものとなるために、困難になるので、構造設計者が、任意に、いくつかの変数を与えられるものとして、考慮するのが普通である。例えば、普通の設計の際には、断面形状だけが、変数と考えられる場合が多い。

又、制約条件として、一般に、次のものが考えられる。

1. 強度上から、弾性設計では、構造物各部分の応力度が、許容応力度を越えてはならない。
2. 使用上から、構造物の節点の撓みが、許容の撓みより小さくなければならない。
3. 構造以外からの制約。即ち、建築家、設計技術者より要求される機能面からの制約で、柱の本数、階高、或いは、部材の背丈の最大寸法等である。

応力度とか、撓みは、設計変数の関数として表わされ、構造物の状態を表わすので、状態変数と呼ばれる。従って、1, 2は、状態変数に対する制約であり、3は、設計変数自体の制約である。

目的関数として、一般にコストを考えるのが最も適当であるが、便宜的に、重量でそれを代用する場合が多い。特に、鉄鋼構造物の場合、コストは、重量に大体、比例すると考えて良いからである。この場合、最適設計法は、最小重量設計法と呼ばれる。

§ 3 設計順序

3.1 設計順序

弾性設計の場合、目的関数或いは、制約条件式は、一般に、設計変数の非線形関数となる場合が多く、解くのに非線形計画法を適用しなければならない。既に、Steepest Descent Methodを適用した例を見かけるが、ここでは、非線形関数を、線形関数に、その都度、近似して、線形計画法を適用し、それを繰返すことによって、解を求めるCutting Plane Methodを用いる。既ち、弾性設計の方法を整理すると、次のように表わされる。ここで、

Z : 目的関数

X_i : 設計変数

Y_i : 状態変数

状態変数の制約条件式は

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &\leq Y_1(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \leq C_{12} \\ C_{21} &\leq Y_2(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) \leq C_{22} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

設計変数の制約条件式は

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &\leq X_1 \leq D_{12} \\ D_{21} &\leq X_2 \leq D_{22} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

C_{11} , C_{12} , $\dots$, D_{11} , D_{12} , $\dots$ は、それぞれの制約条件の上限、下限を表わす。そして、目的関数 Z も設計変数の関数であるので、 $Z(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$ と表わされ、問題は、

(3.1), (3.2) の制約条件の下に, Z を最小にすることとする。

(3.1), (3.2) は, 最初に仮定した設計変数を, $X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0$ とし, その奥のまわりに, テーラー展開して, 一次の項のみをとると, 次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} C_{11} - Y_1(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) &\leq \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \Delta X_2 \\ &+ \dots + \frac{\partial Y_1}{\partial X_n} \Delta X_n \leq C_{12} - Y_1(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) \\ &\dots \dots \dots \\ D_{11} - X_1^0 &\leq \Delta X_1 \leq D_{12} - X_1^0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

そして, 目的関数は, $Z(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) + \frac{\partial Z}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial Z}{\partial X_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial X_n} \Delta X_n$ となるが, 最初の項, $Z(X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$ は一定であるので

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial Z}{\partial X_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial Z}{\partial X_n} \Delta X_n \quad (3.4)$$

を最小にすることになる。従って, ここに $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n$ を変数とすれば, ここに線形計画法を適用できる。これが, この論文の最も重要な点である。(3.3), (3.4) の $\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}, \frac{\partial Y_1}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial X_1}{\partial X_1}, \frac{\partial X_2}{\partial X_2}, \dots$ は, 感度係数と呼ばれ, 次章で説明する。

次に, 全体の設計順序を Fig 3-1 の Macro Flow Chart により説明する。

まず, Input Data を読み込む。Input Data は, ここでは, 矩形ラーメンであるから, 建物の規模, 幾何学的寸法, 荷重条件等である。更に, 設計変数の, 仮定された初期値 X^0 も Input される。設計変数として, この論文では, 部材の断面二次モーメントと, 部材の位置を考えている。これらの Input Data から, 剛性マトリックス法により構造解析を行い, 撓み, 応力を求め, 更に, 各部の応力度を算定する。そして, A.I.S.C. による Interaction equation の値を計算する。これが Y^0 である。次に各状態変数の設計変数に対する感度係数を計算する。この感度係数と, 制約条件式から, 一連の線形計画法のための式を組立てる。これを Simplex 法で解く。この時得られた解が各設計変数の変化量 ΔX であり, もしこの変化量 ΔX が収斂条件として与えられた値より, 小さくなれば, 収斂したものと見做して, 設計を終える。もし, 条件を満足していなければ, 前の設計変数の値に, 求められた ΔX をそれぞれ, 加えることにより, 新しい設計変数

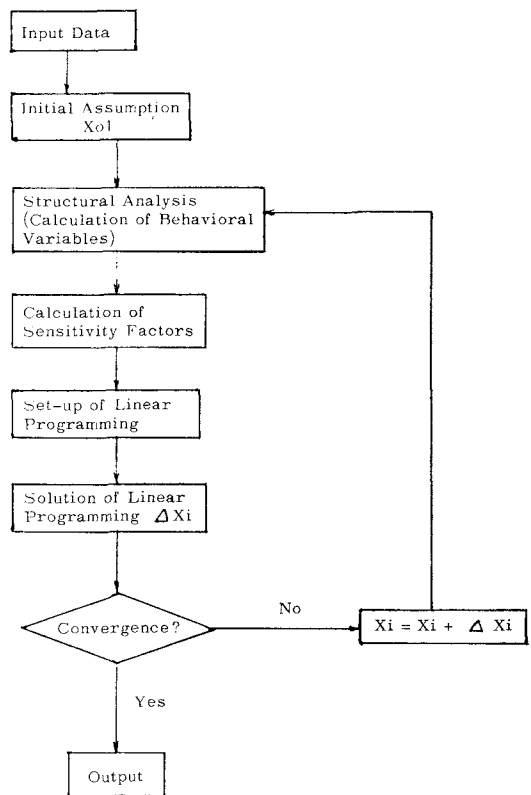


Fig. 3.1 Macro Flow Chart of the Design

を得る。そして、再び、構造解析を行う。後は全く同じ過程で、収斂条件が満足される迄、繰返えされる。この一連の設計の流れは、単純に見えるが、実際の問題の運用では、種々の工夫が必要とされる。この方法については、§ 4.6に説明する。

	Beam		Column		Weight of Structure
	$I_B(\text{in}^4)$	Stress*	$I_C(\text{in}^4)$	Stress*	
Initial	1600	0.6153	1600	0.7005	3.947
1 cycle	1120	0.7993	1120	0.8977	3.302
2 cycle	784	1.039	1005	1.017	2.982
3 cycle	818	1.002	1022	1.000	3.022
4 cycle	819	1.000	1023	1.000	3.023

*Stress means the value of the interaction equation of each member, accordingly, it must not be over unity.

Table 3.1 Design Process of Example 1

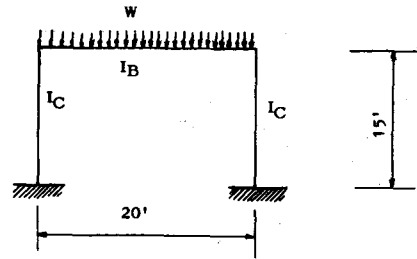


Fig. 3.2 Example 1

3.2 具体例

以上の説明を、具体的に理解するために、詳しい設計理論の説明の前に、最も簡単な例を述べる。梁に、等分布鉛直荷重を受けるポータルフレームの設計である。寸法及び荷重条件はFig 3.2に示す。ここでは、左右の柱の断面を一変数とし、図示できるようにする。仮定断面は、 $I_B = I_C = 1.600 \text{ in}^4$ とする。設計の経過

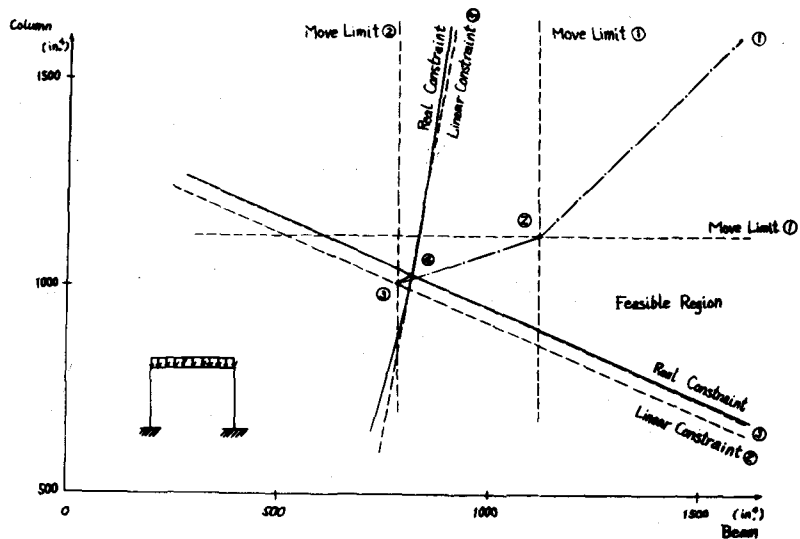


Fig. 3.3 Illustration of Design Process of Example 1

は、Table 3.1, Fig 3.3に示す。第1サイクルでは、Move Limit で決まり、第2サイクルで、unfeasible な範囲に入り、第3サイクルで 殆んど最適解に収斂している。最適解は $I_B = 819 \text{ in}^4$, $I_C = 1023 \text{ in}^4$ である。

§ 4. 設計理論

4.1 構造解析

構造解析は 剛性マトリックス法により行う。Fig 4.1に於て

1. B点を固定した場合、A点の変位により、A点での部材応力は、

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{AB} \\ \bar{S}_{AB} \\ \bar{M}_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{NA} \\ \delta_{SA} \\ \theta_A \end{Bmatrix} = \underline{k}_{AB}' \cdot \underline{D}_{AB} \quad (4.1)$$

B 点での部材内力は

$$\underline{F}_{BA} = \begin{Bmatrix} N'_{BA} \\ S'_{BA} \\ M'_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -l & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N'_{AB} \\ S'_{AB} \\ M'_{AB} \end{Bmatrix} = \underline{C}_{AB} \cdot \underline{F}_{AB} \quad (4.2)$$

2. A 点を固定した場合, B 点の変位により, B 点での部材内力は

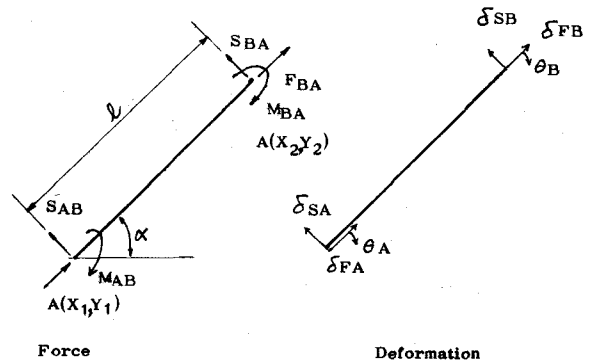


Fig. 4.1

$$\underline{F}_{BA}'' = \begin{Bmatrix} N'_{BA} \\ S'_{BA} \\ M'_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{NB} \\ \delta_{SB} \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \underline{k}_{AB}'' \cdot \underline{D}_{BA} \quad (4.3)$$

A 点の部材内力は

$$\underline{F}_{AB}' = \begin{Bmatrix} N'_{AB} \\ S'_{AB} \\ M'_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N'_{BA} \\ S'_{BA} \\ M'_{BA} \end{Bmatrix} = \underline{C}_{BA} \cdot \underline{F}_{BA}'' \quad (4.4)$$

となる。これは、部材座標系について行われたが、構造座標系に変換されねばならない。変換マトリックス $\underline{T}$ は

$$\underline{T}_{AB} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

であるが、矩形ラーメンであるから、梁に対しては、 $\alpha = 0^\circ$ 、柱に対して、 $\alpha = 90^\circ$ である。従って

$$\underline{T}_{\text{beam}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\underline{T}_{\text{column}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

従って、 $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BA}$ を, A 点, B 点の構造座標系に関する変位マトリックスとすれば,

$$\underline{D}_{AB} = \underline{T}_{AB} \underline{U}_{AB} \quad (4.8)$$

$$\underline{D}_{BA} = \underline{T}_{AB} \underline{U}_{BA} \quad (4.9)$$

そして、 $\underline{P}_{AB}$, $\underline{P}_{BA}$ を構造座標系に関する節点外力のマトリックスとすれば

$$\underline{F}_{AB} = \underline{T}_{AB} \underline{P}_{AB} \quad (4.10)$$

$$\underline{F}_{BA} = \underline{T}_{AB} \underline{P}_{BA} \quad (4.11)$$

一方、各節点に関する応力のマトリックスは

$$\underline{F}_{AB} = \underline{F}'_{AB} + \underline{F}''_{AB} \quad (4.12)$$

$$\underline{F}_{BA} = \underline{F}'_{BA} + \underline{F}''_{BA} \quad (4.13)$$

で表わされる。従って、各節点について、次の式が成立する。

$$\underline{P}_{AB} = \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \underline{U}_{AB} + \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{C}_{BA} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \underline{U}_{BA} \quad (4.14)$$

$$\underline{P}_{BA} = \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{C}_{AB} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \underline{U}_{AB} + \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \underline{U}_{BA} \quad (4.15)$$

そして更に

$$\left. \begin{aligned} \underline{K}_{AA} &= \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \\ \underline{K}_{BB} &= \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \\ \underline{K}_{AB} &= \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{C}_{BA} \underline{k}_{AB} \underline{T}_{AB} \\ \underline{K}_{BA} &= \underline{T}_{AB}^{-1} \underline{C}_{AB} \underline{k}_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} \underline{P}_{AB} &= \underline{K}_{AA} \underline{U}_{AB} + \underline{K}_{AB} \underline{U}_{BA} \\ \underline{P}_{BA} &= \underline{K}_{BA} \underline{U}_{AB} + \underline{K}_{BB} \underline{U}_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

これを全構造系でまとめると

$$\underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{U} \quad (4.18)$$

従って

$$\underline{U} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{P} \quad (4.19)$$

となる。

但し、

$\underline{K}$: 全構造系の剛性マトリックス

$\underline{U}$: 全構造系の節点の変位マトリックス

$\underline{P}$: 節点に加わる外力のマトリックス

従って、全構造系の剛性マトリックスの逆行列に、外力マトリックスを乗すれば、各節点の変位が求まり、それにより、(4.1) ~ (4.4) より、各部材の応力が、計算される。

4.2 Wide Flange Sectionの断面性能の相関関係

状態変数は、主として、断面積及び断面二次モーメントの関数であり、目的関数は、断面積の関数である。ここで、断面を設計変数として考えた場合、これらの断面性能に、一義的な関係が必要である。従って、A.I.S.C. 1963年度版の鋼構造設計仕様書に用いられている。Wide Flange Sectionの断面性能をプロットし、相互の関係を求める。(Fig 4.2, Fig 4.3参照)

梁の場合

$$S_x = 0.58 I_x^{3/4} \quad (4.20)$$

$$A = 0.58 I_x^{1/2} \quad (4.21)$$

柱の場合

$$S_x = 0.78 I_x^{3/4} \quad (4.22)$$

$$A = 0.80 I_x^{1/2} \quad (4.23)$$

$$r_y = 0.67 I_x^{1/4} \quad (4.24)$$

$$I_y = 0.36 I_x \quad (4.25)$$

4.3 許容応力度 (状態変数の制約条件)

A.I.S.C 1963年度鋼構造設計仕様書⁽¹⁾による。

1. 引張りの場合

$$F_t = 0.60 F_y \quad (4.26)$$

2. 曲げの場合

$$F_b = 0.66 F_y \quad (4.27)$$

3. 合成応力度の場合

$f_a/F_a \leq 0.15$ の時

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \quad (4.28)$$

$f_a/F_a > 0.15$ の時

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{(1 - \frac{f_b}{F_b}) F_b} \leq 1.0 \quad (4.29)$$

所で、梁に対しては、 $C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2}$

但し、0.4以上

柱に対しては、 $C_m = 0.85$ とし、もし $Kl/r \leq C_c$ の場合、

$$F_a = \frac{[1 - (\frac{Kl}{r})^2 / 2C_c^2] F_y}{F.S} \quad (4.30)$$

所で $F.S. = \frac{5}{3} + \frac{3(Kl/r)}{8C_c} - \frac{(Kl/r)^3}{8C_c^3}$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} \quad \text{である。}$$

$Kl/r > C_c$ の時

$$F_a = \frac{149,000,000}{(Kl/r)^2} \quad (4.31)$$

更に、座屈長の係数は、下式により求める。 Sidesway のない場合には

$$\begin{aligned} & \frac{G_A G_B (\frac{\pi}{4})^2 + (\frac{G_A + G_B}{2}) (1 - \frac{\pi/K}{\tan(\pi/K)})}{4} \\ & + \frac{2 \tan(\pi/2K)}{\pi/K} = 1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sidesway のある場合には

$$\frac{G_A G_B (\pi/K)^2 - 36}{6(G_A + G_B)} = \frac{\pi/K}{\tan(\pi/K)} \quad (4.33)$$

但し $G = \frac{\sum (I_c / l_c)}{\sum (I_a / l_a)}$ である。

(4.32), (4.33) 共 K の超越関数であるので、Trial and Error Method により、求める。

4.4 目的関数

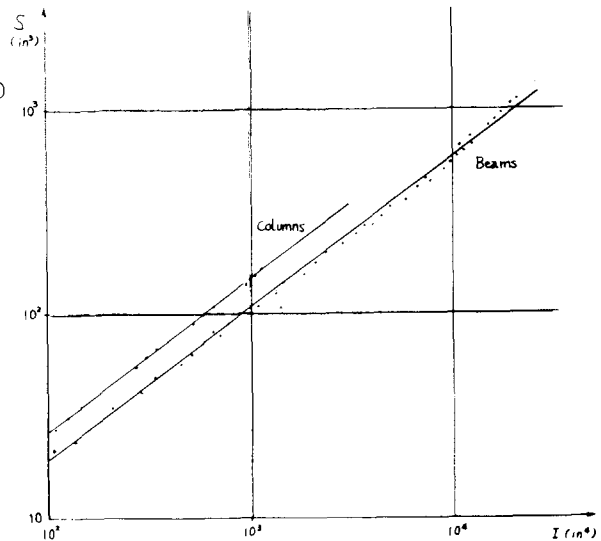


Fig. 4.2 S vs. I of Wide Flange Sections

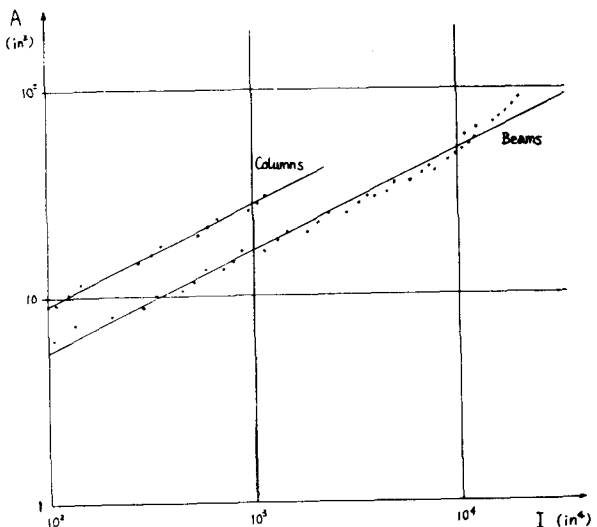


Fig. 4.3 A vs. I of Wide Flange Sections.

ここでは、目的関数として、
構造物の重量を考えている。

従って

$$Z = \delta \sum_{j=1}^n 0.58 I_j^{1/2} l_j + \delta \sum_{k=1}^m 0.80 I_k^{1/2} l_k \quad (4.34)$$

但し、 δ : 比重

m : 柱の本数

n : 梁の本数

この目的関数を、ポータルフレームの Contour line として、
例に示す。(Fig. 4.4)

原点から遠くなるに従って構造

重量が大きくなっていくが、非線形であることに注目すべきである。

4.5 感度係数

感度係数は、設計変数の微小の変化に対する状態変数 Y_i 、又は 目的関数 Z の変化量を示す。そして、状態変数 又は 目的関数 Z の設計変数の一次偏微分で、近似的に表わし得る。

先ず、状態変数、部材の Interaction equation の値 Y_i は

$$Y_i = \frac{e M_i}{f_b S_i} + \frac{N_i}{f_a A_i} \quad (4.35)$$

所で $e = \frac{C_m}{1 - \frac{f_a}{F_c}}$ である。

故に 設計変数 I_j に対する感度係数は

$$a_{ij} = \frac{\partial Y_i}{\partial I_j} = \frac{e}{f_b S_i} \cdot \frac{\partial M_i}{\partial I_j} + \frac{1}{f_a A_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial I_j} + \frac{e M_i}{f_b} \frac{\partial}{\partial I_j} \left(\frac{1}{S_i} \right) + \frac{N_i}{f_a} \frac{\partial}{\partial I_j} \left(\frac{1}{A_i} \right) + \frac{N_i}{A_i} \frac{\partial}{\partial I_j} \left(\frac{1}{f_a} \right) \quad (4.36)$$

設計変数 l_j に対する感度係数は

$$a_{ij} = \frac{\partial Y_i}{\partial l_j} = \frac{e}{f_b S_i} \frac{\partial M_i}{\partial l_j} + \frac{1}{f_a A_i} \frac{\partial N_i}{\partial l_j} + \frac{N_i}{A_i} \frac{\partial}{\partial l_j} \left(\frac{1}{f_a} \right) \quad (4.37)$$

目的関数 Z は

$$Z = \delta \left(\sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^n l_i A_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_i A_{ij} \right) \quad (4.38)$$

$$C_j = \frac{\partial Z}{\partial I_j} = \delta l_i \frac{\partial}{\partial I_j} (A_{ij}) \quad (4.39)$$

設計変数 l_j に対する感度係数 C_j は

$$C_j = \frac{\partial Z}{\partial l_j} = \delta A_{ij} \frac{\partial l_i}{\partial l_j} \quad (4.40)$$

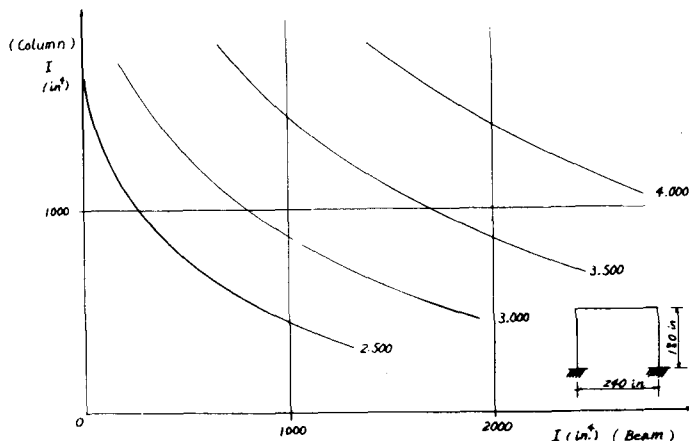


Fig. 4.4. Contour Line of Objective Function

である。これらの式の内 $\frac{\partial}{\partial I_f} (\frac{1}{S_f})$, $\frac{\partial}{\partial I_f} (A_{if})$, $\frac{\partial}{\partial I_f} (\frac{1}{A_f})$ は, Wide Flange Section の断面性能の関係式 (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) より求まり, $\frac{\partial}{\partial I_f} (\frac{1}{f_a})$ は, 許容座屈応力度の式より求まる。次に $\frac{\partial M_i}{\partial I_f}$, $\frac{\partial N_i}{\partial I_f}$ を, 構造解析の関係式より求めよう。

初めに仮定された断面による力と, その変位の関係式は (4.16) より

$$\underline{P}_0 = \underline{K}_0 \cdot \underline{U}_0 \quad (4.41)$$

次に, 周辺の変位を微小量変化させ, その値を $\underline{P}_1$, $\underline{K}_1$, $\underline{U}_1$ とする。この場合も

$$\underline{P}_1 = \underline{K}_1 \cdot \underline{U}_1 \quad (4.42)$$

である。又

$$\left. \begin{aligned} \underline{P}_1 &= \underline{P}_0 + \Delta \underline{P} \\ \underline{K}_1 &= \underline{K}_0 + \Delta \underline{K} \\ \underline{U}_1 &= \underline{U}_0 + \Delta \underline{U} \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

であるから, これを (4.42) に代入し, 二次的な項を除くと

$$\Delta \underline{P} = \underline{K}_0 \cdot \Delta \underline{U} + \Delta \underline{K} \cdot \underline{U}_0 \quad (4.44)$$

従って, X_i を設計変数とすれば

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial X_i} = \underline{K}_0 \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial X_i} + \frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i} \cdot \underline{U}_0 \quad (4.45)$$

この式の内, $\underline{K}_0$, $\underline{U}_0$ は, 既知であるので $\frac{\partial \underline{P}}{\partial X_i}$ を求めるために, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial X_i}$, $\frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i}$ を求めれば良い。先ず, $\frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i}$ を求める。

設計変数が I_i の場合

$$\frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i} = \frac{\partial \underline{K}}{\partial I_i} = \begin{bmatrix} \frac{E \partial A_i}{\partial I_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E}{L_i^3} & -\frac{6 E}{L_i^2} \\ 0 & -\frac{6 E}{L_i^2} & \frac{4 E}{L_i} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$\frac{\partial A_i}{\partial I_i}$ は, Wide Flange Section の断面性能の関係式から求まる。次に, 設計変数が L_i の場合

$$\frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i} = \frac{\partial \underline{K}}{\partial L_i} = \begin{bmatrix} -\frac{E A_i}{L_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{36 E I_i}{L_i^4} & \frac{12 E I_i}{L_i^3} \\ 0 & \frac{18 E I_i}{L_i^3} & -\frac{4 E I_i}{L_i^2} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

従って, $\frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i}$ は, (4.45), (4.46) の各項を全構造物にまてめると $\frac{\partial \underline{K}}{\partial X_i}$ を得る。

次に, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial X_i}$ は $\underline{U} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{P}$ の周辺を偏微分して, $\frac{\partial \underline{U}}{\partial X_i} = \frac{\partial \underline{K}^{-1}}{\partial X_i} \cdot \underline{P} + \underline{K}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{P}}{\partial X_i}$ から得られる。この場合, $\frac{\partial \underline{P}}{\partial X_i}$ は, 外力が, 設計変数に独立であれば, 0 となる。等分布荷重の場合には, 梁の長さにより, 節点に加わる外力が変化するから, 0 とはならない。

即ち, 固定端モーメントは

$$\frac{\partial P}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial L_i} \left(\frac{1}{12} w L_i^2 \right) = \frac{1}{6} w L_i$$

せん断力は

$$\frac{\partial P}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial L_i} \left(\frac{1}{2} w L_i \right) = \frac{1}{2} w \quad \text{である。}$$

次に、 $\frac{\partial \underline{K}^{-1}}{\partial X}$ を求める。

部材 i に微小の剛性変化を与えると

$$\underline{k}_{i,1} = \underline{k}_{i,0} + \Delta \underline{k}_i \quad (4.48)$$

である。従って、その時の新しい剛性マトリックス $\underline{K}_1$ は

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_0 + \Delta \underline{k}_i = \underline{K}_0 \cdot (\underline{I} + \underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i) \quad (4.49)$$

但し、 $\Delta \underline{k}_i$ は、注目する部材 i に関する部分だけ 0 でない要素であって、他の要素はすべて 0 とするマトリックスである。(4.47) の逆行列をとると

$$\begin{aligned} \underline{K}_1^{-1} &= [\underline{K}_0 \cdot (\underline{I} + \underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i)]^{-1} = (\underline{I} + \underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i)^{-1} \cdot \underline{K}_0^{-1} \\ &= [\underline{I} - \underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i + (\underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i)^2 + \dots] \cdot \underline{K}_0^{-1} \\ &\approx (\underline{I} - \underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i) \cdot \underline{K}_0^{-1} \\ &= \underline{K}_0^{-1} - \underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i \cdot \underline{K}_0^{-1} \end{aligned} \quad (4.50)$$

従って

$$\Delta \underline{K}_1^{-1} = \underline{K}_1^{-1} - \underline{K}_0^{-1} = -\underline{K}_0^{-1} \cdot \Delta \underline{k}_i \cdot \underline{K}_0^{-1} \quad (4.51)$$

である。故に

$$\frac{\partial \underline{K}^{-1}}{\partial X} = -\underline{K}_0^{-1} \frac{\partial \underline{k}_i}{\partial X} \underline{K}_0^{-1} \quad (4.52)$$

4.6 良好な収斂を得る方法

この設計法によって、常に収斂するという保証は無く時に、後に示す例のように、振動してしまう場合もある。従って、いくつかの方法が、そのために考案され採用された。

1. Move Limit

最初に仮定した設計変数が、解から非常に離れている場合、その点から近似された線形の制約条件式や、目的関数は、実際のものから、非常に異っている場合がある。それにより得られる線形計画法による解が、非常に遠い解になる。それを避けるために、設計変数の変化に、上限及び下限を設け、設計変数の大きな変動を妨げるようにした。これを Move Limit と称する。ここには、元の設計変数の 20% 又は、30% としたが、この大きさが、収斂性にも、影響を与えるので、各々の設計条件、初期値に對して、適当に与えるべきである。後の例に見るように、初めは、Move Limit で制限されているが、最適設計に近づくにつれて、制約条件の方が、支配的になり、Move Limit の制限は無用になる。

2. Adaptive Move Limit

これは、反覆設計中一定の Move Limit ではなく、その条件に応じて、Move Limit の値を変えていくとするものである。特に、得られる設計変数が、1 回ずつ振動し、収斂していかない場合に用いられる。即ち、設計変数の変化量の符号が前の回と異なる場合には、Move Limit を半減させ、設計変数が、同一振動で、振動することを防ぐために考えられた。ポータルフレーム、片側水平荷重の場合に効果を発揮した。この場合、制約条件式と、目的関数の等高線が、ほぼ平行になるために、この現象が起った。

3. 制約条件の蓄積

Fig. 4.5 に示すように、最適設計が、制約条件式の交点に位置せず、一制約条件上に位置する場合、単なる線形計画法の適用では、最適設計は求まらない。そのため、前の回又は、その前の回に得られた制約条件の内、有効な制約条件のみを格納し、次の回の制約条件と一緒に、適用する。その結果、実際には、一制約条件の上に位置する最適設計も、二つ又は、それ以上の近似平面の交点として得られる場合がある。

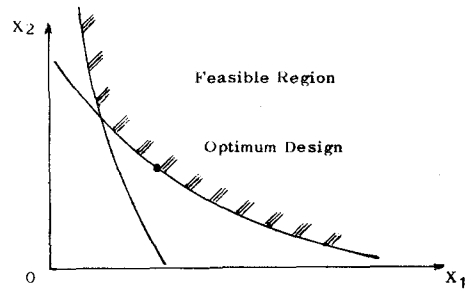


Fig. 4.5

§. 5. 実 例

この設計法により、多数の設計が試みられ、Ref. 5 には、その内19例について系統的に詳述されている。その数例をここに示す。

5.1 Example 2

構造規模：ポータルフレーム

荷重条件：才1, 才2
荷重条件、柱頭に水平荷重45 kips (対称的に左右から別々に載荷される。)

初期仮定断面：

Ex 2.1 $I_c = 1,600 \text{ in}^4$

$I_b = 1,600 \text{ in}^4$

Ex 2.2 $I_c = 1,700 \text{ in}^4$

$I_b = 600 \text{ in}^4$

Fig. 5.1, Fig. 5.2 に示されているように、初期仮定断面が全く異なるのに拘らず、同一の奥に

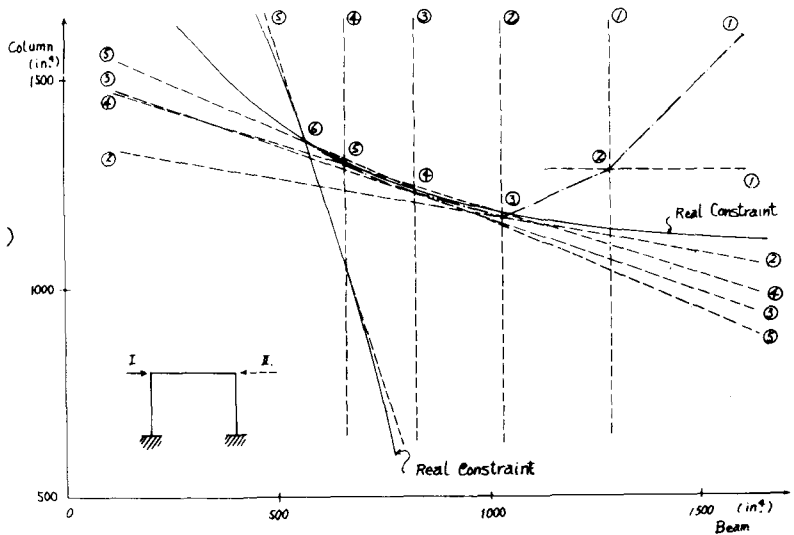


Fig. 5.1 Example 2 - 1

収斂している。この場合は、Fig. 4.4 の目的関数の性質からこの奥がGlobal optimum であることが分る。Ex. 2.1 では、Move Limit を20%としたが、初期仮定断面が最適断面からかなり遠い奥にあたったので、収斂までに6サイクル要している。これは、最初の断面の仮定の良し悪しが、収斂の速さに影響を与えていることを示している。又、この最適設計の奥では、Fully Stressed Designとなっている。(Table 5.1 参照)

5.2 Example 3.

構造規模：ポータルフレーム

荷重条件：才1 荷重条件、鉛直等分布荷重、0.5 kips/in, 才2, 才3 荷重条件、柱頭に水平集中荷重45 kips (対称的に左右から別々に載荷される。)

初期仮定断面：

$$I_c = 1.600 \text{ in}^4$$

$$I_b = 1.600 \text{ in}^4$$

Fig. 5.3に示すように、この場合は、Example 1とExample 2の制約条件が同時に作用するため、得られた最適断面は、前例とは全く異なったものとなる。柱が水平荷重時で梁が鉛直荷重時で Fully Stressedとなっている。そして、柱の断面は、この場合の方が Example 2により小さくなっている。普通的设计方法では、これを期待することができない。

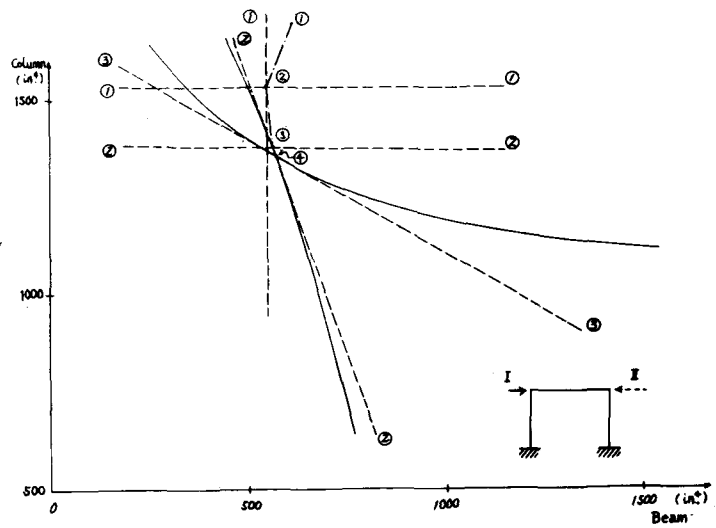


Fig. 5.2 Example 2 - 2

5.3 Example 4

構造規模：ポータルフレーム

荷重条件：柱頭に左から水平集中荷重 45 kips

初期仮定断面： $I_c = 1.600 \text{ in}^4$

$$I_b = 1.600 \text{ in}^4$$

最初 Adaptive Move Limit を用いずに設計した所、Fig 5.5に示すように、左右の柱の断面が振動してしまい、収斂しなかった。この現象は Hybrid Action として知られている。この Example では、Fig. 5.4に示すように、制約条件が目的関数の Contour line に大体沿っているので最適断面を定めるににくい。そこで Adaptive Move Limit を用いて強制的に収斂するようにした。この場合の設計過程は Table 5.2 に示される。

5.4 Example 5

構造規模：1 スパン 2 層ラーメン

荷重条件：鉛直等分布荷重 0.5 kips/in

初期仮定断面： $I_b = 2.400 \text{ in}^4$

$$I_c = 2.400 \text{ in}^4$$

収斂状況は、Fig. 5.6 に示す。最適断面は、Fully Stressed Design になっている。得られ

(1)	Beam		Column		Weight of Structure
	$I_b(\text{in}^4)$	Stress	$I_c(\text{in}^4)$	Stress	
Initial	1600	0.5743	1600	0.7737	3.947
				0.9271	
1 cycle	1280	0.6750	1280	0.9129	3.531
				1.009	
2 cycle	1024	0.7762	1165	0.9935	3.284
				1.006	
3 cycle	819	0.8631	1227	0.9891	3.203
				1.006	
4 cycle	655	0.9473	1294	0.9875	3.140
				1.003	
5 cycle	556	1.003	1355	0.9837	3.110
				1.000	
6 cycle	558	1.000	1361	0.9805	3.117

(2)	Beam		Column		Weight of Structure
	$I_b(\text{in}^4)$	Stress	$I_c(\text{in}^4)$	Stress	
Initial	600	0.9033	1700	0.8493	3.408
				0.9390	
1 cycle	540	0.9748	1530	0.9189	3.233
				0.9949	
2 cycle	552	1.001	1377	0.9753	3.125
				1.000	
3 cycle	558	1.000	1361	0.9805	3.117

Table 5.1 Design Process of Example 2

た構造重量は 5.497 kips
で、同じ荷重条件を受けるポ
ータルフレームの構造重量の
2倍よりかなり小さいのは、
非常に興味深い。この場合
は Fig. 5.7 に示されるように、
1 層の柱の断面ができるだけ
小さくなり、殆んど軸力を伝
えるだけになっており、2 層
柱脚、1 層柱頭の部分の曲げ
モーメントは、殆んど 2 層の
柱で抵抗している。即ち、
ここでは、材料の集中化が、
経済的な設計になることを
示している。

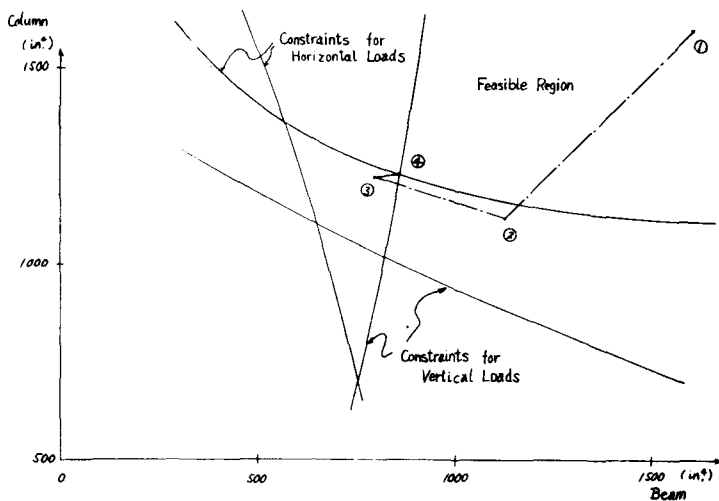


Fig. 5.3 Example 3

5.5 Example 6

構造規模：1 スパン 2 層ラーメン

荷重条件： α_1 α_2 荷重条件。各
柱頭に水平集中荷重 45 kips (対称的
に左右から別々に載荷される)

初期仮定断面： $I_c = 6400 \text{ in}^4$

$I_b = 6400 \text{ in}^4$

Fig. 5.8 に見るように、非常に良好
な収斂性を示している。この場合は、
Example 5 と異なり、得られた構造
物の形状は、普通期待される通りのも
のである。(Fig. 5.9 参照) 一般

の構造物が、常に外力として、水平荷重も
考慮して設計されていることを示すもので
ある。

5.6 Example 7

構造規模：3 スパン 1 層ラーメン

荷重条件：鉛直等分布荷重 0.5 kips/in

初期仮定断面： $I_c = 1.200 \text{ in}^4$

$I_b = 1.200 \text{ in}^4$

初期仮定スパン長： $\ell = 240 \text{ in}$

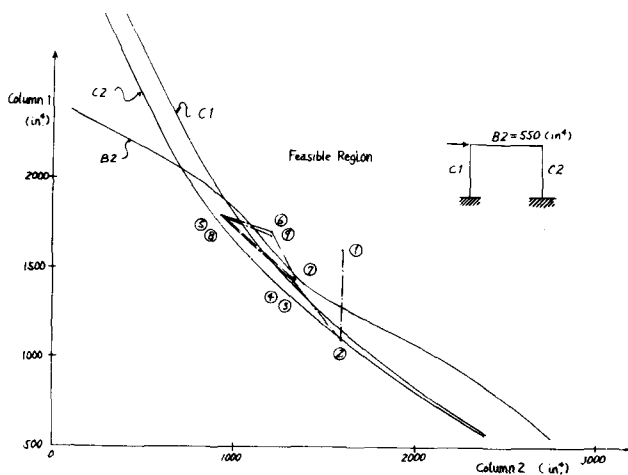


Fig. 5.4 Example 4 (Without Adaptive Move Limits)

	Beam		Column I		Column II		Weight of Structure
	I_b	Stress	I_{c1}	Stress	I_{c2}	Stress	
Initial	1600	0.5743	1600	0.7872	1600	0.7737	3.947
1 cycle	1120	0.7436	1120	1.023	1120	1.008	3.302
2 cycle	784	0.9018	1456	1.025	962	1.013	3.153
3 cycle	549	1.017	1584	1.017	1103	0.9909	3.086
4 cycle	572	1.002	1226	1.010	1433	0.9931	3.102
5 cycle	563	1.000	1267	1.000	1446	0.9833	3.116
6 cycle	563	1.000	1269	1.000	1447	0.9830	3.117

Table 5.2 Design Process of Example 4 (With Adaptive Move Limits)

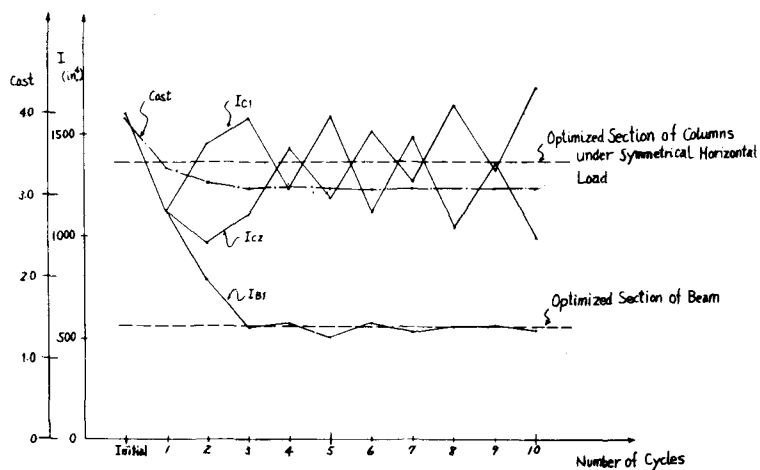
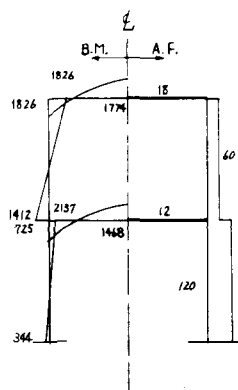


Fig. 5.5 Design Process of Example 4 (Without Adaptive Move Limits)

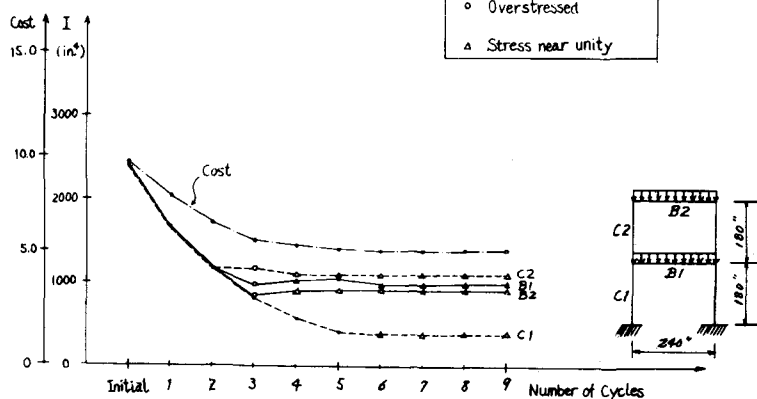
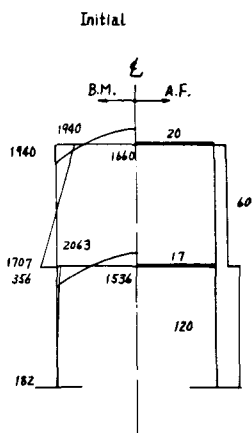
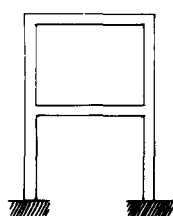
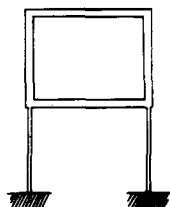


Fig. 5.6 Example 5



Final

Cycle	Moments of Inertia				Span		Weight of Structure
	I_{B1}	I_{B2}	I_{C1}	I_{C2}	L_1	L_2	
Initial	*1200	1200	1200	1200	240	240	8.204
1	Δ1320	*1168	840	840	228	264	7.641
2	1369	1361	584	588	215	290	7.248
3	1459	1578	412	412	229	261	6.992
4	1474	1560	288	288	242	235	6.599
5	1507	Δ1360	202	233	231	259	6.258
6	1538	Δ1371	141	248	224	272	6.182
7	*1454	*1467	99	Δ 211	217	285	5.972
8	1524	1571	69	195	225	271	5.969
8 (Stress)	0.971	0.953	0.934	0.908	—	—	—

Table 5.3 Design Process of Example 7

Fig. 5.7 Initial and Final Designs of Example 5

この設計では、スパンも設計変数として考える。柱の断面は小さくなり、柱頭の曲げモーメントを、できるだけ少なくしている。その結果、構造は連続梁のように収斂する。スパンの方は Table 5.3 に示すように、 ℓ は 220 in から 240 in の間で振動して収斂しないが、これは、設計がその辺でそれほど敏感に変わらないことを示している。

5.7 Example 8

構造規模：3 スパン 1 層 ラーメン

荷重条件： Ψ_1 Ψ_2 荷重条件、柱頭に水平集中荷重 4.5 Kips (対称的に左右から別々に載荷される。)

初期仮定断面： $I_c = 1,600\text{ in}^4$

$I_b = 1,600\text{ in}^4$

初期スパン長： $\ell = 240\text{ in}$

外柱及び、外梁が 0 に近づき、水平荷重に対して内柱だけで抵抗するような構造に収斂している。これも、材料の集中化が経済的な構造を導くことの一例である。

スパン長は、幾分内柱が外側による傾向が見られるが、それほど著しくない。

§. 6. 結論と今後の問題点

この論文では、剛性マトリックス法による構造解析に基く感度係数を利用し、繰返し、線形計画法を適用して平面ラーメンの最適設計を電子計算機で、自動的に行うことができることを示した。

今後の問題としていくつか指適

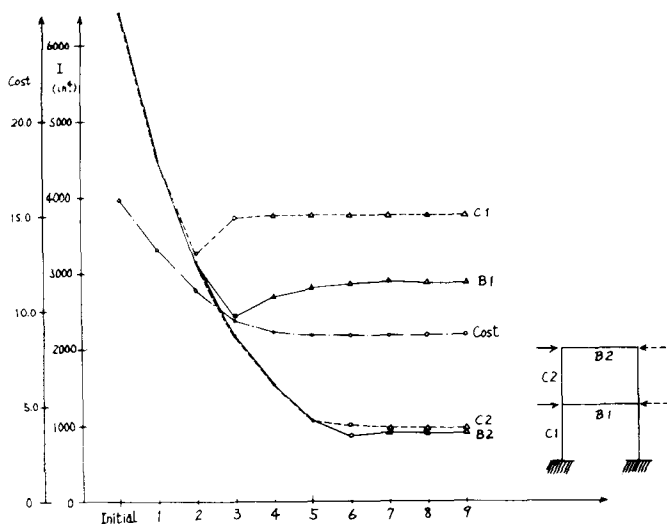


Fig. 5.8 Example 6

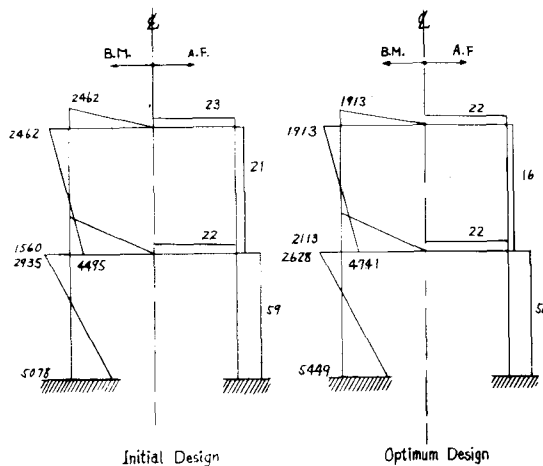


Fig. 5.9 Initial and Final Designs of Example 6

しょう。

線形計画法で最適解を解くために、感度係数を逆行列を用いて計算しているが、それにより、非常に大きな記憶容量を必要とする。I.B.M. 7094では、部材長を変数として3つの荷重条件をとった場合、外部記憶装置を使用しない時、せいぜい、3スパン1層、1スパン2層程度のラーメンしか設計できなかった。9サイクル法で大体1分の計算時間である。従って、電子計算機が、発達し、記憶容量が更に大きくなり、又更に高速な演算が可能になれば、大きな構造物でも設計可能になる。

この論文の例では、殆んど non-convex の問題はなく、比較的なお収斂をしているが、もし、non-convex な問題に遭遇した場合、この方法では、必ず正解を得るという保証はない。非常に異った部材の組合せを仮定して、同じ最適設計に収斂するか確かめる以外には、今のところ、対策はない。もし、異った点に収斂した場合、複数の Local optimum point が存在する訳で、その内の最も適当な解を選ぶ他はない。

ここでは、Wide Flange Sectionが連続的に存在すると仮定しているが、実際は不連続な点の集りであるため、厳密には、Integer Programmingによらねばならない。この面での発展があれば、直接に、実際の断面を用いて、最適設計が行えるようになるだろう。

又、Time-sharing systemにより、一層この方法は、効果が増大するであろう。計算の途中で収斂性を検討しながら Move Limit の調節、仮定設計断面の変更等が行え非常に良い設計が期待できる。

記 号 索 引

A : 部材断面積

α_{ij} : 感度係数

$\bar{k}$: 部材剛性マトリックス

k_j : 各点の部材剛性マトリックス

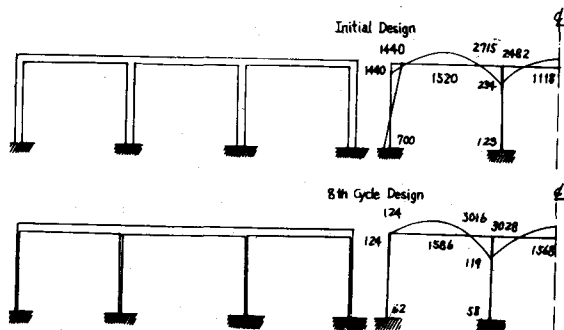


Fig. 5.10 Initial and Final Designs of Example 7

Cycle	Moment of Inertia				Spans		Weight of Structure
	I_{B1}	I_{B2}	I_{C1}	I_{C2}	L_1	L_2	
Initial	1600	1600	1600	1600	240	240	9.473
1	1120	1120	1120	1120	240	240	7.926
2	784	784	784	784	240	240	6.631
3	549	549	549	549	240	240	5.548
4	384	384	384	496	204	312	4.800
5	* 269	269	297	* 644	157	406	4.465
6	294	188	208	801	204	311	4.395
7	244	* 132	146	993	251	218	4.283
8	224	171	102	1117	239	241	4.274
9	157	217	71	1252	230	259	4.194
8 (Stress)	0.965	1.010	0.895	1.005	—	—	—

Table 5.4 Design Process of Example 8

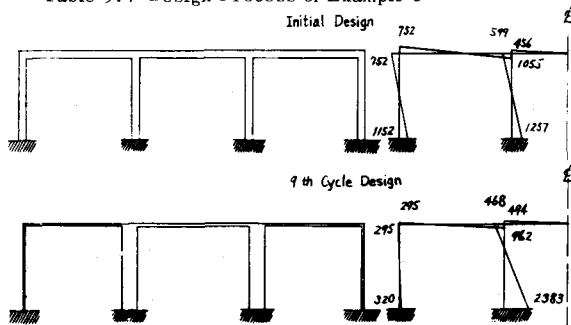


Fig. 5.11 Initial and Final Designs of Example 8

C_{AB} : Transfer Matrix
 D : 部材変位マトリックス
 E : ヤング率
 F_a : 許容圧縮応力度
 F : 部材応力マトリックス
 f_a : 存在圧縮応力度
 F_b : 許容曲げ応力度
 f_b : 存在曲げ応力度
 F_t : 許容引張応力度
 F_y : 材料降伏点
 I : 断面二次モーメント
 K : 座屈長係数

K : 全構造系の剛性マトリックス
 l : 部材長
 P : 外力マトリックス
 S : 部材せん断力
 S_x : 断面係数
 T : 回転マトリックス
 U : 節点変位マトリックス
 X : 設計変数
 Y : 状態変数, Iteration equation の値
 Z : 目的関数
 α : 部材の角度
 δ : 部材端の変位

参 考 文 献

- 1) American Institute of Steel Construction, "Manual of Steel Construction", 1963
- 2) McMin, S.J., "Matrices for Structural Analysis," John Wiley & Son's Inc. New York, 1962
- 3) Cornell, C.A., Reinschmidt, K.F., and Brothie, J.F., "Structural Optimization," Tech. Rept. R 65-26 Part 2, Dept. of Civil Engineering, M.I.T. Cambridge, Mass. September 1965
- 4) Estrada-Villegas, J. E., "Optimum Design of Planar Trusses Using Linear Programming," S.M. Thesis, Tech. Rept. T65-40, Dept. of Civil Engineering, M.I.T., September 1965
- 5) Nakamura, Y., "Optimum Design of Framed Structures Using Linear Programming," S.M. Thesis, Tech. Rept. T66-4, Dept. of Civil Engineering, M.I.T., January 1966