

吊橋架設時の変形および応力解析

継 設 省 の 沢 井 広 之
 , 田 中 淳 之
 大日本コンサルタント 小神野 竹 男

1 まえがき

吊橋の構造解析理論はすでに1700年後半頃から論じられており今日では機度理論に基く精密計算が実用化されている。しかし、架設段階における吊橋のケーブル、補剛トラスに生ずる変形や応力に関する研究は少ない。特に架設時の耐風剛性を増すために補剛トラスを順次に閉合しながら架設する場合には問題はさらに複雑でこれに関する研究はほとんど見当たらない。このような吊橋架設時の変形応力の解析は吊材を巨視的に一枚の膜とみなし、又、ケーブル形状が常に放物線であると仮定する機度理論では不可能である。このためハンガーを各々一材と見なした一種の変形理論を用いて架設段階での変形や応力を計算し、架設が進むにつれてこれらがどのように変動するかを追跡して架設中の補剛トラスに過大な応力を生じさせないように架設方法、順序を見出すと共に、完成時に所定の形状を得るためには架設各地点でどのような形状であるべきかを2, 3の橋について検討した。

2 理論解析

1 ケーブル形状の計算

吊橋の基本となるケーブルの形状を知る事は吊橋だけでなくケーブル、エレクションにも応用される。ケーブルを扱う場合大きくわけて次の2点が問題になる。

- 1) 無応力時のケーブル形状を与え載荷される荷重によるケーブルの変形と応力を求める問題。
- 2) ケーブルにある荷重を載荷した時ケーブルがあらかじめ与えられている位置におさまるようなもとのケーブルの形状を求める問題

ほとんどの場合1), 2)は同時に使うケースが多い、原理的にはケーブルを引張で解くか、圧縮で解くかの違いだけで、あとのあつかいは全く同じである。

ここでは引張について説明する。

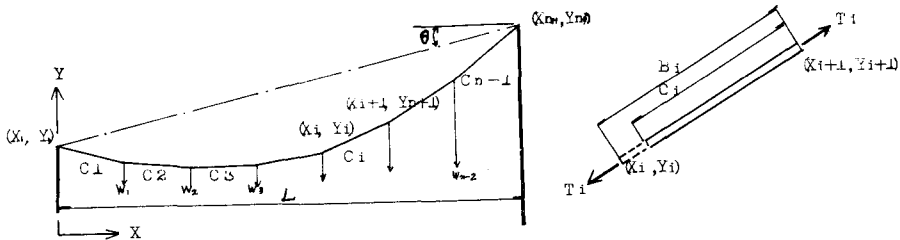


図 - 1

図2-1に示すようにケーブルは多角形に折り曲げられた線形から出来ているものとする。ケーブ

ル支間 (L) を単純梁の支間と仮定した時の荷重による曲げモーメントを M で表わし、その時の最大曲げモーメントを M_{max} とすると等分布荷重の場合は $M_{max} = \frac{W L^2}{8}$ である。

$$\text{一方ケーブルの水平張力は } H = \frac{W \cdot L^2}{8 \cdot F_{max}} \text{ であるからこの二式より } H = \frac{M_{max}}{F_{max}} \quad (1-1)$$

が成り立ち、ケーブルの任意節点 X_i の基準線からの傾斜 Y_i はケーブルの左右支点を結ぶ直線の傾きを θ とすると $Y = \tan \theta \cdot X_i - M_i/H$ (1-2)

で表わされる。

$$\text{この時のケーブルの長さ } B_{i+1} \text{ は } B_{i+1} = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2} \quad (1-3)$$

$$\text{でケーブル張力 } T_{i+1} \text{ は次のようになる。 } T_{i+1} = H \cdot B_{i+1} / (X_{i+1} - X_i) \quad (1-4)$$

もし、初期値として与えたケーブル位置が正しければ、 B_{i+1} から張力によるケーブルの伸びを引くと無応力時のケーブルの長さ C_{i+1} になるはずである。しかし、上の計算は近似計算であるからこのようにはならない。すなわち、 $C_{i+1} = C'_{i+1}$ である。

$$\text{ただし、 } C'_{i+1} = B_{i+1} - T_{i+1} \cdot C_{i+1} / E_c \cdot A_c - \alpha \cdot t \cdot C_{i+1} \quad (1-5)$$

この差はサグの修正によつて取りのぞく事にする。

修正量 ΔF は

$$\Delta F = \frac{F_c \cdot \left(\frac{\sum C'_i}{L_c} - \frac{\sum C_i}{L_c} \right)}{\sqrt{L^2 + 16 \cdot F^2 + A^2} - L_c} \quad (1-6)$$

$$\text{但し、 } L_c = \int_0^L \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^L \sqrt{1 + \{4 \cdot F / L^2 \cdot (L - 2 \cdot x) + A / L\}^2} dx$$

$$\text{もし、 } \Delta F > \varepsilon F \text{ (} \varepsilon \text{ は精度) となる場合には } F_{\text{新}} = F_{\text{旧}} - \Delta F \quad (1-7)$$

の修正を行ない $\Delta F < \varepsilon F$ になるまで (1-1) ~ (1-7) 式の計算をくり返す。

以上は垂直方向の修正であるが水平方向の修正も行なわなければならない。このためには各区間の水平張力を補正する。

$$\text{ケーブルの張力 } T_{i+1} \text{ は } T_{i+1} = E_c \cdot A_c / B_{i+1} \cdot (B_{i+1} - C_{i+1}) \quad (1-8)$$

$$\text{であり、水平張力 } H_{i+1} \text{ は } H_{i+1} = T_{i+1} \cdot (X_{i+1} - X_i) / C_{i+1} \quad (1-9) \text{ である。}$$

全径間を通じて水平張力 H は同じでなければならぬが上で求めた変形が正しくないため、各区間で、 $\Delta H_{i+1} = H_{i+1} - H_{mean}$ (1-9)' の誤差を生じている (ただし H_{mean} は (1-9) 式で求めた H_{i+1} の平均値である。) これはハンガー間隔を変える事によつて修正する。

$$\text{新しいハンガー間隔 } X'_{i+1} (= X_{i+1} - X_i) \text{ は、 } X'_{i+1} = X_{i+1} - \Delta H_{i+1} \cdot X'_{i+1} / E_c \cdot A_c \quad (1-10)$$

で求める。吊橋の全長は変らないから新しい X_i による長さの合計 $L' = \sum_{i=1}^n X_i$ と L とは一致しなければならないが、計算誤差、その他のため $L' \neq L$ となるおそれがあるのでこれも次式で補正する。

$$X'_i = X'_i - (L' - L) \cdot X'_i / L \quad (1-11)$$

新しい X_i に対して M_i を求め、 $\Delta H_i < \varepsilon H$ になる迄 (1-1) ~ (1-11) 式をくり返す。なお多径間の場合には ΔH_i による X_i の修正は全径間を通じて行ない ΔH_i の修正は径間ごとに行なえばよい。

2 剛性マトリックスの計算

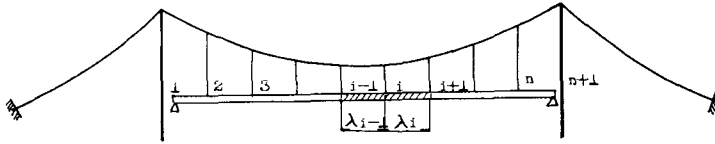


図 2-2

図 2-2 に示すように補剛トラスを n 分割し、節点間の各々の長さを λ_i 、断面二次モーメントを I_{xi} で表わす事にする。ケーブルと同様に外力は各節点に集中荷重として作用するものとし、 i 節点の前後を切り出して力の釣合を考えると図 2-3 のようになる。

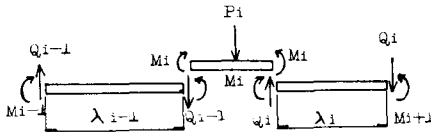


図 2-3

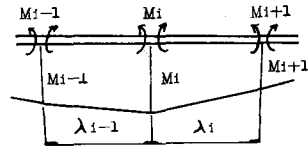


図 2-4

図 2-3 の関係を表で表わすと、 i 点における力の釣合より

$$Q_i - Q_{i-1} = -P_i \quad \text{-----} \quad (2-1)$$

モーメントの釣合

$$M_i - M_{i-1} = Q_{i-1} \cdot \lambda_{i-1} \quad \text{-----} \quad (2-2)$$

$$M_{i+1} - M_i = Q_i \cdot \lambda_i \quad \text{-----} \quad (2-3)$$

(2-1)、(2)、(3) 式より Q_i 、 Q_{i-1} を消去すると次のような釣合条件が得られる。

$$\frac{1}{\lambda_{i-1}} M_{i-1} - \left(\frac{1}{\lambda_{i-1}} + \frac{1}{\lambda_i} \right) M_i + \frac{1}{\lambda_i} M_{i+1} = -P_i \quad \text{-----} \quad (2-4)$$

(2-4) 式は荷重とモーメントとの関係式である。

次に、たわみとモーメントとの関係式を得るため三連モーメントの定理を適用すると次式が得られる。

$$\frac{1}{\lambda_{i-1}} y_{i-1} - \left(\frac{1}{\lambda_{i-1}} + \frac{1}{\lambda_i} \right) y_i + \frac{1}{\lambda_i} y_{i+1} = - \{ K_{i-1} \cdot M_{i-1} + 2 \cdot (K_{i-1} + K_i) \cdot M_i + K_i \cdot M_{i+1} \} \quad \text{----} \quad (2-5)$$

ただし、 $K_i = \frac{\lambda_i^3}{6EI_{xi}}$ 、 y ; たわみ

(2-4) 式を (2-2) の各節点に適用すると、次式が得られる。✓

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0} M_0 - \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} \right) M_1 + \frac{1}{\lambda_1} M_2 &= -P_1 \\ \frac{1}{\lambda_1} M_1 - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) M_2 + \frac{1}{\lambda_2} M_3 &= -P_2 \\ \frac{1}{\lambda_2} M_2 - \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) M_3 + \frac{1}{\lambda_3} M_4 &= -P_3 \\ &\vdots \\ \frac{1}{\lambda_n} M_n - \left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) M_{n+1} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} M_{n+2} &= -P_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad \text{-----} \quad (2-6)$$

これをマトリックスの形で書くと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1} & & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & -(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & -(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}) & \frac{1}{\lambda_3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} & -\frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_n \\ M_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ P_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

同様にして (2-5) 式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0} y_0 - (\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}) y_1 + \frac{1}{\lambda_1} y_2 &= -\{K_0 \cdot M_0 + 2 \cdot (K_0 + K_1) \cdot M_1 + K_1 \cdot M_2\} \\ \frac{1}{\lambda_1} y_1 - (\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) y_2 + \frac{1}{\lambda_2} y_3 &= -\{K_1 \cdot M_1 + 2 \cdot (K_1 + K_2) \cdot M_2 + K_2 \cdot M_3\} \\ &\vdots \\ \frac{1}{\lambda_n} y_n - (\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}) y_{n+1} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} y_{n+2} &= -\{K_n \cdot M_n + 2 \cdot (K_n + K_{n+1}) \cdot M_{n+1} + K_{n+1} \cdot M_{n+2}\} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

が得られ、これを行列の形で書くと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1} & & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & -(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & -(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}) & \frac{1}{\lambda_3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{1}{\lambda_n} & -\frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2K_1 & K_1 & & & \\ K_1 & 2(K_1 + K_2) & K_2 & & \\ & K_2 & 2(K_2 + K_3) & K_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & K_n & 2K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_n \\ M_{n+1} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

(2-7), (2-9) 式を次のように書き表わす。

$$D \cdot M = -P \quad (2-10) \quad D \cdot Y = -K \cdot M \quad (2-11)$$

$$(2-11) \text{ 式を変形すると } M = -K^{-1} D^T Y \quad (2-12)$$

が得られ、これを (2-10) 式の左辺に代入すると、解式として、

$$P = D \cdot K^{-1} D^T \cdot Y \quad (2-13)$$

が得られる。\$D \cdot K^{-1} D^T\$ のことを剛性マトリックス (Stiffness matrix) とよんでいる。実際には補剛トラスの剛結の条件、支点、ヒンジの有無を考慮して剛性マトリックスの修正がなされている

3 荷重の分配

補剛トラスが剛性を有するとき補剛トラス上に載荷される荷重はその一部分が桁に、他はハンガーを伝わつてケーブルに作用することになる。全載荷荷重に対するケーブルに作用する荷重の割合をマトリックスの形式で書いたものを分配マトリックスと呼ぶ事にする。

補剛トラスのある区間に \$P_i\$ の荷重が載荷された場合、\$P_i\$ の一部 \$P_{si}\$ は補剛トラスに作用し補剛トラスが変形する。この変形量を \$\gamma_i\$ とする。残りの荷重 \$P_{ci} = P_i - P_{si}\$ はハンガーを伝わつてケーブルに作用する。その時ハンガーは \$\Delta h = h \cdot P_{ci} / E_c \cdot A_{ca}\$ (\$h\$; ハンガーの長さ、\$A_{ca}\$ ハンガーの断面積) だけ伸び、ケーブルは \$\gamma_i\$ だけたわむ。もし、荷重分配の割合が正しければ

$$\gamma_i = \Delta h + \gamma_2 \quad (3-1)$$

でなければならない、そうでない場合、たとえば

$$\eta_1 - \Delta h - \eta_2 > 0 \quad \text{-----} \quad (3-2)$$

の時は、実際よりも余分に P_{Si} 何重をかけたことになる。そこで P_{Si} と P_{Ci} の荷重の割合を修正して

$\eta_1 - \Delta h - \eta_2 \approx 0$ となるようにすればよい。 P_{Si} と P_{Ci} の割合は、補剛トラスの剛性によって異なるのみでなく中矢と端部でも異なっている。

流れ図

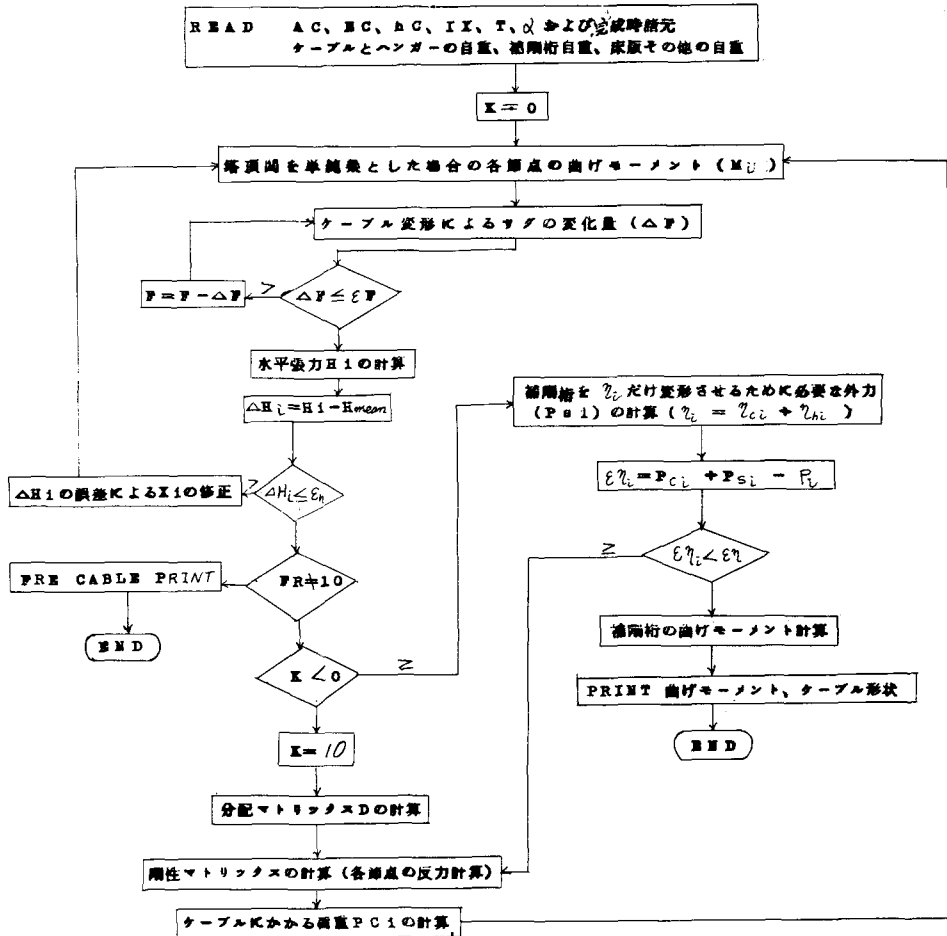
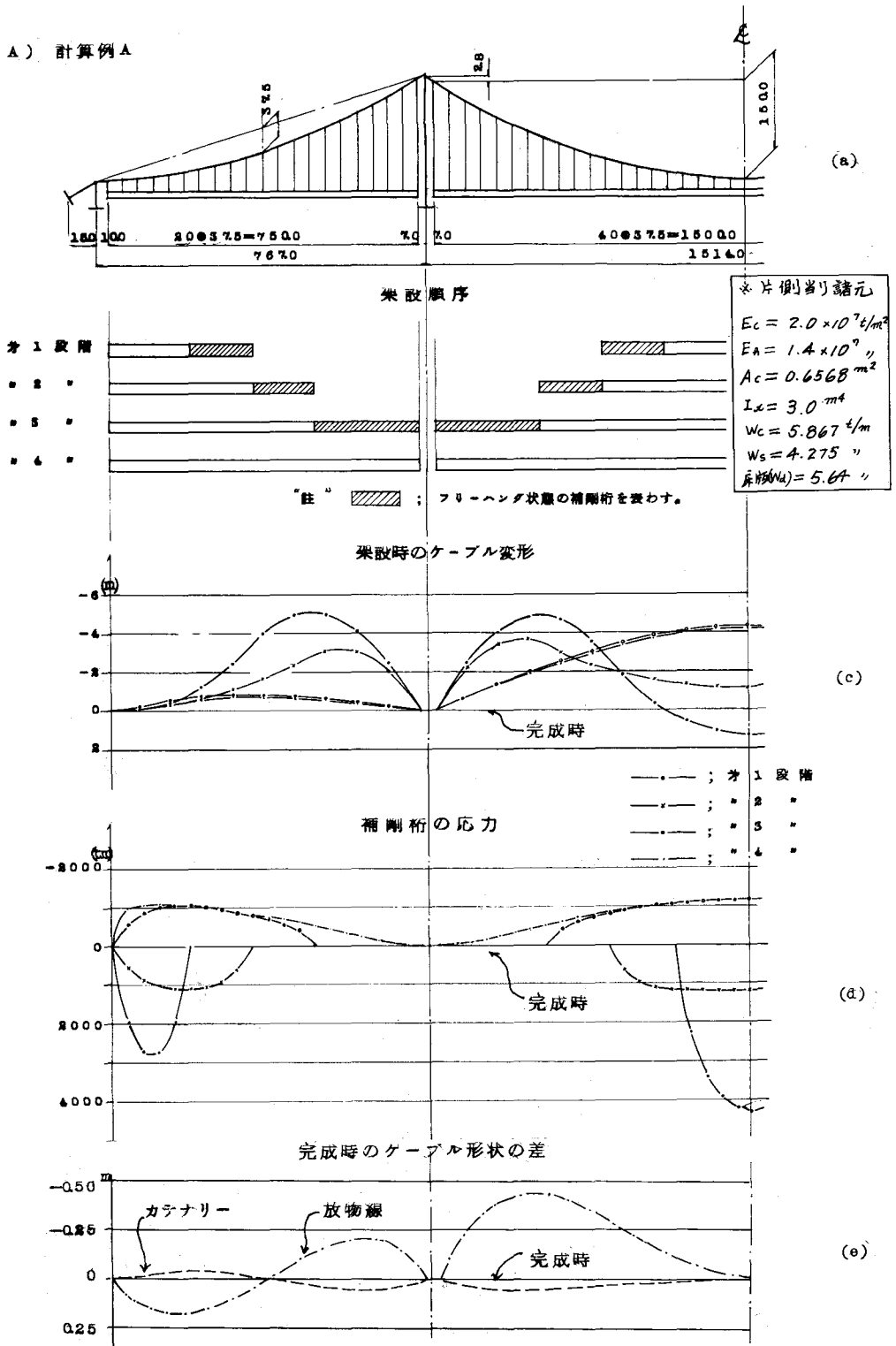


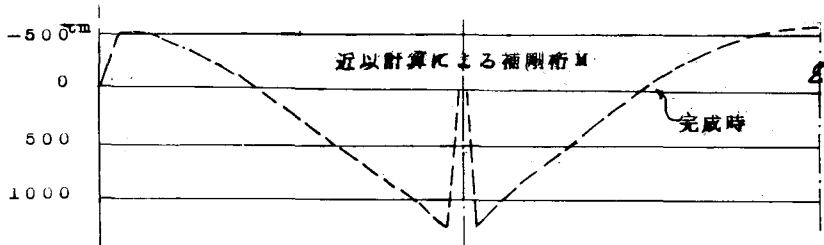
図 3-1

4 計算例

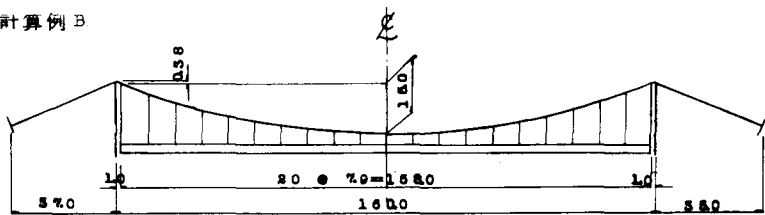
架設方法は地理的条件によつて種々考えられるが、今回は例 A、B についてまとめて見た。例 A は図 4-1 に見られるように側柱間の方はバックステー側から、中央柱間は支間中央から両側に向つて順次架設した場合について、例 B では両側から同時に 3 ブロックまで架設した後左側から片押しした場合について各段階でのケーブルの変形および曲げモーメントを求めて比較検討してみた。又例 A についてはさらに無応力長の影響についても 2、3 比較して見た。

A) 計算例A

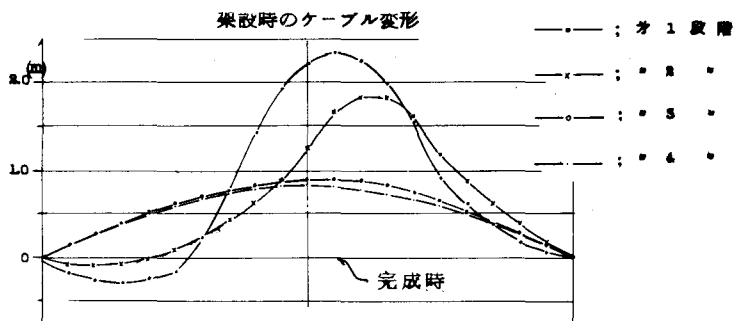
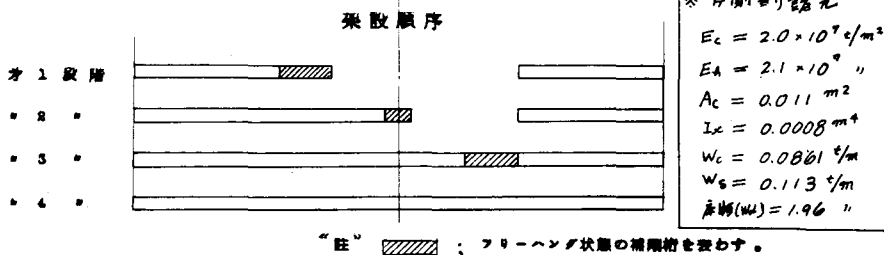




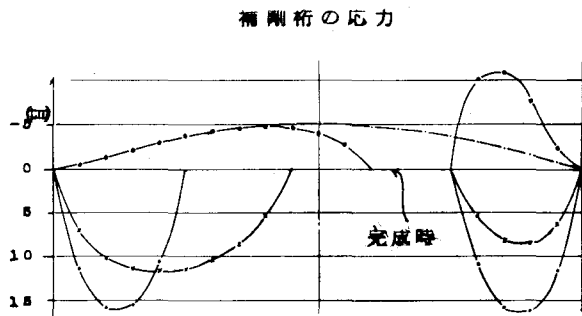
B) 計算例 B



(a)



(c)



(d)

1) 変形と曲げモーメント

図4-1-⑥に見られるように補剛桁の載荷位置と載荷巾によつてはケーブルが10m近くも変形する事がわかる。それに伴つて塔の移動、補剛桁の聯接の難易、架設応力等に及ぼす影響は大きい。本計算例では見られないが補剛桁の架設方法および載荷荷重と剛性巾によつては許容応力を上廻る応力が生じる事もありうるので架設に際しては側往向のようにケーブルの変形が少ない所から漸次架設するかあるいは中央往向のように一度にたわませておいて何設すべきかは十分検討し、架設段階での変形や応力について危険な状態にならないようにしなければならない。

2) 無応力長

架設完了時に所定の形状になり、かつ補剛桁を無応力状態にするために、見のかせないのは無応力長を如何に正確に求めるかである。一例として例Aの無応力長を決める際荷重を橋軸方向に等分布荷重と見なして求めた無応力形状に実荷重を載荷して求めた変形の差が図4-1-⑦である。図4-1-⑦は完成時を放物線と仮定して $T_1 = \frac{wL^2}{8F} \sec \theta_1$ による弾性伸びを各区間のケーブルから差し引いた値を無応力長とし、それに実荷重を載荷して求めた曲げモーメントの値である。これからもわかるようにこのような近以計算ではかなりの応力が生じる事がわかる。これと同様に完成時のハンガー間隔が所定の位置におさまるようにするためには無応力時にマーキングしておく必要があろう。今までの計算例での完成時のケーブル形状において中小往間におけるケーブル形状はケーブル自重に比べ床版補剛桁の目重が大きい關係上殆んど放物線と見なしてもいいが、図4-1-⑥に見られる如く長往間吊橋の場合は放物線でもカテナリーでもない形状をなしている。しかし、どちらかと言えばカテナリーに近い。

以上補剛桁架設時の変形および応力解析について検討したものである。最後に、終始御援助下さつた法正大学の大地羊三教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

D. M. Brotton and G. Arnold: "The Solution of Suspension Bridge Problems by Digital Computers — Part 1," The Structural Engineer, July 1963, No.7 vol 41

D. M. Brotton, N. W. Williamson and M. Miller; "The Solution of Suspension Bridge Problems by Digital Computers — Part 2," The Structural Engineer, April 1963, No.4 vol 41