

架設途上にある構造物の応力解析法

法政大学工学部 大地 羊三

1. ま え が き

変形法による静定および不静定構造物の解法は、方形行列の処理等の一部の問題を除くと、ほぼ完成したように思われる。しかし不安定な構造物については、まだ研究しなければならない問題が残されている。我々には完成された構造物の応力解析だけを行って満足すべきではない。建設途上にあり、毎日形を変えている構造物の応力計算を行ない、いかなる時侯においても安全である事を確かめておく必要がある。構造物はその架設の途中で一時的に不安定な形になる事がしばしばある。

不安定構造物は、任意の方向から作用する力には抵抗出来ない。しかし特定な方向の力に対しては、外力と内力が釣合い、しばしば大きな変形をともなって、平衡状態になる。この場合は、変形が力の釣合いに主役を演じており、これを無視する事は出来ない。すなわち、変形後の部材方向を基準にして力の釣合いを考える必要がある。このようにすると剛性マトリックスの各要素に、変形に関係する項が含まれ、連立一次方程式は非線形になる。これを解くには、逐次代入法によらなければならないが、初期値をどう取るかという問題である。変形=0を初期値にすると、微小変形を仮定した不安定構造物を解く事になり、問題である。本文はこの種の構造物を解く手段について説明したものである。

2. 変形法による構造解析の概要

次節で必要になるので、ここで変形法の解法を誘導しておく。骨組構造物から切り出した部材の両端（左側をa端、右側をb端とする）に作用する断面力（ H_{ua} , H_{ub} ）と、枝端の変形（ U_a , U_b ）の間には次の関係がある。

$$H_{ua} = k_{aa} U_a + k_{ab} U_b \quad H_{ub} = k_{ba} U_a + k_{bb} U_b \quad (1)$$

ただし k_{aa} , k_{ab} , k_{ba} , k_{bb} は部材の剛性マトリックスである。

上式は断面力と変形を部材に固定した座標軸方向に分解したときの結果である。これらを空間に固定した座標軸方向に分解した断面力（ H_{xa} , H_{xb} ）と、枝端の変形（ X_a , X_b ）で表わすためには、

$$H_{xa} = C H_{ua} \quad H_{xb} = C H_{ub} \quad X_a = C U_a \quad X_b = C U_b \quad (2)$$

なる関係がある事を利用する。ただし C は部材に固定した座標軸から、空間に固定した座標軸方向への座標変換の行列である。

座標変換行列の性質（ $C \cdot C^T = E$ ）を利用し、式（2）を用いて式（1）を変形して、行列の形で表わすと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{xb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式は部材の剛性マトリックスが、テンソルとしての性質を持っている事を示している。

さて、骨組構造物に含まれるすべての部材について式(3)を作り、節点毎にそれに接続する部材の枝端断面力を集めて釣合方程式を作るわけであるが、各節点にa端が接続する部材を集める行列を α^* 、b端が接続する部材を集める行列を β^* とすると、釣合条件式は次のように書ける。

$$\alpha^* F_{xa}^* + \beta^* F_{xb}^* = P_p \quad (4)$$

ただし、 P_p は各節点に作用する外力を集めた列ベクトルであり、 F_{xa}^* 、 F_{xb}^* は各部材のa、b端の断面力を集めた列ベクトルである。節点に作用する外力および枝端断面力の集め方には、次の2通りが考えられる。

その一つは、一つの節点(または部材)に作用する外力(または断面力)の空間座標方向の成分をひとまとめにして、これを節点番号(または部材番号)順に並べる方法であり、二つは、各節点(部材)に作用する外力(断面力)のx成分だけを取り出して節点番号(部材番号)順に並べ、次にy方向の成分だけを取り出して並べるという具合にする方法である。電子計算機で計算する場合は、一つの方法が便利であるが、行列の内容がどのような形をしているかを示すには、二つの方法が便利である。本文のAPENDIXでは、二つの方法で行列の具体的な内容が示されている。この二つの方法のどちらを使うかによって、行列 α^* 、 β^* の内容が変わるが、一方から他方への変換は容易である。

式(3)の F_{xa} 、 F_{xb} を式(4)に代入し、部材端の変形(x_a 、 x_b)と、それが接続する節点の変形(x_p)との間には

$$x_a^* = \alpha^{*T} x_p \quad x_b^* = \beta^{*T} x_p$$

の関係がある事、および k_{aa} 、 k_{ab} 、---等は

$$k_{ab} = L_a k L_a^T, \quad k_{ab} = L_a k L_b^T, \quad k_{ba} = L_b k L_a^T, \quad k_{bb} = L_b k L_b^T$$

と分解される事を考慮すると、釣合条件式は、次の形に変形される。

$$(\alpha^* C^* L_a^* + \beta^* C^* L_b^*) k^* (\alpha^* C^* L_a^* + \beta^* C^* L_b^*)^T x_p = P_p \quad (5)$$

*のついた行列は、各部材に関係する C 、 L 、 k 等を上に述べた二つの方法のいずれかを使ってまとめた行列である事を示す。次節以下では、式(5)を簡単に

$$D k^* D^T x_p = P_p \quad \text{または} \quad K x_p = P_p$$

と書く事にする。

3. 変形が大きくなった場合の解式

骨組構造物の解式の誘導にあたっては、一般に変形が微小であるという仮定が用いられている。したがって断面力は、変形前の部材断面に作用するものと考えて、釣合方程式が立てられている。変形が大きくなると、このように考える事は無理である。すなわち、断面力は変形後の部材断面に作用すると考えなければならなくなる。変形後の部材軸の方向余法は、変形量の関数であるから、式(5)の係数行列(剛性マトリックス)の要素も、変形量の関数になる。したがって、式(5)は

$$[K(x_p)] x_p = P_p \quad (6)$$

と書き変えなければならない。上式は非線形の連立方程式であるから、これを解くためには逐次代入法を用いなければならない。すなわち、まず x_p を仮定して $[]$ 内を計算してから上式を x_p について解く。得られた結果が、仮定した x_p と差がある場合は、これを新しい仮定値としてもとにもどり、仮定値と解がほぼ一致するまで繰返す方法を用いなければならない。しかし、この方法を直接用いて計算すると、収束が非常に悪く、解が得られるまでに永い計算時間が必要である。そこで、式(6)を次のように書き変えて計算を進める事にした。

x_p が現時点より dx_p 大きくなったときに、解が得られるものとする、式(6)は次のように書ける。

$$[K(x_p + dx_p)](x_p + dx_p) - P_p = 0 \quad (7)$$

$[]$ 内を dx_p で展開し、 dx_p の二乗以上の微小項を省略すると

$$[K(x_p) + K'(x_p, dx_p)] x_p + [K(x_p)] dx_p - P_p = 0 \quad (8)$$

が得られ、さらに

$$[K'(x_p, dx_p)] x_p \equiv [K'(x_p)] dx_p \quad (9)$$

とおく事が出来れば、式(8)の解は

$$dx = [K(x_p) + K'(x_p)]^{-1} [P - K(x_p)x_p] \quad (10)$$

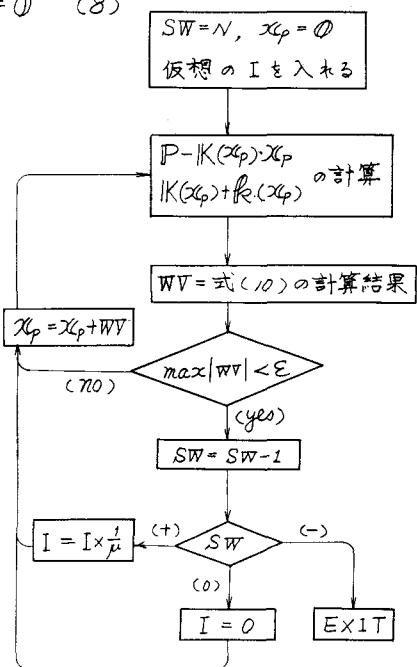
となる。 $K'(x_p)$ の具体的な形については APENDEX II を参照されたい。式(10)は、方程式 $f(x) = 0$ の根を求めるニュートンの近似公式

$$dx = -[f'(x)]^{-1} f(x)$$

に相当するものである。

図1に式(10)による計算の流れ図が示されている。仮設途中の構造物は、ある段階で不安定な構造になる事がある事は、前1節で述べた。この場合には式(10)の

図 - 1



進行列が求められない事がある。この困難をさけるため、ケーブルヤトラス部材等のように曲げに抵抗しない部材にも断面二次モーメントを仮定し、系全体をラーメン構造にして計算を初めるようにしてある。この仮定の I は、繰返し計算が一回収束する毎に $1/\mu$ 倍され、N 回目には 0 にするように考えた。なお架設の順序にしたがって、次々に計算を進めるには、図 1 の流れ図の外側に図 2 に示すようなループをつけくわえればよい。

4. 簡単な計算例

図・3, 4 に、本文の考え方にしたがって作成したプログラムを用いて解いた構造物の例が示されている。図・3 は斜吊橋である。同じ構造物を、微小変形を仮定した普通の変形法で解いた結果と比較すると表 1 のようになる。また図・4 は吊橋でケーブルだけが架設された状態を示している。これを力の釣合だけに着目して繰返し計算をしたものと、各支間の最大たわみを比較すると表 2 のようになる。

図 - 2

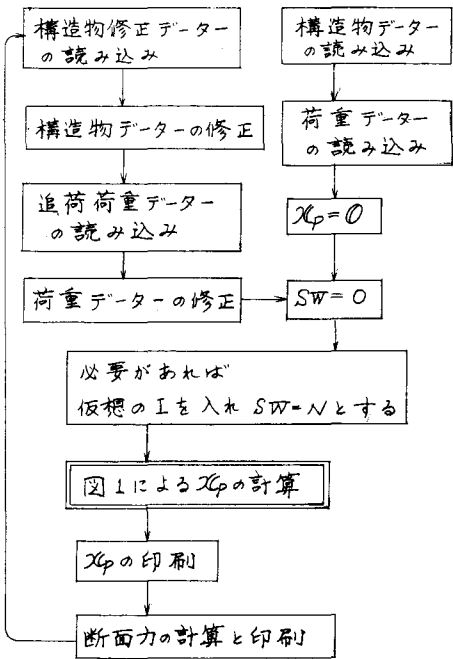


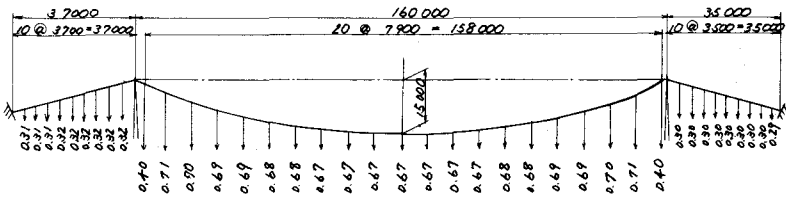
表 - 1

	節点又は部材	本法	変形法
たわみ (cm)	2	18.8	18.0
	3	12.4	12.0
曲げモーメント (t.m)	2	725.5	697.3
	3	172.2	164.7
軸力 (t)	①	0.2	0
	②	93.2	87.6
	③	395.9	389.3
	④	-98.2	-92.0

表 - 2

支間	本法	別法
1	0.007 m	0.004 m
2	0.048 m	0.044 m
3	0.004 m	0.002 m

図 - 4



APENDIX I

剛性マトリックスの具体的な形

平面構造物の場合、オ2節で説明したオニの方法で並べると、式(5)に含まれる各行列の具体的な形は次のようになる。

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \beta^* = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad L_a^* = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}E \end{bmatrix} \quad L_t^* = \begin{bmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E & -\frac{1}{2}E \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} XL^{-1} & -YL^{-1} & 0 \\ YL^{-1} & XL^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad R^* = E \begin{bmatrix} AL^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 12I_w L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4I_w L^{-1} \end{bmatrix} \quad \chi_p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad P_p = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

$$\text{したがって } (\alpha^* C^* L_a^* + \beta^* C^* L_t^*) = \begin{bmatrix} (\alpha-\beta)XL^{-1} & -(\alpha-\beta)YL^{-1} & 0 \\ (\alpha-\beta)YL^{-1} & (\alpha-\beta)XL^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta) & \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

ただし、 α, β は各部材の a, b 端がどの節点に接続しているかを示す行列であり、 j 部材の a, b 端が i 節点に接続しているとき、 α, β の (i, j) 要素が1となっている行列である。

また、 E は単位行列、 L, X, Y, A, I_w は、それぞれ各部材の長さ、長さの x, y 軸方向の成分、断面積、断面二次モーメントを対角線上に並べた対角行列であり、 $x, y, \theta_z, P_x, P_y, m_z$ は、それぞれ各節点の x, y 軸方向の変位、 z 軸まわりの回軸角、 x, y 軸方向に作用する外力および z 軸まわりのモーメント荷重を節点番号順にたてに並べた列ベクトルである。

立体構造物の場合は、次のようになる。

$$(\alpha^* C^* L_a^* + \beta^* C^* L_t^*) = \begin{bmatrix} (\alpha-\beta)C_{xu} & (\alpha-\beta)C_{xv} & 0 & 0 & -(\alpha-\beta)C_{xu} & 0 \\ (\alpha-\beta)C_{yu} & (\alpha-\beta)C_{yv} & 0 & 0 & -(\alpha-\beta)C_{yu} & 0 \\ (\alpha-\beta)C_{zu} & (\alpha-\beta)C_{zv} & 0 & 0 & -(\alpha-\beta)C_{zu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)C_{xw} & (\alpha-\beta)C_{xv} & (\alpha-\beta)C_{xu} & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)C_{xu} & (\alpha-\beta)C_{xw} \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)C_{yw} & (\alpha-\beta)C_{yv} & (\alpha-\beta)C_{yu} & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)C_{yv} & (\alpha-\beta)C_{yw} \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)C_{zw} & (\alpha-\beta)C_{zv} & (\alpha-\beta)C_{zu} & \frac{1}{2}(\alpha+\beta)C_{zv} & (\alpha-\beta)C_{zw} \end{bmatrix}$$

$R^* = EAL^{-1}, 12EI_w L^{-1}, EI_w L^{-1}, GJL^{-1}, 12EI_w L^{-1}, EI_w L^{-1}$ を対角線上に並べた対角行列

$\chi_p = x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ をたてに並べた列ベクトル

$P_p = P_x, P_y, P_z, m_x, m_y, m_z$ をたてに並べた列ベクトル

$$\begin{bmatrix} C_{xu} & C_{xv} & C_{xw} \\ C_{yu} & C_{yv} & C_{yw} \\ C_{zu} & C_{zv} & C_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XL^{-1} & -YL^{-1} & -XL^{-1}ZL'^{-1} \\ YL^{-1} & XL^{-1} & -YL^{-1}ZL'^{-1} \\ ZL^{-1} & 0 & L'L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ただし $\cos \theta = LL'^{-1} \cos \varphi$ であり, $\cos \varphi$ は各部材の断面主軸の一つ (部材座標の w 軸) に一致させる) と空間座標の z 軸とがなす角の $\cos$ ine を対角線上に並べた対角行列である。また $L'^2 = X^2 + Y^2$, $L^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ とおいた。

APENDIX II

$k'_r(x_p, dx_p)$, $k_r(x_p)$ の具体的な形

平面構造物の場合：構造物が x_p だけ変形したときの各部材の長さおよびその x , y 軸方向の成分を l , X , Y とすると, さらに dx_p 変形したときの値は, それぞれ

$$\sqrt{(X+dx_x-dx_a)^2 + (Y+dy_y-dy_a)^2} \quad X+dx_x-dx_a \quad Y+dy_y-dy_a$$

となる。したがって, 変形 dx_p による方角余弦 X/l , Y/l 其他の増分は, 次のようになる。

$$d\left(\frac{X}{l}\right) = \frac{dx_x-dx_a}{l} - \frac{X}{l} \Delta = \frac{Y}{l} \nabla \quad d\left(\frac{Y}{l}\right) = \frac{dy_y-dy_a}{l} - \frac{Y}{l} \Delta = -\frac{X}{l} \nabla$$

$$d\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{\Delta}{l} \quad d\left(\frac{X}{l} \frac{1}{l}\right) = \frac{Y}{l} \nabla \frac{1}{l} - \frac{X}{l} \frac{\Delta}{l} \quad d\left(\frac{Y}{l} \frac{1}{l}\right) = -\frac{X}{l} \nabla \frac{1}{l} - \frac{Y}{l} \frac{\Delta}{l}$$

$$\text{ただし } \Delta \equiv \frac{X(dx_x-dx_a) + Y(dy_y-dy_a)}{l^2} \quad \nabla \equiv \frac{Y(dx_x-dx_a) - X(dy_y-dy_a)}{l^2} \quad \text{とおいた。}$$

これらの関係を用いると, 式(8)の $[k'_r(x_p, dx_p)] x_p$ は, 次のように書ける。

$$\begin{aligned} [k'_r(x_p, dx_p)] x_p &= \begin{bmatrix} \delta(dx_x-dx_a-X\Delta) & \delta(X\nabla+Y\Delta) & 0 \\ \delta(dy_y-dy_a-Y\Delta) & \delta(Y\nabla-X\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EAL^{-3}(X\delta^T X + Y\delta^T Y) \\ 12EI_w L^{-5}(-Y\delta^T X + X\delta^T Y + \frac{1}{2}L^2\mu^T \theta_z) \\ 4EI_w L^{-1} \delta^T \theta_z \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \delta X - \delta Y & 0 \\ \delta Y & \delta X & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu & \frac{1}{2}\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EAL^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_w L^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 4EI_w L^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (dx_x-dx_a-X\Delta)\delta^T & (dy_y-dy_a-Y\Delta)\delta^T & 0 \\ (X\nabla+Y\Delta)\delta^T & (Y\nabla-X\Delta)\delta^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし, 簡単のために $\delta \equiv \alpha - \beta$ $\mu \equiv \alpha + \beta$ とおいた。

上式の行列の間の掛け算を実行し, dx , dy についてまとめなおすと

$$\begin{aligned}
[f_2(x_p)] dx_p = & \left\{ \begin{bmatrix} \delta N Y^2 \delta^T & -\delta N X Y \delta^T & 0 \\ -\delta N X Y \delta^T & \delta N X^2 \delta^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta^2 S X Y \delta^T & \delta S(Y^2 - X^2) \delta^T & 0 \\ \delta S(Y^2 - X^2) \delta^T & -\delta^2 S X Y \delta^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \\
& + \left\{ \begin{bmatrix} \delta N' X Y \delta^T & -\delta N' X^2 \delta^T & 0 \\ \delta N' Y^2 \delta^T & -\delta N' X Y \delta^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta S' Y \delta^T & -\delta S'' Y \delta^T & 0 \\ \delta S' X \delta^T & \delta S'' X \delta^T & 0 \\ \frac{1}{2} \mu S' \ell \delta^T & \frac{1}{2} \mu S'' \ell & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \quad (a)
\end{aligned}$$

と書き変えられる。ただし、式を簡単にするために

$$\begin{aligned}
N &= E A \ell^{-5} \{ X(x_b - x_a) + Y(y_b - y_a) \} & S &= -12 E I_w \ell^{-7} \{ Y(x_b - x_a) - X(y_b - y_a) + \frac{1}{2} \ell (\theta_a + \theta_b) \} \\
N' &= E A \ell^{-5} \{ Y(x_b - x_a) - X(y_b - y_a) \} & S' &= 12 E I_w \ell^{-7} \{ 2 X Y (x_b - x_a) + (Y^2 - X^2)(y_b - y_a) \} \\
S'' &= 12 E I_w \ell^{-7} \{ (Y^2 - X^2)(x_b - x_a) - 2 X Y (y_b - y_a) \}
\end{aligned}$$

と書いた。式(a)の右辺の第一項に含まれる行列は、対称行列なので問題ないが、第二項に含まれる行列は、非対称になっている。数値計算をする場合非対称行列は、対称行列に比べて約倍のメモリを必要とするので、出来れば使用しないようにする事が望ましい。さいわい、式(10)は近似式なので、今回作成したプログラムでは、非対称な項をおとしてある。このために繰返し回数が多少増加するかも知れないが、これはいたし方ない。

立体トラスの場合：

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{X}{\ell}\right) &= \frac{dx_b - dx_a}{\ell} - \frac{X}{\ell} \Delta & d\left(\frac{Y}{\ell}\right) &= \frac{dy_b - dy_a}{\ell} - \frac{Y}{\ell} \Delta & d\left(\frac{Z}{\ell}\right) &= \frac{dz_b - dz_a}{\ell} - \frac{Z}{\ell} \Delta \\
\Delta &= \frac{X(dx_b - dx_a) + Y(dy_b - dy_a) + Z(dz_b - dz_a)}{\ell^2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
[f_2'(x_p, dx_p)] x_p = & \begin{bmatrix} \delta(dx_b - dx_a - X\Delta) \\ \delta(dy_b - dy_a - Y\Delta) \\ \delta(dz_b - dz_a - Z\Delta) \end{bmatrix} E A \ell^{-3} \begin{bmatrix} X \delta^T & Y \delta^T & Z \delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} E A \ell^{-3} \begin{bmatrix} (dx_b - dx_a - X\Delta) \delta^T & (dy_b - dy_a - Y\Delta) \delta^T & (dz_b - dz_a - Z\Delta) \delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。上式の行列の間で掛け算を実行し、 dx , dy , dz についてまとめなおすと、

$$\begin{aligned}
[f_k(x_p)] dx_p &= \begin{bmatrix} \delta N(Y^2+Z^2)\delta^T & -\delta NXY\delta^T & -\delta NXZ\delta^T \\ -\delta NYX\delta^T & \delta N(Z^2+X^2)\delta^T & -\delta NYZ\delta^T \\ -\delta NZX\delta^T & -\delta NZY\delta^T & \delta N(X^2+Y^2)\delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} E A L^{-5} \begin{bmatrix} L_x^2 - X(X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}), & L_y^2 - Y(X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}), & L_z^2 - Z(X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と書き換えられる。たゞし

$$N = E A L^{-5} (X(x_t - x_a) + Y(y_t - y_a) + Z(z_t - z_a))$$

$$\hat{x} = x_t - x_a \quad \hat{y} = y_t - y_a \quad \hat{z} = z_t - z_a$$

とおいた。