

Transfer Matrix法を応用した橋げたの合理的設計法に関する研究

京都大学工学部 山田善一

金沢大学工学部 小堀為雄

大阪府技師 ○池田紀彦

1. まえおき

けに橋のけには変断面構造を採用している場合が多い。このような場合の部材力やたわみ、固有振動周期などの計算には変断面けたとしての計算が要求される。また、計算結果から

- 1) 断面形の修正
- 2) 死荷重の修正 (特に連続けたでは死荷重の仮定値が大きい場合が必ずしも安全側とはならない場合があることなど)
- 3) 固有振動周期から見て橋けたのスパン割や質量分布を修正

などとしなければならない場合が考えられることから数回の繰り返し計算が必要となる。このような場合、計算時間が短時間で済むことが要求される。さらに、電子計算機による自動設計を目標にするならば、構造条件に左右されることなく、なるべく一般的なプログラムで短時間に解けることへの要請が大きい。transfer matrix法は支点の条件、支点の数、スパン割の不同、変断面構造などに関係なく一つのプログラムによって部材各断面の断面力、および変形が同時に計算され、またこの方法を用いることによって、けたの固有振動周期および固有関数(モード)が計算されることから、この種の計算に最も適した方法の一つである。

transfer matrix法には、集中質量(荷重)とする方法、分布質量(荷重)とする方法があるが従来変断面けたの設計には有限個の格点にわけて解析、設計することが多いので、この点からすれば質量を集中化する方法が設計法に合った方法といえる。

2. Transfer matrix法

transfer matrix法は Pestel¹⁾と Leckie²⁾, Hurty³⁾, Thomson⁴⁾ らによって紹介された方法で、我が国においては奥村の研究⁴⁾や柴田の原子炉配管系の振動解析の研究⁵⁾、また山田、小堀のけに橋の振動へ応用している報告などがある。また有名な Kerstenの本⁶⁾がある。

集中質量系に対するtransfer matrix法では、構造部材を集中質点と曲げ剛性と長さのみを有するはり部に分けて、この両者の組み合わせ構造と考える、いわゆる構造系をdiscreteな系と考えると、解析を進めようとするもので、集中質点とははり部についてそれぞれ左右の部材断面に働く断面諸量(たわみ、たわみ角、曲げモーメント、剪断力など)のつりあい式を立て、それらの断面諸量を出発点から最終点まで順次移行して、出発点および最終点における境界条件から未知量を求めようとするものである。

まず、図-1のようなモデルを考える。このときfield matrix $[F]$, Point Matrix $[P]$,

※ 元金沢大学大学院学生

state vector $\{Z\}$ をつきのおく。

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & l_i & 0 & \frac{l_i^3}{2(EI)_i} & \frac{l_i^3}{6(EI)_i} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{l_i^2}{(EI)_i} & \frac{l_i^2}{2(EI)_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

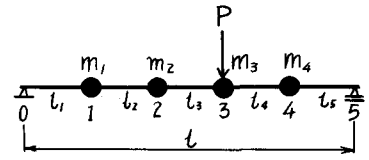


図-1 振動模型

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(m+P) & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} -y \\ \varphi \\ 1 \\ M \\ V \end{Bmatrix} \quad (3)$$

質点の右の state vector には R を右の vector には L を右上につけ、右下には質点の番号をつける。図-1 の振動模型はつきのおくようにあらわされる。

$$\{Z\}_5^L = [F]_5 [P]_4 [F]_4 [P]_3 [F]_3 [P]_2 [F]_2 [P]_1 [F]_1 \{Z\}_0^R \quad (4)$$

式(4)の $[F]_5 [P]_4 \cdots [F]_1$ の演算が完了したマトリックスを $[A]$ とし、その要素を $[a_{ij}]$ とあらわすと、

$$\{Z\}_5^L = [A] \cdot \{Z\}_0^R = [a_{ij}] \{Z\}_0^R \quad (5)$$

ここで、支点は単純支持されているからその境界条件は

$$y_0^R = y_5^L = 0 \quad M_0^R = M_5^L = 0 \quad (6)$$

したがって式(5)は

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi \\ 1 \\ 0 \\ V \end{Bmatrix}_5^L = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi \\ 1 \\ 0 \\ V \end{Bmatrix}_0^R \quad (7)$$

となり、次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_6 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \\ V \end{bmatrix}_0^R \quad (8)$$

式(8)を解いて左支点の未知量(φ_0 と V_0)を求める。

これで、出発点0でのstate vectorが決定され、式(4)の順序に従って繰り返し各点でのstate vectorを計算する。

実際の計算ではマトリックスの各係数を無次元化した方が計算しやすいので、各はりの長さ l_i および断面2次モーメント I_i をそれぞれの標準値 l_s および I_s との比、 l_i^* および I_i^* を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= y/l_s \\ \bar{\varphi} &= \varphi \\ \bar{M} &= l_s M/EI_s \\ \bar{V} &= l_s^2 V/EI_s \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であらわす。また、荷重項についても無次元化するとつぎのようにあらわされる。

$$\bar{m} + \bar{p} = l_s^2 (m+p)/EI_s \quad (10)$$

transfer matrix法の応用例とその計算法を次節にのべる。

3. 静荷重に対する部材各点のたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよび剪断力の計算

1) 単スパンけた

単純支持けたについては前節のとおりであるが、その他両端固定けた、一端固定他端支持けたなどについても、支点の境界条件にのみ注意すれば同様な方法で容易に解くことができる。

数値計算にあたってはけたの分割方法や分割数による解析値の誤差について図-2のAおよびBの2つの分割法で分割数を変えて計算を行なったその結果を図-3に示す。図-3はけたを連続体として計算した値を基準にして示してある。この図でA分割法で分割数が少ないと各値は大きく、B分割法では小さくなる傾向にあり、分割数は10個で高精度の結果を得ることができ、しかし一般にA法がB法より優れている。

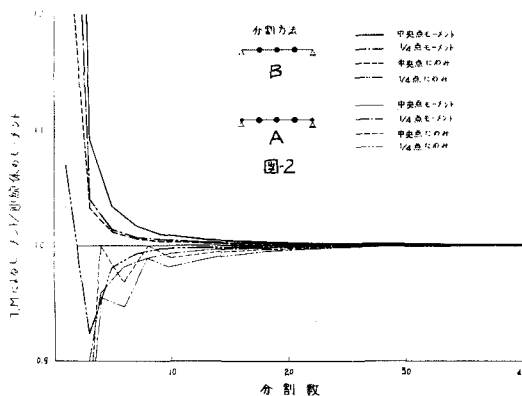


図-2.3 分割法と分割数による最適値への収束

2) 多スパンけた

多スパンけたにおいてはけたの中間に支点あるいはヒンジを有するので、単スパンの場合とはつぎの点が異なる。すなわち、支点上では剪断力 R_i が、ヒンジでは回転角 α_i がそれぞれ不連続となるため支点あるいはヒンジのところではこの点まで演算してきたマトリックスを支点あるいはヒンジでの条件が満足するように整理してつぎへ進めはよい。いま図-4に示す一端固定他端単純支持で中間支

点およびジョイントを有するけたを例にとれば $[A]$, $[B]$ および $[C]$ をそれぞれ点 0~1 間, 点 1~2 間および点 2~3 間の transfer matrix とし, これらのマトリックスの各要素は式 (4) のように計算されるのでつぎのようにあらわすことができる。

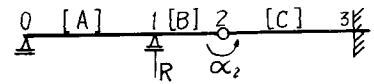


図-4 多スパンけたの説明図

$$\{Z\}_1^L = [A] \cdot \{Z\}_0^R \quad (11)$$

$$\{Z\}_2^L = [B] \cdot \{Z\}_1^R \quad (12)$$

$$\{Z\}_3^L = [C] \cdot \{Z\}_2^R \quad (13)$$

$\{Z\}_1^L$ から $\{Z\}_1^R$ へそして $\{Z\}_2^L$ から $\{Z\}_2^R$ へ移行する手順を説明すればつぎのようになる。

点 0 では単純支持であるからその境界条件は $y_0 = M_0 = 0$ となり, 式 (8) はつぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} -y \\ y \\ 1 \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ 1 \\ V \end{Bmatrix}_0^R \quad (14)$$

ここに a_{ij} はマトリックス $[A]$ の要素を示す。また点 1 でたわみが零つまり $y_1^L = 0$ であるから y_0 と S_0 の間にはつぎの関係がある。

$$0 = a_{12} y_0 + a_{13} + a_{15} V_0 \quad (14)$$

式 (14) より V_0 はつぎのようにあらわされる。

$$V_0 = -\frac{a_{12}}{a_{15}} y_0 - \frac{a_{13}}{a_{15}} \quad (15)$$

したがって, V_0 の項を y_0 の項および 1 の項 (荷重項) に含めて V_0 の項を消去すると式 (14) はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{Bmatrix} -y \\ y \\ 1 \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{22} - a_{12} \cdot a_{25} / a_{15} & a_{23} - a_{13} \cdot a_{25} / a_{15} \\ a_{32} - a_{12} \cdot a_{35} / a_{15} & a_{33} - a_{13} \cdot a_{35} / a_{15} \\ a_{42} - a_{12} \cdot a_{45} / a_{15} & a_{43} - a_{13} \cdot a_{45} / a_{15} \\ a_{52} - a_{12} \cdot a_{55} / a_{15} & a_{53} - a_{13} \cdot a_{55} / a_{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ 1 \end{Bmatrix}_0^R \quad (16)$$

点 1 において左側から右側へ state vector を移行する場合はたわみ, たわみ角および曲げモーメントは連続であるが, 剪断力 $V_1^R = V_1^L + R_1$ (R_1 は反力) となり不連続であるのであらためて右側の state vector に R_1 の項を加えてやればよい。したがって state vector $\{Z\}_1^R$ はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{Bmatrix} -y \\ y \\ 1 \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{22} - a_{12} \cdot a_{25} / a_{15} & a_{23} - a_{13} \cdot a_{25} / a_{15} & 0 \\ a_{32} - a_{12} \cdot a_{35} / a_{15} & a_{33} - a_{13} \cdot a_{35} / a_{15} & 0 \\ a_{42} - a_{12} \cdot a_{45} / a_{15} & a_{43} - a_{13} \cdot a_{45} / a_{15} & 0 \\ a_{52} - a_{12} \cdot a_{55} / a_{15} & a_{53} - a_{13} \cdot a_{55} / a_{15} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_0 \\ 1 \\ R_1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

式(17)より $\{Z\}_1^R$ がわかったので $\{Z\}_2^L$ を知ることが出来る。

また、 $\{Z\}_2^L$ から $\{Z\}_2^R$ へ移行するときは前と同様の手順であるが、点2で曲げモーメントが零つまり $M_2^L = 0$ であるから y_0 と R_1 の間にはつぎの関係がある。

$$0 = d_{42} y_0 + d_{43} + d_{45} R_1 \quad (18)$$

ここに d_{ij} は点2まで演算したマトリックス $[D]$ の要素を示す。

式(18)より R_1 はつぎのようにあらわされる。

$$R_1 = -\frac{d_{42}}{d_{45}} y_0 - \frac{d_{43}}{d_{45}} \quad (19)$$

したがって、 R_1 の項と y_0 の項および1の項(荷重項)に含めて R_1 の項を消去すると式(17)はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{Bmatrix} -y \\ y \\ 1 \\ M \\ S \end{Bmatrix}_2^L = \begin{bmatrix} d_{12} - d_{42} \cdot d_{15} / d_{45} & d_{13} - d_{43} \cdot d_{15} / d_{45} \\ d_{22} - d_{42} \cdot d_{25} / d_{45} & d_{23} - d_{43} \cdot d_{25} / d_{45} \\ d_{32} - d_{42} \cdot d_{35} / d_{45} & d_{33} - d_{43} \cdot d_{35} / d_{45} \\ 0 & 0 \\ d_{52} - d_{42} \cdot d_{55} / d_{45} & d_{53} - d_{43} \cdot d_{55} / d_{45} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ 1 \end{Bmatrix}_0^R \quad (20)$$

点2において左側から右側へ state vector へ移行する場合はたわみ、曲げモーメントおよび剪断力は連続であるが、たわみ角(回転角)は $y_2^R = y_2^L + \alpha_2$ (α_2 は回転角)となり不連続となるので前の場合と同様に右側の state vector に α_2 の項を加えると、state vector $\{Z\}_2^R$ はつぎのようにあらわされる。

さて $\{Z\}_2^R$ がわかったので $\{Z\}_3^L$ は $[E]$ と点3まで演算したマトリックスとするとつぎのようにあらわされる。

$$\begin{Bmatrix} -y \\ y \\ 1 \\ M \\ S \end{Bmatrix}_3^L = [E] \cdot \begin{Bmatrix} y_0 \\ 1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

点3で固定されているからその境界条件 $y_3^L = y_3^R = 0$ より連立方程式を立てて解くと点0での未知量 y_0 および点2での未知量 α_2 が求まり R_1 は式(19)より求めることができ、したがって式(4)と同じく順次計算していくことにより各点の断面諸量が求まる。

4. けた橋の固有振動周期とその固有関数(モード)の計算

けた橋の固有振動数とそのモードを求める方法には種々の方法があるが、このtransfer matrix法を用いると比較的容易に求めることができる。詳細は文献 7) を参照されたい。

著者らはさきに各種けた橋の固有振動周期とその固有関数を求めるプログラム[FMB]を発表した。⁷⁾

この[FMB]を用いて計算した例を図-5, -6, -7および表-1に示す。

5. transfer matrix 法による設計

以上transfer matrix法はけたの変断面性、支持条件などに左右されることなく1つのProgramで短時間に各断面のたわみ、たわみ角、曲げモーメントや剪断力を計算できることをのべた。さらに桁の固有周期とそのモードも同様に求めることが可能である。このことを利用して桁橋の設計法についてわれわれの考え方をのべる。

1) 従来の設計法とtransfer matrix 法による設計法との比較をフローチャートで示すと図-8のようである。

これらの2つのフローチャートを比較すると

- ① 従来の方法では(A)および(B)の影響線も求めるという比較的是ん難な手続きが必要であるが、transfer matrix法では(A')(B')でたわみ、たわみ角、曲げモーメント、剪断力の影響マトリックスを同時に計算できる。
- ② 従来の方法は(E)許容応力で断面決定を行なうのであるがtransfer matrix 法では抵抗曲げモーメント、剪断力で検討する。
この為、断面形状の決定が比較的簡単である。
- ③ 従来の方法では、たわみの計算は断面決定後に行なっていたが、この方法では曲げモーメントと同時に行なえる。
- ④ この方法では、たわみ角も同時に計算されるので、鉄道の長大橋でたわみ角が大きくなってはならない橋梁ではその検討も比較的簡単に行なえる。

2) 設計計算の実例

transfer matrix法で3径間連続けたを現在設計中である。そのフローチャートを図-9に計算中の各曲げモーメント、剪断力を図-10に示す。この例では鋼けたの架設は、中間ピヤーからの張出しとし、鋼けた死荷重による断面諸量は側径間からの張出しけたとして計算するようにしてある。この場合でも、計算の手続きは変りなく、けた最終端の条件さえ変えればよい。

6. おわりに

以上transfer matrix法を用いると、1つのサブプログラムでけたの多スパン性、変断面性、支持条件などに左右されることなく、たわみ、たわみ角、曲げモーメントおよび剪断力が同時に短時間で計算されるので、橋けたの最適設計に適した計算法であると思う。

特に高張力鋼の進歩と橋梁設計、施工技術の進歩でスレンゲータな長大橋が架設され、応力的には満足されてもたわみ規定やたわみ角制限にふれるものが出ることもある。この場合、たわみやたわみ角についても曲げモーメントと同じレベルで検討が可能であり有利である。また、固有周期やそのモードが同時に計算できるので動的検討も可能である。

なお、計算にあたってご協力いただいた金沢大学中村昭英君に感謝します。

表-1 けの橋の固有周期

形式 橋名	三径間連続鋼床板けの橋(琵琶湖) 新十三大橋			三径間鋼床板橋桁 琵琶湖大橋	三径間鋼床板橋桁 城ヶ島大橋			三径間ゲルバーけの橋 京川橋 (Fig. 7)	
スパン長	90+90+90=270m			95+140+95m	70+95+70=235m				
計算法	A (FMB)	B (FMB)	$\frac{ A-B }{B} \times 100$	(FMB)	A (FMB)	B Rayleigh-Ritz	$\frac{ A-B }{A} \times 100$	A (FMB)	B 小西・小松
単位	sec	sec	%	sec	sec	sec	%	sec	sec
振動 次数	1	1.237	2.4	1.455	1.0384	1.019	1.9	0.199	0.203
2	0.9654	0.9295	3.8	0.800	0.5952	0.597	0.4	0.156	0.156
3	0.6612	0.6189	6.8	0.618	0.4485	0.524	16.8	0.107	0.107
4	0.3093	0.3271	5.4	0.373	0.2673	0.204	23.7		
5	0.2714	0.2690	0.9	0.234	0.1724	0.116	32.7		
6	0.2213	0.2190	1.0	0.203	0.1490	0.112	24.8		
算点数	27	27		63				22	
断面	等断面	変断面						変断面	変断面
計算時間	52 sec	54 sec		151 sec				130 sec	
その他	等間隔	等間隔		等間隔				不等間隔	

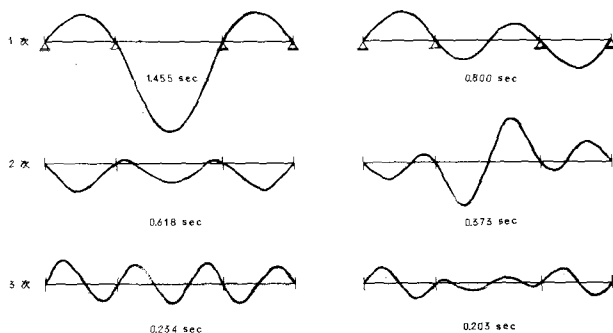
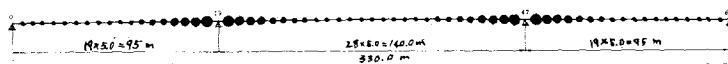
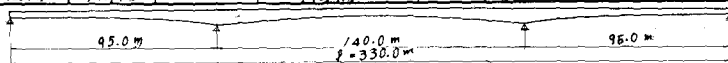


図-5 琵琶湖大橋の振動模型、振動周期とそのモード

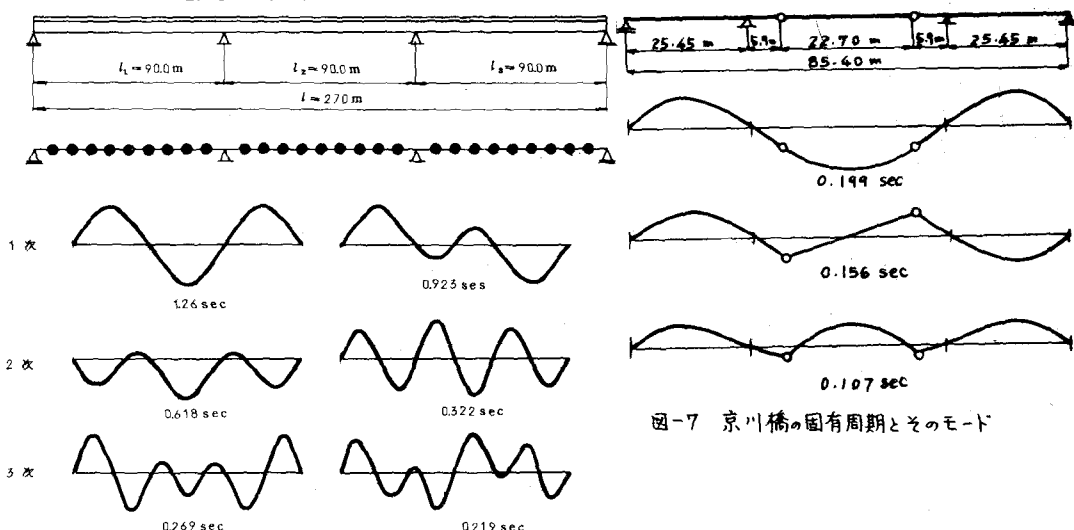
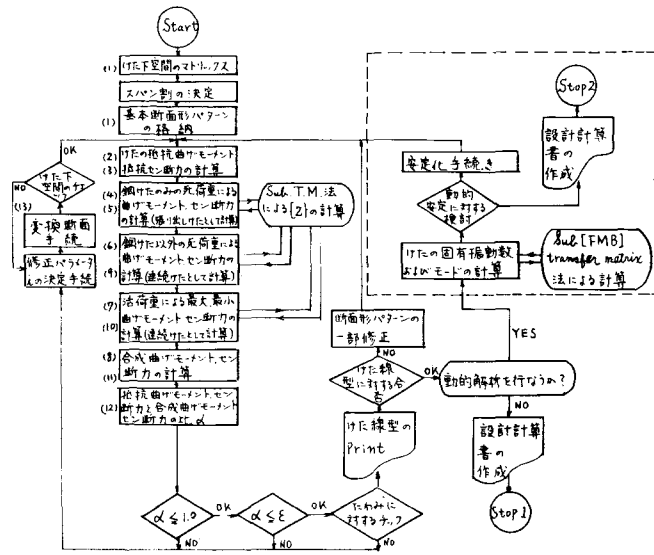
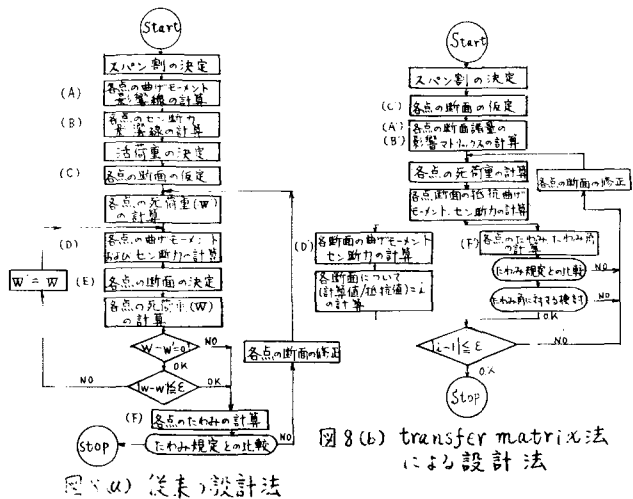
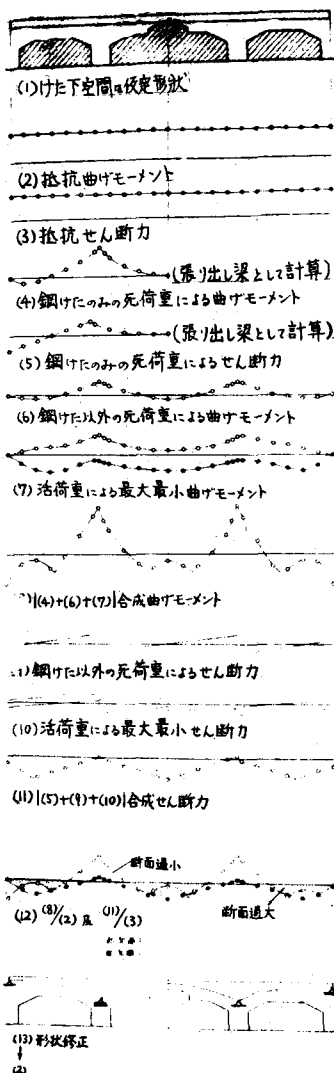


図-7 京川橋の固有周期とそのモード

図-6 新十三大橋の振動模型、固有周期とそのモード



参考文献

- 1) Kuhl, E. L. and Leckie, F. A.: "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill, New York, 1963.
- 2) Hurty, W. C. and Rubinstein, M. E.: "Dynamics of Structures", Prentice-Hall, Canada, 1964.
- 3) Thomson, W. T.: "Vibration Theory and Applications", Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
- 4) Okumura A.: On a Method of Analysis for Vibration and Stability Problems on Linear Mechanical Systems or Structures", Memories of the School of Science and Engineering, Waseda Univ. No. 21, 1957.
- 5) 柴田 碧: "マトリクス構造解析法講座 I" JSSC. vol. 3, No. 24 1967 and vol. 4 No. 26, 1968.
- 6) 山田善一, 小堀為雄: "けた橋と固有振動周期とその固有関数と求めるプログラムについて", 土木学会誌, 32-4, 1967.
- 7) Kersten, B.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Springer, 1962.
- 8) 小堀為雄, 吉田博: トラス橋の経済的高さとパネル数について, 金沢大学工学部紀要 vol. 4, No. 1, 昭 40