

横河橋梁 長谷川 鑑一
横河橋梁 菅 七郎
横河橋梁 ○原田 康夫
横河橋梁 島居 邦夫

1. まえがき

活荷重を担う吊橋の挙動を解明するために、従来行なわれてきた、いわゆる膜理論にとつて代つて吊材間隔を正当に評価する試みが、1949年にA.G. Pugsley¹⁾によつて行なわれたのをはじめとして、1963年にはD.M. BrottonとG. Arnold²⁾が補剛桁の剛性マトリックスとケーブルへの荷重分配を示す分配マトリックスを用いた解法を発表して、フォース道路橋の補剛桁架設の計算に寄与している。しかしながら、現実にはBrotton-Arnoldの解法は収斂が悪く、分配マトリックスの仮定が適当でない場合には、振動あるいは発散して数値計算に大きな困難を伴うものであつた。そこで、T.J. Poskitt³⁾は、1966年に発表した論文で、吊材とケーブルおよび補剛桁の取付格点に注目し、その点での力の釣合条件を考えることによつて基本方程式をたて、Newton-Raphsonの方法を用いてこの方程式を解けば、急速に収斂して正解が得られることを立証した。我々は、T.J. Poskittの理論を基本とし、単純補剛桁を有する3径間対称吊橋に対称荷重が作用した場合について検討を加え、数値計算の収斂性を考慮しながら電子計算機のプログラムを完成した。この解析は、つぎのような仮定の上に成り立っている。

- (1) ケーブルは格点で折れた力の多角形をなしている。
- (2) 補剛桁は完成状態で無応力である。
- (3) 糸の変形にとりなり吊材の傾斜の影響は微小である。

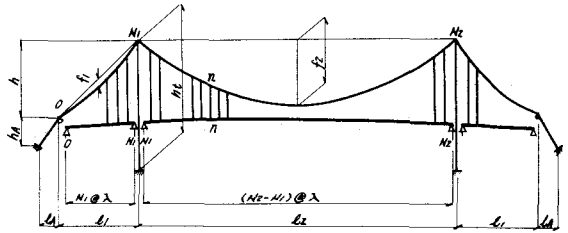


図1 対象とした系（完成時）

2. 理論解析

2.1 解析の概要

図2はケーブルおよび補剛桁の変形状態を示している。基本方程式を得るために、ケーブルおよび補剛桁の格点に注目する。補剛桁については、三連モーメント式を適用することによつて格点の変形量と曲げモーメントの関係を得るとともに、格点におけるせん断力の釣合を考えると曲げモーメントと吊材張力との関係が容易に与えられる。一方、ケーブルについては、格点の釣合を考えることによつてケーブルの変形量と吊

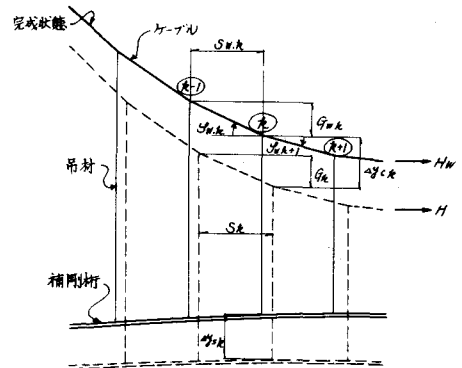


図2 ケーブルと補剛桁の変形状態

材張力の関係が、ケーブルの水平反力および水平格間距離をパラメーターとして与えられる。ついで、吊材の伸びを考慮してケーブルと補剛桁の鉛直変位を適合させ、補剛桁全体についての力の釣合を考えれば、吊材張力を求めるための基本方程式を得ることができる。この基本方程式は各格間ごとに成立するものであり、もし補剛桁架設途中の状態に着目するならば、剛性をもつた補剛桁ブロックそれぞれについて、この基本方程式をたてればよい。ケーブルの幾何学的形状および水平反力は、ケーブルに作用する外力、すなわちケーブルの自重と吊材張力が与えられれば、任意の境界条件のもとに定まるものである。この境界条件としては、アンカースパンのケーブル伸縮にともなうスプレーサドルの移動量および塔の変形量を考えればよい。以上の議論から明らかなように、ケーブル形状および水平反力を与えることによって吊材張力を求め、これをケーブルに作用する荷重としてケーブル形状と水平反力を求める計算を繰り返していけば、所要の値を求めることができる。

2.2 吊材張力に関する基本方程式

図3に示されるような補剛桁の変形状態に対して三連モーメント式を適用する。すなわち、接線回転角 τ と部材回転角 R の代数和で表わされる節点回転角 θ が、格点 k の左右で等しいという条件を用いる。いま、格点 k の右側における接線回転角および節点回転角をそれぞれ τ_{kr} および θ_{kr} 、左側におけるそれらを、 τ_{kl} および θ_{kl} とし、部材回転角を部材 $k-1 \sim k$ について R_k 、部材 $k \sim k+1$ について R_{k+1} とすれば

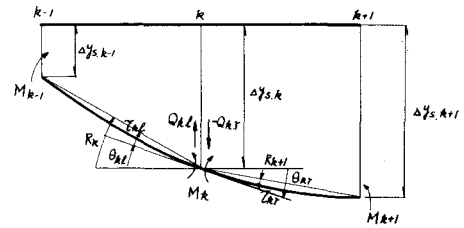


図3 補剛桁の変形と曲げモーメント

$$\theta_{kl} = \tau_{kl} + R_k = -\frac{\lambda}{6E_s I} (M_{k-1} + 2M_k) - \frac{1}{\lambda} (\Delta Y_{s,k-1} - \Delta Y_{s,k}) \quad (1)$$

$$\theta_{kr} = \tau_{kr} + R_{k+1} = \frac{\lambda}{6E_s I} (2M_k + M_{k+1}) - \frac{1}{\lambda} (\Delta Y_{s,k} - \Delta Y_{s,k+1}) \quad (2)$$

ここに、 λ : 補剛桁の格間距離 $\Delta Y_{s,k}$: 補剛桁の鉛直変位 $E_s I$: 補剛桁の曲げ剛性となるから、 $\theta_{kl} = \theta_{kr}$ より格点 k における条件式はつぎのようになる。

$$(\Delta Y_{s,k-1} - 2\Delta Y_{s,k} + \Delta Y_{s,k+1}) + \frac{\lambda^2}{6E_s I} (M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1}) = 0 \quad (3)$$

補剛桁ブロックの左端(始端)および右端(終端)の格点番号をそれぞれ k_b, k_e とし、 $k = k_b+1, \dots, k_e-1$ についての条件式(3)をマトリックス表示すればつぎのようになる。

$$A \Delta Y_s + \frac{\lambda^2}{6E_s I} B M + \Delta Q = 0 \quad (4)$$

$$\text{ここに } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \Delta Y_s = \begin{bmatrix} \Delta Y_{s,k_b+1} \\ \Delta Y_{s,k_b+2} \\ \vdots \\ \Delta Y_{s,k_e-2} \\ \Delta Y_{s,k_e-1} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_{k_b+1} \\ M_{k_b+2} \\ \vdots \\ M_{k_e-2} \\ M_{k_e-1} \end{bmatrix} \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta Y_{s,k_b} + \frac{\lambda^2}{6E_s I} M_{k_b} \\ \vdots \\ \Delta Y_{s,k_e} + \frac{\lambda^2}{6E_s I} M_{k_e} \end{bmatrix}$$

補剛桁ブロックに含まれる格点の数を N とすれば $N = k_e - k_b + 1$ であり、 A, B は $(N-2)$ 次の正方

マトリックス, $\Delta Y_0, M, \Delta Q$ は $(N-2)$ 次の列ベクトルとなる。補剛桁の架設が完了した以後の状態に着目するならば, k_b, k_e が支点の格点番号に一致することはいうまでもない。また, M_{k_b}, M_{k_e} は一般には 0 であるが, とくに人為的にモーメントを与える場合 (たとえば補剛桁の閉合の場合など) には有限な値をとらせることができる。補剛桁の格点 k に作用する鉛直上向の荷重を P_k とすれば,

$$P_k = (T_{h,k} + \Delta T_{h,k}) - (P_{d,k} + \Delta P_k) \quad (5)$$

ここに, $T_{h,k}$: 完成時の吊材張力 (引張力を+) $\Delta T_{h,k}$: 吊材張力の変化量 (引張力を+)

$P_{d,k}$: 完成時の吊構造死荷重 ($\downarrow = +$) ΔP_k : 補剛桁の格点に作用する荷重 ($\downarrow = +$)

となる。格点曲げモーメントによって発生するせん断力を, 格点 k の左右でそれぞれ Q_{kL}, Q_{kR} とすれば, それらはつぎのように表わされる。

$$Q_{kL} = (M_{k-1} - M_k) / \lambda \quad Q_{kR} = -(M_k - M_{k+1}) / \lambda \quad (6)$$

$P_k = Q_{kL} + Q_{kR}$, $T_{h,k} = P_{d,k}$ なる関係を考慮すれば, 格点 k におけるせん断力の釣合条件式として次式を得る。

$$\Delta T_{h,k} - \Delta P_k = (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) / \lambda \quad (7)$$

式 (7) を $k = k_b + 1, \dots, k_e - 1$ について考えればつぎのようになる。

$$AM = \lambda (\Delta T_h - \Delta P) \quad (8)$$

ここに

$$\Delta T_h = \begin{bmatrix} \Delta T_{h,k_b+1} \\ \Delta T_{h,k_b+2} \\ \text{-----} \\ \Delta T_{h,k_e-2} \\ \Delta T_{h,k_e-1} \end{bmatrix} \quad \Delta P = \begin{bmatrix} \Delta P_{k_b+1} + M_{k_b} / \lambda \\ \Delta P_{k_b+2} \\ \text{-----} \\ \Delta P_{k_e-2} \\ \Delta P_{k_e-1} + M_{k_e} / \lambda \end{bmatrix}$$

変形状態と完成状態それぞれについて, ケーブルの格点 k における力の釣合条件式はつぎのようである。 $H(\tan \varphi_{k+1} - \tan \varphi_k) + (P_{o,k} + T_{h,k} + \Delta T_{h,k}) = 0$ (9)

$$H_w(\tan \varphi_{w,k+1} - \tan \varphi_{w,k}) + (P_{o,k} + T_{h,k}) = 0 \quad (10)$$

ここに, H, H_w : ケーブルの水平反力

$\varphi_k, \varphi_{w,k}$: ケーブル $k-1 \sim k$ の傾斜角 ($\downarrow = +$)

$\varphi_{k+1}, \varphi_{w,k+1}$: ケーブル $k \sim k+1$ の傾斜角 ($\downarrow = +$)

$P_{o,k}$: ケーブル重量 ($\downarrow = +$)

W : 完成状態を示すサフィックス

一方, $\tan \varphi_k, \tan \varphi_{w,k}$ はつぎのように表わされる。

$$\tan \varphi_k = G_k / S_k = \{ G_{w,k} + (\Delta Y_{o,k} - \Delta Y_{o,k-1}) \} / S_k \quad (11)$$

$$\tan \varphi_{w,k} = G_{w,k} / S_{w,k} \quad (12)$$

ここに, $S_k, S_{w,k}$: ケーブル $k-1 \sim k$ の水平距離 ($\rightarrow = +$)

$G_k, G_{w,k}$: ケーブル $k-1 \sim k$ の鉛直距離 ($\downarrow = +$)

$\Delta Y_{o,k}$: ケーブルの鉛直変位 ($\downarrow = +$)

式 (9) ~ (12) より, ケーブルの格点 k における力の釣合条件式はつぎのようになる。

$$H \{ \bar{S}_k \Delta Y_{c,k-1} - (\bar{S}_k + \bar{S}_{k+1}) \Delta Y_{c,k} + S_{k+1} \Delta Y_{c,k+1} \} + H G_k - H_w t_k + \Delta T_{h,k} = 0 \quad (13)$$

ここに

$$\bar{S}_k = 1/S_k, \quad g_k = G_{w,k+1}/S_{k+1} - G_{w,k}/S_k, \quad t_k = G_{w,k+1}/S_{w,k+1} - G_{w,k}/S_{w,k}$$

式 (13) を $k = k_b+1, \dots, k_e-1$ についてマトリックス表示すれば次式を得る。

$$H S \Delta Y_c + H G - H_w T + \Delta T_h = 0 \quad (14)$$

$$S = \begin{bmatrix} -(\bar{S}_{kb+1} + \bar{S}_{kb+2}) & \bar{S}_{kb+2} & & & \\ \bar{S}_{kb+2} & -(\bar{S}_{kb+2} + \bar{S}_{kb+3}) & \bar{S}_{kb+3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \bar{S}_{ke-2} & -(\bar{S}_{ke-2} + \bar{S}_{ke-1}) & \bar{S}_{ke-1} & & \\ & \bar{S}_{ke-1} & -(\bar{S}_{ke-1} + \bar{S}_{ke}) & & \end{bmatrix} \quad \Delta Y_c = \begin{bmatrix} \Delta Y_{c,kb+1} \\ \Delta Y_{c,kb+2} \\ \vdots \\ \Delta Y_{c,ke-2} \\ \Delta Y_{c,ke-1} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} g_{kb+1} + \bar{S}_{kb+1} \Delta Y_{c,kb} \\ g_{kb+2} \\ \vdots \\ g_{ke-2} \\ g_{ke-1} + \bar{S}_{ke} \Delta Y_{c,ke} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_{kb+1} \\ t_{kb+2} \\ \vdots \\ t_{ke-2} \\ t_{ke-1} \end{bmatrix}$$

張力変化 ΔT_h および温度変化 t (v) にもなる吊材の伸縮を考慮すれば、 ΔY_c と ΔY_s にはつぎの関係がある。

$$\Delta Y_s = \Delta Y_c + \frac{1}{E_h A_h} L_h \Delta T_h + \alpha_s t L_h e \quad (15)$$

ここに

$$L_h = \begin{bmatrix} l_{h,kb+1} \\ l_{h,kb+2} \\ \vdots \\ l_{h,ke-2} \\ l_{h,ke-1} \end{bmatrix}$$

$E_h A_h$: 吊材の伸縮剛性

α_s : 鋼の線膨脹係数

t : 温度変化量

$l_{h,k}$: 完成時の吊材長

e : $(N-2)$ 次の単位ベクトル

式 (4), (8), (14), (15) から M , ΔY_s , ΔY_c を消去すればつぎようになる。

$$K \Delta T_h = N \quad (16)$$

$$\text{ここに } K = \lambda^3 H / 6 E_s I \cdot S A^{-1} B A^{-1} - E + H / E_h A_h \cdot S L_h \quad (17)$$

$$N = \lambda^3 H / 6 E_s I \cdot S A^{-1} B A^{-1} \Delta P + H G - H_w T - H S A^{-1} \Delta Q - \alpha_s t H S L_h e \quad (18)$$

補剛桁ブロックに作用する外力の釣合，すなわち

$$\sum_{i=k_b}^{k_e} (\Delta T_{h,i} - \Delta P_i) = 0 \quad (19)$$

$$\sum_{i=k_b}^{k_e} (i - kb) (\Delta T_{h,i} - \Delta P_i) = \frac{1}{\lambda} (M_{kb} - M_{ke}) \quad (20)$$

を式 (16) にまとめれば，吊材張力を求めるための基本方程式として次式が得られる。

$$\bar{K} \Delta \bar{T}_h = \bar{N} \quad (21)$$

$$\text{ここに, } \bar{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{K} & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & N-2 & N-1 \end{bmatrix} \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} \sum_{i=k_b}^{k_e} \Delta P_i \\ \boxed{N} \\ \sum_{i=k_b}^{k_e} (i - kb) \Delta P_i + \frac{1}{\lambda} (M_{kb} - M_{ke}) \end{bmatrix} \quad \Delta \bar{T}_h = \begin{bmatrix} \Delta T_{h,kb} \\ \boxed{\Delta T_h} \\ \Delta T_{h,ke} \end{bmatrix}$$

式 (21) は N 個の条件式を表わしているが、 $H, S_k, \Delta Y_{c,kb}, \Delta Y_{c,ke}, \Delta Y_{s,kb}, \Delta Y_{s,ke}$ なる $(N+4)$ 個の未知数を含んでいる。したがって，これらの未知数を仮定することによつて $\Delta \bar{T}_h$ を求め，これを用いて

ケーブルの計算を行えば逆にこれらの未知数が定まるので、このような計算を繰返せばよいことは前にのべたとおりである。

2.3 ケーブルの形状

荷重を担うケーブルの計算については、従来多くの論文⁴⁾が発表されている。ここでは、我々が用いた解法を紹介し、境界条件への適合については後述することとする。完成状態の吊橋ケーブルには、ケーブル自重と吊材張力が作用し、ある水平反力のもとで釣合系が形成されている。いま、ケーブルに作用する荷重が変化すれば、ケーブルは変形し、水平反力も変化して新しい釣合系が生じる。

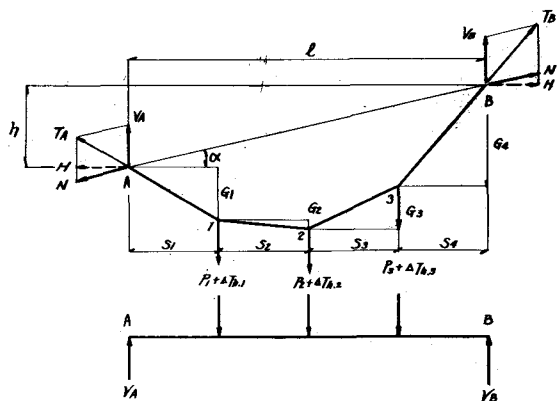


図4 ケーブルの釣合

計算の基本は、ケーブルを右支点で切断し、与えられた荷重状態のもとで釣合を保ちながら、

ケーブルの右端を所定の位置におさめるような水平反力Hをさがし出すことである。図4において、弦ABを単純桁と考えれば、左支点の鉛直反力は力の釣合から簡単に定まり、

$$V_A = \sum_{i=1}^N (P_{c,i} + T_{h,i} + \Delta T_{h,i}) (1 - \sum_{i=1}^k S_i / \sum_{i=1}^N S_i) \quad (22)$$

ここにNはケーブル右端の格点番号を示している。単純桁の格間 $k-1 \sim k$ に作用するせん断力はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V_A \\ V_k &= V_{k-1} - (P_{c,k-1} + T_{h,k-1} + \Delta T_{h,k-1}) \quad (k \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

したがって、ケーブルの格間 $k-1 \sim k$ に作用するせん断力は

$$\bar{V}_k = V_k - H \tan \alpha \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (24)$$

$$\text{ケーブルの傾斜角} : \varphi_k = \tan^{-1} (\bar{V}_k / H) \quad (25)$$

$$\text{ケーブルの張力変化量} : \Delta T_k = H \cdot \sec \varphi_k - T_{w,k} \quad (26)$$

$$\text{格間ケーブル長} : L_k = L_{w,k} (1 + \Delta T_k / E_0 A_0 + \alpha_s t) \quad (27)$$

ここに $T_{w,k}$: 完成状態のケーブル張力

$L_{w,k}$: 完成状態の格間ケーブル長

$E_0 A_0$: ケーブルの伸縮剛性

となつてケーブルの形はつぎのようになる。

$$S_k = L_k \cos \varphi_k, \quad G_k = L_k \sin \varphi_k \quad (28)$$

つぎに、ケーブルの右端に関する外力のモーメント ΔM_B を調べ、これが十分小さくなければ左端の鉛直反力 V_A に ΔV_A だけの修正を加え、以上の計算を繰返せば、与えられた荷重と水平反力のもので釣合系が得られる。

$$\Delta M_B = \sum_{k=1}^N V_k S_k \quad (29)$$

$$\Delta V_A = -\Delta M_B / \sum_{k=1}^N S_k \quad (30)$$

こんどは、上に与えられたケーブルの右端を、所定の位置におさめてやらなければならない。最終変

形状状態におけるケーブル右端が、完成状態から水平方向右側に δ_h 、鉛直方向下側に δ_v だけ移動するとしておく(図5)。これは、スプレーサドルの移動および塔の変形によるものである。まず、ケーブル右端の高さを最終変形状態にそろえることから始める。そのために、 $\Delta T_B = 0$ となつたときのケーブル右端 B' の高さを最終変形状態のケーブル右端 B'' から測つて鉛直方向に η としておく。弦 AB' が水平となす角度 α' は

$$\alpha' = \tan^{-1} \left(-\sum_{k=1}^N G_k / \sum_{k=1}^N S_k \right) \quad (31)$$

よつて弦 AB' の長さ l' は

$$l' = \sum_{k=1}^N S_k \cdot \sec \alpha' \quad (32)$$

いま、左支点 A を中心にして、右端の高さが最終状態に一致するように弦 AB' を回転すれば、ケーブルの格間距離はつぎのようになる。

$$S'_k = S_k \{ \cos(\alpha'' - \alpha') + \tan \varphi_k \cdot \sin(\alpha'' - \alpha') \} \quad (33)$$

$$G'_k = G_k \{ \cos(\alpha'' - \alpha') - \cot \varphi_k \cdot \sin(\alpha'' - \alpha') \} \quad (34)$$

$$\text{ここに } \alpha'' = \sin^{-1} \{ (h - \delta_v) / l' \}$$

このようにして得られた回転後のケーブルは、もはや釣合を保っていない。そこで、新に求められた S'_k, G'_k, α'' を用いて式(22)以下の計算を繰返せば、ケーブル右端が所定の高さにおさまるような釣合系を得ることができる。つぎに、ケーブル右端における水平位置を修正してやらなければならない。すなわち、ケーブル右端 B' を水平方向に ξ だけ移動して、 B'' に一致するような水平反力 H を求めるわけである。これには、 H と ξ の関係(図6)に注目して Newton-Raphson の反復法を適用すれば、以下に示すように、 ΔH が所要の精度におさまるまで繰返計算を行なえばよい。

$$\Delta H_i = \xi_i \cot \theta_{i-1} \quad (35)$$

$$H_{i+1} = H_i - \Delta H_i \quad (36)$$

$$\text{ここに } \cot \theta_{i-1} = \Delta H_{i-1} / \Delta \xi_{i-1}$$

ただし、第2回目の水平反力の仮定値 H_2 を求める場合には、上式を用いることができないので、 $\xi_1 > 0$ なら $H_2 = 0.9 H$ 、また、

$\xi_1 < 0$ なら $H_2 = 1.1 H$ としておけばよい。以上の議論は、荷重が与えられた場合の単径間ケーブルについて釣合形を求めるためのものである。これを吊橋に適用するための手法については後に詳述することとする。

3. 適合条件

3.1 ケーブルと塔・スプレーサドルの適合条件

吊橋完成状態から荷重変化(温度変化も含む)が生ずると、塔は相隣る支間の水平反力の差によって曲げ変形を起し、ケーブルの鉛直反力および温度変化によつて伸縮する。一方、スプレーサドルはケーブルの伸縮にともなつて、その位置が変化する。変形後のケーブル水平反力を側径間で H_I 、中央径間で H_{II} とし、塔頂の水平変位量を中央径間に向つて ξ_B とする(図7)。これは、補剛桁架設途中について考えるならば、吊橋完成状態を基準として、ケーブル支点の水平移動量 ξ_B とサドルの

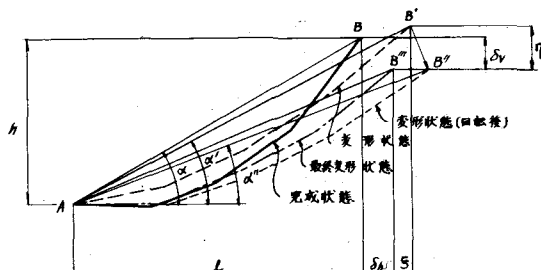


図5 ケーブル右支点の移動

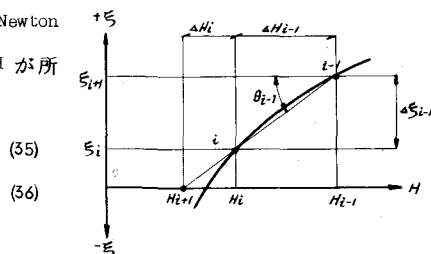


図6 水平反力の修正

$$\text{セットバック量 } \xi_0 \text{ を用いて } \xi'_B = \xi_B - \xi_0 \quad (37)$$

で表わされる量である。完成された吊橋に作用する活荷重を考える場合には、 $\xi_0=0$ となることは当然である。ケーブルの水平反力と塔頂の水平変位の間にはつぎのような関係がある。

$$H_{II} - H_I = Kh \xi'_B \quad (38)$$

$$Kh = 3EsI_t / h^3 \quad (39)$$

ここに、 EsI_t : 塔の曲げ剛度

h : 塔高

式(39)で定義される定数 Kh は、塔頂の水平移動に対する一種のバネ定数である。 H_I, H_{II} はこれらの算術平均値 H を用いればつぎのように表わされる。

$$H_I = H - Kh \xi'_B / 2 \quad (40)$$

$$H_{II} = H + Kh \xi'_B / 2 \quad (41)$$

2.でのべた計算を行なう場合には、側径間については H_I 、中央径間については H_{II} を用いなければならない。この H_I, H_{II} を与えるためには ξ'_B を仮定する必要があるが、最初は $\xi'_B=0$ から出発して 2.3 により塔頂のケーブル支点位置を求め、以後は式(37)を用いて ξ'_B を与えていけばよい。塔はケーブルの鉛直反力の作用によつて伸縮する。ケーブルの鉛直反力を側径間で R_1 、中央径間で R_2 とすれば鉛直反力の合計 R_t はつぎのようになる(図8)。

$$R_t = R_1 + R_2 = H_I(-G_{N1})/S_{N1} + H_{II}G_{N1+1}/S_{N1+1} \quad (42)$$

一方完成状態における鉛直反力 R_w は

$$R_w = H_w(-G_w, N_1)/S_w, N_1 + H_w G_w, N_1+1/S_w, N_1+1 \quad (43)$$

であるから鉛直反力の変化量 ΔR_t および塔頂の鉛直移動量 Δh_t はそれぞれつぎのようになる。

$$\Delta R_t = R_t - R_w, t \quad (44)$$

$$\Delta h_t = \Delta R_t / Kv - \alpha s_t h_t \quad (45)$$

$$Kv = EsA_t / h_t \quad (46)$$

ここに、 EsA_t : 塔の伸縮剛度

式(46)で定義される定数 Kv は、式(39)による Kh に対応して、塔頂の鉛直変位に対するバネ定数と考えてよい。この場合も、 $\Delta h_t=0$ として計算をはじめ、第2回目の繰返しから式(42)~(46)を用いて Δh_t を与えていけばよい。スプレーサドルの移動状態を図9に示す。側径間の水平反力が H_w から H_I に変化したことにより、ケーブル0~1の張力変化量 ΔT_1 はつぎのようになる。

$$\Delta T_1 = H_I \sec \varphi_1 - T_w, 1 \quad (47)$$

ここに $\varphi_1 = \tan^{-1}(\bar{V}_1/H_I)$

アンカースパンのケーブルは、側径間のケーブル0~1と等張力であるから、その伸縮量 ΔL_A は簡単に求めることができ、アンカースパンの幾何学的形状を考えればスプレーサドルの移動量 $\Delta L_A, \Delta h_A$ はつぎのようになる

$$\Delta L_A = \Delta T_1 / Ka + \alpha s_t L_{WA} \quad (48)$$

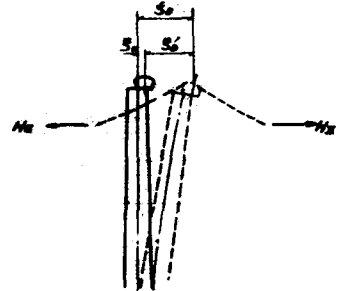


図7 塔の変形

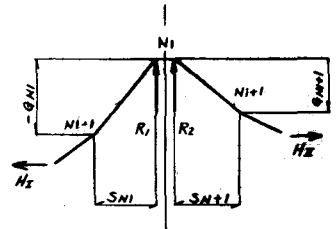


図8 ケーブル反力(塔)

$$K_A = E c A c / L W A \quad (49)$$

$$\Delta l_A = (L W A + \Delta L_A) \cos \theta - l_A \quad (50)$$

$$\Delta h_A = \Delta l_A \tan \beta \quad (51)$$

ここに、 β : スプレーサドルの傾斜角

$$\cos \theta = \cos^2 \beta \sqrt{\sec^2 \beta - a^2} - a \sin \beta \cos \beta$$

$$a = (h_A - l_A \tan \beta) / (L W A + \Delta L_A)$$

式(49)で定義される定数 K_A は、スプレーサドルの移動に対する

バネ定数であり、 $\Delta l_A, \Delta h_A$ の出発値は 0 としておけばよい。

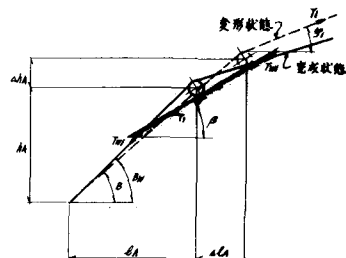


図9 スプレーサドル移動

3.2 補剛桁と塔・橋台支点の適合条件

補剛桁は塔と橋台に支点をもっており、橋台支点では常に鉛直変位が 0 である。しかし、塔支点では 3-1 でものべたように塔の伸縮にもなり鉛直方向の支点移動を考慮してやらなければならない。

移動量 $\Delta h'_t$ は式(45)(46)に対応してつぎのようになる。

$$\Delta h'_t = \Delta R_t / K'_v - \alpha s t h'_t \quad (52)$$

$$K'_v = E s A_t / h'_t \quad (53)$$

ここに、 h'_t : 塔の塔部から補剛桁の支点までの高さ。

ここでも、 $\Delta h'_t = 0$ を出発値とすればよいことは、前述の他例と同じである。

4. 数値計算法

4.1 数値計算の基本的考え方

式(40)(41)で、各径間ごとのケーブル水平反力 H_1, H_2 を仮定し、さらに 2.2 でのべたように補剛桁ブロックの始終端変位 $\Delta y_{s, kb}, \Delta y_{s, ke}$ 、それに対応するケーブルの格点の鉛直変位 $\Delta y_{c, kb}, \Delta y_{c, ke}$ およびケーブルの水平格間距離 S_k を仮定することによつて、式(21) から吊材張力の変化量 $\Delta T_{h, k}$ を求める。もし、補剛桁架設途中の状態を考え、補剛桁が架設されていない部分の吊材に注目するならば、そこでは格点当りの吊材自重を吊材張力の減分と考えればよい。このようにして得られた吊材張力の変化量 $\Delta T_{h, k}$ は、上記の説明から明かなように、補剛桁ブロックのある部分については一種の仮定値となり、それ以外の部分では確定した値となる。つぎに、上で求められた吊材張力の変化量 $\Delta T_{h, k}$ をケーブルに作用する荷重と考え、各径間ごとに両支点の高さを仮定の位置におさめるような釣合形を求めるための計算を行なう。すなわち、ケーブルと塔およびスプレーサドルの適合条件のうち鉛直方向のみに注目するわけである。その結果、ケーブル支間の合計は、完成状態で $l = 2l_1 + l_2$ (スプレーサドル間の距離) であつたものが $l + \Delta l$ となつてしまう。そこで、スプレーサドルの移動量 $2\Delta l_A$ を考慮に入れて $l + \Delta l = l + 2\Delta l$ 、すなわち $\delta = \Delta l - 2\Delta l_A$ を 0 とするように式(35)(36)を用いて水平反力を変化させてケーブル形状を定めてやる。しかしながら、このケーブル形状は仮定された吊材張力のもとで与えられたものであり、本節の冒頭でのべた仮定値がすでに変化しているために吊材張力も当然変化しているはずである。そこで、再び最初にもどつて新たな仮定値を用いて吊材張力を求め、仮定値と結果が十分近くなるまで上記の計算を繰返すことになる。具体的には、その判定条件として水平反力に注目している。

4.2 仮定値の設定方法

(1) 水平反力 H_i, H_{ii}

水平反力 H_i, H_{ii} は、式 (40)(41) から明らかなように、その平均値 H と塔頂の水平移量 δB を与えれば求められるものである。まず、 H の仮定方法についてのべればつぎのとおりである。計算の出発点で与える初期値は、極端にいえばどんな値でもよいが、一般に完成状態と変形状態の荷重比を用いれば、比較的よい初期値を与えることができる。 j 回の繰返計算が完了し、第 $j+1$ 回目の水平反力仮定値 H_{j+1} についてはつぎのように考えた (図 10)。

$$\Delta H_j = \delta H_j \cot \theta_{j-1} \quad (54)$$

$$H_{j+1} = H_j - \Delta H_j \quad (55)$$

ここに、 $\cot \theta_{j-1} = (H_j - H_{j-1}) / (\delta H_j - \delta H_{j-1})$

$$\delta H_j = H'j - H_j$$

$H'j$: 第 j 回目の水平反力最終値

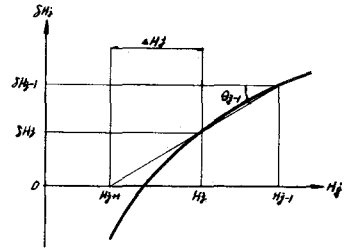


図 10 水平反力の仮定

ただし、 $j=2$ の場合には $H_2 \leftarrow H'_1$ とした。このようにして計算を繰返していくと $H_j - H_{j-1}, \delta H_j - \delta H_{j-1}$ がともに小さくなり、

その微小な変動により $\cot \theta_{j-1}$ が不安定になつて精度のよい H_{j+1} を求めることができなくなつてしまう。その対策として、 δH 2 つの判定条件を設けてつぎのような取扱いをした。まず、 δH が第 1 の条件を満足したならば、式 (54)(55) による修正を行わずに H を固定し $\Delta y_{s,kb}, \Delta y_{s,ke}, \Delta y_{c,kb}, \Delta y_{s,ke}, S_k$ のみを仮定しなおして計算を繰返す。このようにして、 δH がある値に収斂したならば、あらためて H を修正して計算し、 δH が第 2 の判定条件 (第 1 の条件よりきびしい) を満すようにして計算を完了する。式 (40)(41) における δB については $\delta B=0$ から出発し、2 回目以後は、その前回の結果を用いてケーブルの塔頂支点の位置 δB を与え、式 (37) で計算すればよい。

(2) 鉛直変位 $\Delta y_{c,kb}, \Delta y_{c,ke}, \Delta y_{s,kb}, \Delta y_{s,ke}$

補剛桁の架設が完了したあとの状態では、3-1 および 3-2 でのべたところにより

$$\begin{aligned} \text{ケーブル: } \Delta y_{c,kb} &= -\Delta h \lambda \quad (\text{スプレーサドル上}), & \Delta y_{c,ke} &= \Delta h t \quad (\text{塔上}) \\ \text{補剛桁: } \Delta y_{s,kb} &= 0 \quad (\text{橋台支点上}), & \Delta y_{s,ke} &= \Delta h' t \quad (\text{塔支点上}) \end{aligned} \quad (56)$$

として鉛直変位を与えることができる。一方、補剛桁の架設途中の状態に着目すれば、補剛桁ブロックの始終端は必ずしも支点上にくるとは限らず、始終端鉛直変位の変動が式 (21) による $\Delta Th, k$ に微妙な影響を及ぼす。実際に、プログラム完成途上ではこのために収斂しない例もあつた。そこで、つぎに記すように支間部始終端の鉛直変位には、一種のダンピングを与えて仮定値を設定することとした。ただし、第 1 回目の仮定値を 0、第 2 回目の仮定値を第 1 回目の結果に等しくして、第 3 回目以後についてこれを適用した。

$$\text{ケーブルについて: } (\Delta y_{c,kb})_j = \{ (\Delta y_{c,kb})_{j-1} + (\Delta y_{c,kb})_{j-2} \} / 2 \quad (57)$$

$$\text{補剛桁について: } (\Delta y_{s,kb})_j = (\Delta y_{s,kb})_j$$

(3) ケーブル格間距離 S_k, G_k

第 1 回目の仮定値として完成形状 $S_{w,k}, G_{w,k}$ を用い、以後については前回の結果をそのまま仮定値として用いればよい。

(4) 吊材張力 $\Delta Th, k$

式(21)によつて求められた吊材張力の変化量 $\Delta T_{h,k}$ は、始終端の鉛直変位にダンピングを与えてもまだ振動する傾向にある。そして、この影響はケーブルの形状計算に敏感に反映される。そこで $\Delta T_{h,k}$ についても同様各ダンピングを与えることとした。

第1回目 $\Delta T_{h,k} = (\Delta T_{h,k})_1$

第j回目 ($j \geq 2$) $\Delta T_{h,k} = \{ (\Delta T_{h,k})_j + (\Delta T_{h,k})_{j-1} \} / 2$

(58)

4.3 計算手順

これまでに明らかにしてきた計算内容を具体的に
のべると以下のようになる。

1) 初期値を仮定する

塔頂水平変位 $(\delta b)_j$ [式(37)]

平均水平反力 H_j

水平反力 $(H_1)_j, (H_2)_j$ [式(40)(41)]

始終端鉛直変位 $(\Delta y_c, kb)_j, (\Delta y_c, ke)_j$

$(\Delta y_s, kb)_j, (\Delta y_s, ke)_j$ [式(56)(57)]

ケーブル格間距離 s_k, d_k [4-2節8)]

2) 吊材張力の変化量 $(\Delta T_{h,k})_j$ を計算し[式(21)]

これにダンピングを与える [式(58)]

無補構部分の $\Delta T_{h,k}$ を計算する。

3) ケーブルの適合条件を計算する。

スプレーサドル $(\Delta l_A)_j, (\Delta h_A)_j$ [式(50)(51)]

塔 $(\Delta h_t)_j$ [式(45)]

4) 側径間のケーブル形状を計算する

4-1) 仮定された水平反力 H_1 のもとでケーブル形状を計算する [式(22)~(28)]

4-2) ケーブル左端の鉛直反力不均衡量を調べる [式(29)~(30)]

4-3) $|\Delta V_A| \leq \epsilon_1$?

NO: $V_A \leftarrow V_A + \Delta V_A$ として4-1)へもどる。

YES: 4-4)へ行く。

4-4) ケーブル右端における位置の誤差を計算する

$$\eta_B = \sum_{k=1}^{N_k} G_k + (h - \delta v), \delta v = \Delta h_t + \Delta h_A \quad (59)$$

$$\xi_B = \sum_{k=1}^{N_k} S_k + (1 - \delta h), \delta h = \Delta l_A \quad (60)$$

4-5) $\|\eta_B\| \leq \epsilon_2$?

NO: 4-6)へ行く。

YES: 5) (中央径間)へ行く。

4-6) ケーブル右端の高さを修正する。 [式(31)~(34)]

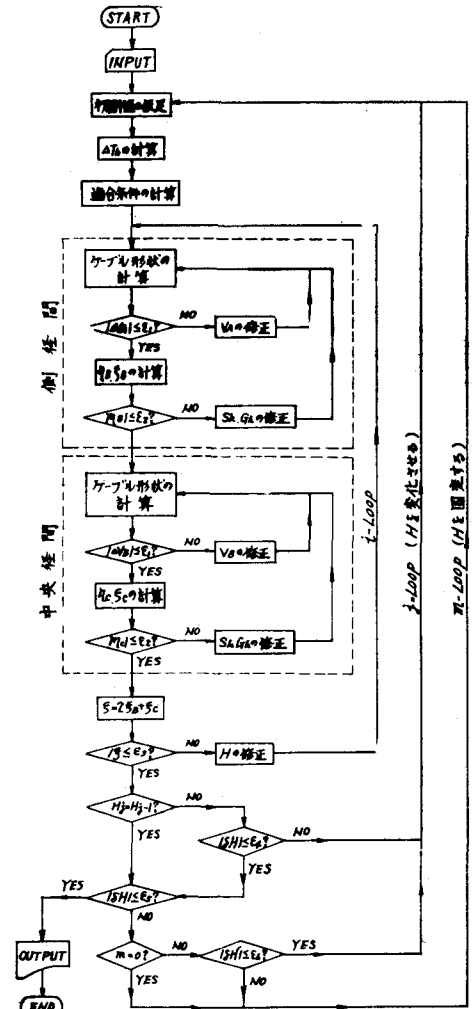


図11 フローチャート

4-7) $S_k \leftarrow S_k$, $G_k \leftarrow G_k'$ として 4-1) へもどる。

5) 中央径間のケーブル形状を計算する。

中央径間について 4) と同様な計算を行なう。ただし

$$\eta_c = \sum_{k=N+1}^{N_2} G_k \quad (61)$$

$$\xi_c = \sum_{k=N+1}^{N_2} (S_k - L_2) \quad (62)$$

6) 右側径間のケーブル右端を所定の位置におさめる。

6-1) ケーブル右端水平位置の誤差を計算する $\xi = 2\xi_B + \xi_c$ (63)

6-2) $|\xi| \leq \varepsilon_3$?

NO: 水平反力を修正して 4-1) へもどる。〔式 (35)~(36)〕 YES: 6-3) へ行く。

6-3) 水平反力の初期値を判定する。 $H_j = H_{j-1}$?

NO: 7) へ行く。 YES: 8) へ行く。

7) 水平反力について第 1 回目の判定を行なう。〔4-2 節(1)〕

$|\partial H| \leq \varepsilon_4$?

NO: H を修正して 1) へもどる。 YES: 8) へ行く。

8) 水平反力について第 2 回目の判定を行なう。〔4-2 節(1)〕

8-1) $|\partial H| \leq \varepsilon_5$? ($\varepsilon_4 > \varepsilon_5 > 0$)

NO: $H_j = H_{j-1}$ の回数 m をカウントして 8-2) へ行く。 YES: 結果のプリント

8-2) $m=0$?

NO: 8-3) へ行く。 YES: H を固定して 1) へもどる。

8-3) H' の収斂を判定する。 $(\partial H')_{jm} = (H')_{jm} - (H')_{jm-1}$ $|(\partial H')_{jm}| \leq \varepsilon_6$?

NO: H を固定して 1) へもどる。 YES: H を修正して 1) へもどる。〔式(55)〕

44 数値計算例

支間 178m+712m+178m の吊橋について、補剛桁架設中の計算結果の一例を、中央径間について示したのが表 1 である。この架設段階は、補剛トラスを側径間では塔から橋台に向つて約 63%、中央径間では塔から支間中央に向つて約 56% 架設した状態であり、温度変化量を +2.0°C としている。この計算の繰返回数は j-Loop が 5 回、m-Loop が 2 回であり、演算時間は 4 分 45 秒であつた。

参考文献

- 1) Pugsley, A.G., "A Flexibility Coefficient Approach to Suspension Bridge Theory",
Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, England, Vol. 11, 1949.
- 2) Brotton, D.M. and Arnold, G., "The Solution of Suspension Bridge Problem by Digital
Computers - Part 2," The Structural Engineer, London, England, July, 1963.
- 3) Poskitt, T.J., "Structural Analysis of Suspension Bridges," Journal of the Structural
Division, ASCE, Feb., 1966.
- 4) たとえば, Michalos, J. and Birnstiel, G., "Movement of a Cable Due to Changes
in Loading," Transaction of ASCE, VOL. 127, 1962.

** B-5 **

** RESULT [CABLE] **

HORIZONTAL COMPONENT OF CABLE TENSION H 3737.105 (T)
 VERTICAL REACTION OF CABLE
 AT SUPPORT SA VSA 1544.044 (T)
 AT SUPPORT SB VSU 3351.021 (T)
 MOVEMENT OF CABLE SUPPORTS
 AT SPLAY POINT DLA -1.648 (CM)
 DHA -1.648 (CM)
 XISB -20.203 (CM)
 AT TOWER TOP DHT -3.237 (CM)

COORDINATE AFTER DEFORMATION
 IN THE HORIZONTAL DIRECTION X (CM)
 IN THE VERTICAL DIRECTION Y (CM)
 CABLE DISPLACEMENT
 IN THE HORIZONTAL DIRECTION DX (CM)
 IN THE VERTICAL DIRECTION DY (CM)
 SLOPE OF CABLE TAN (P)

SYS. 2	K	X	Y	DX	DY	TAN (P)
TOWER	16	-20.203	-3.237	-20.203	-3.237	****
	17	1418.615	535.160	-26.385	9.102	0.374
	18	2449.362	907.274	-30.638	17.817	0.361
	19	3489.747	1266.686	-34.253	25.010	0.348
	20	4512.800	1613.195	-37.200	30.483	0.336
	21	5545.519	1946.684	-39.481	34.117	0.323
	22	6578.889	2267.060	-41.111	35.819	0.310
	23	7612.884	2574.253	-42.116	35.520	0.297
	24	8647.469	2868.218	-42.531	33.174	0.284
	25	9682.603	3148.929	-42.397	28.757	0.271
	26	10719.234	3416.387	-41.766	22.267	0.258
	27	11754.310	3670.613	-40.690	13.727	0.245
	28	12790.769	3911.658	-39.231	3.187	0.233
	29	13827.548	4139.595	-37.452	-9.278	0.220
	30	14864.579	4354.529	-35.421	-23.566	0.207
	31	15901.794	4556.591	-33.206	-39.543	0.195
	32	16939.123	4745.947	-30.877	-57.046	0.183
	33	17976.498	4922.792	-28.502	-75.877	0.170
	34	19013.852	5087.348	-26.148	-95.816	0.159
	35	20051.187	5239.431	-23.813	-117.047	0.147
	36	21092.329	5346.542	-17.671	-172.068	0.103
	37	22132.537	5446.177	-12.463	-223.384	0.096
	38	23171.875	5538.354	-8.125	-270.976	0.089
	39	24210.407	5623.091	-4.593	-314.826	0.082
	40	25248.199	5700.405	-1.801	-354.919	0.074
	41	26285.316	5770.310	0.316	-391.238	0.067
	42	27321.823	5832.819	1.823	-423.772	0.060
	43	28357.787	5887.946	2.787	-452.506	0.053
	44	29393.276	5935.701	3.276	-477.432	0.046
	45	30428.356	5976.093	3.356	-498.538	0.039
	46	31463.095	6009.130	3.095	-515.818	0.032
	47	32497.560	6034.818	2.560	-529.265	0.025
	48	33531.821	6053.163	1.821	-538.873	0.018
	49	34565.945	6064.169	0.945	-544.640	0.011
	50	35600.000	6067.838	0.000	-546.562	0.004

** RESULT [TRUSS & HANGER] **

VERTICAL COORDINATE AFTER DEFORMATION YS (CM)
 VERTICAL DISPLACEMENT DY (CM)
 BENDING MOMENT M (T.CM)
 SHEAR FORCE S (T)
 HANGER TENSION TH (T)

TRUSS BLOCK 2	K	YS	DY	M	S	TH
	16	7122.984	-2.916	0.000	****	85.898
	17	7111.428	5.270	88904.031	85.898	17.488
	18	7100.822	14.465	164542.161	73.080	20.347
	19	7098.993	21.918	229873.276	63.122	21.045
	20	7076.124	27.611	285620.223	53.862	21.414
	21	7062.014	31.448	332165.244	44.971	21.667
	22	7046.576	33.335	369769.601	36.333	21.829
	23	7029.743	33.210	398601.345	27.857	21.904
	24	7011.369	31.025	418737.966	19.456	21.894
	25	6991.531	26.758	430169.448	11.045	21.798
	26	6973.029	20.409	432796.011	2.538	21.627
	27	6947.588	12.002	426441.059	-6.140	21.352
	28	6923.456	1.586	419819.305	-15.093	20.997
	29	6898.010	-10.763	385563.816	-24.401	20.547
	30	6871.354	-24.940	350208.622	-34.160	19.998
	31	6843.620	-40.814	304185.445	-44.467	19.344
	32	6814.974	-58.219	246817.511	-55.428	18.580
	33	6785.514	-76.955	177313.880	-67.153	17.747
	34	6755.698	-96.766	94813.035	-79.711	16.409
	35	6727.643	-115.335	0.000	-91.607	136.912

表1 数值计算例