

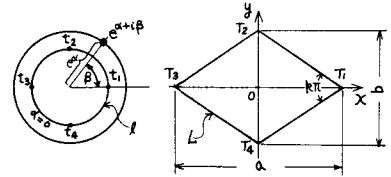
任意形状板の曲げ

九州大学工学部 山崎徳也
〇後藤恵之輔

1.序 本研究は任意形状板の曲げも Muskhelishvili の複素変数法¹⁾ によって論ずるものであるが、解法の鍵となる写像函数決定には Heller らが 2 次元問題に適用した写像法²⁾ も拡張応用した。すなわち通常の等角写像法により正確な板領域をうることは困難であるゆえ、対象とする板の隅角部に適当な丸味を付けて、これも単位円内部に写像した後、比較的簡単な計算によりたわみ、モーメントなどの諸値をうるもので、これらは隅角部の丸味も出来る限り小さくすることにより、本来の完全な直線辺で隅に丸味がない板の値にいくらかでも近づけうる。なお、写像函数決定の際に生ずる非線型多元連立方程式の解は電子計算機も利用することにより初めてえられるものであり、電子計算機の効用に依存する内題の一つである。

本論文では満載等分布荷重および中央集中荷重もうける周辺単純支持の菱形板について解説することとし、算例として周辺固定および周辺単純支持の菱形板、正方形板および正八角形板の中央点におけるたわみ、モーメントを求め、既往の解と比較検討した。

2.写像函数 図-1 に示すごとく Z-面上の原点に中心をも有する幅 a、高さ b の菱形 L が r-面上の単位円 Q に、また L の内部が Q の内部にそれぞれ等角写像されるものとし、かつ L 上の頂点 $T_1 \sim T_4$ が Q 上の点 $t_1 \sim t_4$ に相对应するものとしたうで、 $S_{t_1} = -S_{t_3}$, $S_{t_2} = -S_{t_4}$ と円周上に排れず、Schwarz-Christoffel の変換公式により次式が成立する。



S-Plane ($S = e^{\alpha + i\beta}$) Z-Plane ($Z = x + iy$)

図-1

$$Z = \lambda \int_0^S (1 + \zeta^2)^k (1 - \zeta^2)^{k-1} d\zeta \dots \dots \dots (1)$$

ここに $Z = x + iy$, $\zeta = e^{\alpha + i\beta}$, (x, y) : 直角座標, (α, β) : 直交曲線座標, λ : Z-面と r-面とのスケール比。

式(1)の積分も直接行うことは困難であるゆえ、被積分函数も級数に展開する手法を採る。すなわち、

$$Z = \lambda \int_0^S (1 + \alpha_2 \zeta^2 + \alpha_4 \zeta^4 + \alpha_6 \zeta^6 + \alpha_8 \zeta^8 + \dots) d\zeta$$

ここに $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$ は k の函数

上式より直ちに次式がえられる。

$$Z = \lambda (\zeta + \frac{\alpha_2}{3} \zeta^3 + \frac{\alpha_4}{5} \zeta^5 + \frac{\alpha_6}{7} \zeta^7 + \frac{\alpha_8}{9} \zeta^9 + \dots) \dots \dots \dots (2)$$

式(2)が所要の写像函数であり、無限級数によって Z-面上の完全な直線辺で隅に丸味がない菱形板領域も r-面上の単位円内部に写像する。しかし実際問題として無限項を採ることは煩雑を招来し、また有限項で打ち切れば項数とえられる図形との関係が明確でないゆえ、本論文では 2 次元問題において矩形孔を単位円に写像する Heller らの手法も拡張応用した。すなわち、式(2)の有限項を採り、その項数および係数を変化させることによって直線辺で隅に任意の曲率半径をも有する菱形板を写像することができ、したがってかかる板形状に適した写像函数が次式のごとくえられることとなる。

$$Z = \omega(\zeta) = A\zeta + B\zeta^3 + C\zeta^5 + D\zeta^7 + E\zeta^9 + \dots (\text{有限}) \dots \dots (3)a \quad \text{あるいは} \quad Z = \sum_{n=1,3,5}^N a_n \zeta^n \dots \dots (3)b$$

ここに $a_1 = A, a_3 = B, a_5 = C, a_7 = D, a_9 = E, \dots$ で N は整数である。

3. 写像函数の係数の決定 式(3)_aを展開し実数部と虚数部とをそれぞれ等置して $\alpha=0$ とすれば板境界も定義する次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \beta + B \cos 3\beta + C \cos 5\beta + D \cos 7\beta + E \cos 9\beta + \dots \\ y &= A \sin \beta + B \sin 3\beta + C \sin 5\beta + D \sin 7\beta + E \sin 9\beta + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

式(4)中の係数 $A, B, C, \dots$ は実際の板形状もなるべく正確に表わすべく決定しなければならないが、本論文では8個の値 $A \sim H$ も決定し計算には5個の値 $A \sim E$ も用いることとする。係数決定の条件は式(4)で定義される曲線が任意の曲率半径を有する菱形板の境界上の一連の点も通過すること、これらの点も図-2に示すが、各点の座標値は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.1x + r; & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.1x + r \cos \theta_2; & y_2 &= r \sin \theta_2 \\ x_3 &= \frac{1}{5}(4U_x + V_x); & y_3 &= \frac{1}{5}(4U_y + V_y) \\ x_4 &= \frac{1}{5}(3U_x + 2V_x); & y_4 &= \frac{1}{5}(3U_y + 2V_y) \\ x_5 &= \frac{1}{5}(2U_x + 3V_x); & y_5 &= \frac{1}{5}(2U_y + 3V_y) \\ x_6 &= \frac{1}{5}(U_x + 4V_x); & y_6 &= \frac{1}{5}(U_y + 4V_y) \\ x_7 &= r \cos \theta_7; & y_7 &= 0.2y + r \sin \theta_7 \\ x_8 &= 0; & y_8 &= 0.2y + r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

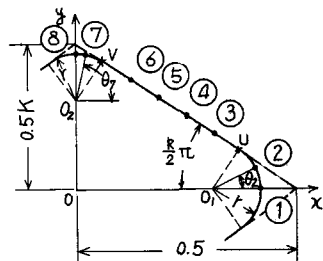


図-2

ただし $0.1x = 0.5 - r \cos \theta_2 \frac{\pi}{2}, 0.2y = 0.5K - r \sin \theta_7 \frac{\pi}{2}$

$U_x = 0.1x + r \sin \frac{\pi}{2}; U_y = r \cos \frac{\pi}{2}, V_x = r \sin \frac{\pi}{2}; V_y = 0.2y + r \cos \frac{\pi}{2}$

ここに板は計算の便宜のため、もとの隅に丸味がない菱形が単位幅 $a=1$ となるごとき形状とし、高さ $b=K$ で隅半径は r とする。対称性により $\beta_1 = 0, \beta_8 = \pi/2$ となる。式(5)も式(4)に代入して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A \cos \beta_m + B \cos 3\beta_m + C \cos 5\beta_m + D \cos 7\beta_m + E \cos 9\beta_m + F \cos 11\beta_m + G \cos 13\beta_m + H \cos 15\beta_m &= x_m \\ A \sin \beta_m + B \sin 3\beta_m + C \sin 5\beta_m + D \sin 7\beta_m + E \sin 9\beta_m + F \sin 11\beta_m + G \sin 13\beta_m + H \sin 15\beta_m &= y_m \\ A - B + C - D + E - F + G - H &= y_8 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ここに $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

式(6)には8個の未定係数 $A \sim H$ と6個の未知量 $\beta_2 \sim \beta_7$ が含まれている。式(6)の非線型14元連立方程式も直接解くことは困難であるゆえ、本論文ではNewtonの反復解法によって解くこととする。

式(6)のオ1式と最後の式とも A, B について解けば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(x_1 + y_8) - C - E - G \\ B &= \frac{1}{2}(x_1 - y_8) - D - F - H \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

式(7)も式(6)のオ2およびオ3式に代入整理すれば次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} C(\cos 5\beta_m - \cos \beta_m) + D(\cos 7\beta_m - \cos 3\beta_m) + E(\cos 9\beta_m - \cos \beta_m) + F(\cos 11\beta_m - \cos 3\beta_m) \\ + G(\cos 13\beta_m - \cos \beta_m) + H(\cos 15\beta_m - \cos 3\beta_m) + \frac{1}{2}(x_1 + y_8)\cos \beta_m + \frac{1}{2}(x_1 - y_8)\cos 3\beta_m - x_m &= 0 \\ C(\sin 5\beta_m - \sin \beta_m) + D(\sin 7\beta_m - \sin 3\beta_m) + E(\sin 9\beta_m - \sin \beta_m) + F(\sin 11\beta_m - \sin 3\beta_m) \\ + G(\sin 13\beta_m - \sin \beta_m) + H(\sin 15\beta_m - \sin 3\beta_m) + \frac{1}{2}(x_1 + y_8)\sin \beta_m + \frac{1}{2}(x_1 - y_8)\sin 3\beta_m - y_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

ここに $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

C~H および β_m の第1近似値を既知と仮定して式(8)の各式の左辺もそれぞれ f_m, g_m と定義すれば、函数 f_m および g_m は0に等しくなければならない。もし0に等しくなければ各仮定値に必要な修正値 $\Delta C \sim \Delta H$ および $\Delta \beta_m$ が次式で関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_m}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial f_m}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial f_m}{\partial E} \Delta E + \frac{\partial f_m}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial f_m}{\partial G} \Delta G + \frac{\partial f_m}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial f_m}{\partial \beta_m} \Delta \beta_m + f_m &= 0 \\ \frac{\partial g_m}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial g_m}{\partial D} \Delta D + \frac{\partial g_m}{\partial E} \Delta E + \frac{\partial g_m}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial g_m}{\partial G} \Delta G + \frac{\partial g_m}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial g_m}{\partial \beta_m} \Delta \beta_m + g_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに $m=2, 3, 4, 5, 6, 7$

式(9)の線型連立方程式も解くことにより修正値 $\Delta C \sim \Delta H$ および $\Delta \beta_m$ が決定され、したがって第2近似値がえられることとなる。これら諸値を用いて $f_m, g_m \approx 0$ とないず、この第2近似値が未知量 C~H および β_m の正解値を与えるが、もし0とならなければ以上の操作も $f_m, g_m \approx 0$ まで反復計算さればよく、この計算は電子計算機で容易に、かつ自動的になされるものである。

なお、 θ_2 および θ_1 の値としてはそれぞれ $\pi/9, 5\pi/12$ を採る。

4. 基礎方程式 薄い均質等方性板の曲げに関する基礎微分方程式は周知のごとく次式で表わされる。

$$\Delta \Delta w = q/D_f \dots\dots\dots (10) \quad \text{ここに } w, q, D_f \text{ はそれぞれ板のたわみ, 横荷重および板の曲げ剛性}$$

式(10)の特解を w_p とすればこれは次式で与えられる。

$$w_p = \frac{1}{16 D_f} \{ \int \int \int q \, dZ \, dZ \, dZ \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{式(10)の一般解 } w \text{ は } w_c \text{ を重調和函数として次式のごとくなる。} \quad w = w_c + w_p \dots\dots\dots (12)$$

しかるに重調和函数 w_c は2つの未知解析函数 $\varphi(z), \psi(z)$ を用いて次式のごとく表わされる。

$$w_c = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi(z) + \chi(z)] \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{ここに } \bar{z} = x - iy \text{ で } \chi(z) \text{ は次式で与えられるものである。} \quad \chi(z) = \int \psi(z) \, dZ \dots\dots\dots (14)$$

したがって問題は2つの未知解析函数 $\varphi(z), \psi(z)$ あるいは $\chi(z)$ も2つの与えられた境界条件より決定することに帰着する。

式(3)を上記の境界条件に代入すれば所要の $\varphi(z), \psi(z)$ がらのべき級数として次式のごとく決定される。

$$\varphi(z) = \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n \dots\dots\dots (15)_a \quad \psi(z) = \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n \dots\dots\dots (15)_b$$

ここに b_n, c_n は一般に係数比較法により決定される複素数係数である。したがって $\chi(z)$ も式(14)よりらのべき級数として次式のごとく表わされる。

$$\chi(z) = \chi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n \dots\dots\dots (15)_c$$

5. 周辺単純支持菱形板の曲げ問題の一般解 この場合の境界条件は次式で与えられる。

$$w = \Delta w = 0 \quad \text{along contour } L \dots\dots\dots (16)$$

式(12)と式(16)より次式をうる。

$$w_c = -w_p, \quad \Delta w_c = -\Delta w_p \quad \text{along contour } L \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{一方, 式(13)より} \quad \Delta w_c = 2 \{ \mathcal{I}(z) + \overline{\mathcal{I}(z)} \} \dots\dots\dots (18)$$

ここに $\overline{\mathcal{I}(z)}$ は $\mathcal{I}(z)$ の共轭数で $\mathcal{I}(z)$ は次式で与えられるものである $\mathcal{I}(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} \dots\dots\dots (19)$

であるゆえ、この $\mathcal{I}(z)$ に式(3)の $z = \omega(s)$ を代入すれば $\mathcal{I}(z)$ はらの解析函数 $\mathcal{U}(s)$ となりらのべき級数として次式のごとく表わされる。

$$\mathcal{I}(z) = \mathcal{U}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n s^n \dots\dots\dots (20)$$

式(18)も境界条件式(17)の第2式に代入すれば、結局 contour L に対応する単位円 $s = e^{i\theta}$ 上で次式

が成立することとなる。

$$U(\sigma) + \overline{U(\sigma)} = -\frac{1}{2} (\Delta W_F)_{Z=U(\sigma)} \quad \dots\dots\dots (21) \quad \text{ここに } \overline{U(\sigma)} \text{ は } U(\sigma) \text{ の共軛数}$$

式(21)に式(20)を代入し、さらに

$$-\frac{1}{2} (\Delta W_F)_{Z=U(\sigma)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \sigma^n \quad \dots\dots\dots (22)$$

とわいて変形整理すれば未定係数 k_n を決定する線型方程式が次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{1}{2} B_0 \\ k_m &= B_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

一方、 $X(Z) = \chi(\zeta)$ は次のごとく求められる。すなわち、式(17)の第1式に式(13)を代入し、さらに式(3)aを考慮すれば次式がえられる。

$$\overline{w(\sigma)} \varphi(\sigma) + w(\sigma) \overline{\varphi(\sigma)} + \chi(\sigma) + \overline{\chi(\sigma)} = -2(W_F)_{Z=w(\sigma)} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに $\overline{w(\sigma)}$, $\overline{\varphi(\sigma)}$, $\overline{\chi(\sigma)}$ はそれぞれ $w(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$, $\chi(\sigma)$ の共軛数

式(24)に式(3)b, 式(15)aおよび式(15)cを代入し、さらに

$$-2(W_F)_{Z=w(\sigma)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \sigma^n \quad \dots\dots\dots (25)$$

とわいて変形整理すれば未定係数 d_n を決定する線型方程式が次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} 2d_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= C_0 \\ d_m + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_{m+n} + a_{m+n} b_n) &= C_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

次に式(23)および式(26)を用いて満載等分布荷重および中央集中荷重をうける場合の解析函数 $U(\zeta)$ あるいは $\varphi(\zeta)$, $\chi(\zeta)$ を求めることとする。

(1) 満載等分布荷重 q_0 をうける場合 かかる負荷に対する式(10)の特解 W_F は式(11)より直ちに次式のごとく決定される。

$$W_F = \frac{q_0}{64 D_F} Z^2 \bar{Z}^2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

したがって式(22)は次式のごとくになる。 $-\frac{1}{2} (\Delta W_F)_{Z=U(\sigma)} = \sum_{n=-8, -6, -4}^8 B_n \sigma^n \quad \dots\dots\dots (28)$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } B_0 &= -2(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2)\mu, \quad B_2 = B_{-2} = -2(AB + BC + CD + DE)\mu \\ B_4 &= B_{-4} = -2(AC + BD + CE)\mu, \quad B_6 = B_{-6} = -2(AD + BE)\mu, \quad B_8 = B_{-8} = -2AE\mu \\ &\text{ただし } \mu = q_0/16 D_F \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって式(29)も式(23)に代入することにより所要の $U(\zeta)$ が次式のごとく決定される。

$$U(Z) = U(\zeta) = \sum_{n=0, 2, 4}^8 k_n \zeta^n \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } k_0 &= -(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2)\mu, \quad k_2 = -2(AB + BC + CD + DE)\mu \\ k_4 &= -2(AC + BD + CE)\mu, \quad k_6 = -2(AD + BE)\mu, \quad k_8 = -2AE\mu \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\Phi(Z) = \varphi(\zeta) \text{は式(19)より} \quad \varphi(\zeta) = \int U(\zeta) w'(\zeta) d\zeta \quad \dots\dots\dots (32)$$

であるゆえ、式(32)に式(30)および式(3)aを代入整理すれば所要の $\varphi(\zeta)$ が次式のごとく決定される。

$$\Phi(Z) = \varphi(\zeta) = \sum_{n=1, 3, 5}^{17} b_n \zeta^n \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } b_1 &= A k_0, \quad b_3 = \frac{1}{3}(A k_2 + 3 B k_0), \quad b_5 = \frac{1}{5}(A k_4 + 3 B k_2 + 5 C k_0) \\ b_7 &= \frac{1}{7}(A k_6 + 3 B k_4 + 5 C k_2 + 7 D k_0), \quad b_9 = \frac{1}{9}(A k_8 + 3 B k_6 + 5 C k_4 + 7 D k_2 + 9 E k_0) \\ b_{11} &= \frac{1}{11}(3 B k_8 + 5 C k_6 + 7 D k_4 + 9 E k_2), \quad b_{13} = \frac{1}{13}(5 C k_8 + 7 D k_6 + 9 E k_4) \\ b_{15} &= \frac{1}{15}(7 D k_8 + 9 E k_6), \quad b_{17} = \frac{1}{17} \cdot 9 E k_8 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

式(27)より式(25)が直ちに次式のごとく表わされる。

$$-2(W_F)_Z = \omega(\sigma) = \sum_{n=0,2,4,6,8}^{16} C_n \sigma^n \dots\dots\dots (35)$$

ここに

$$\begin{aligned} C_0 &= -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_6^2 + \varepsilon_8^2 + \varepsilon_{10}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{14}^2 + \varepsilon_{16}^2 + \varepsilon_{18}^2) \\ C_2 &= C_{12} = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_4 + \varepsilon_4 \varepsilon_6 + \varepsilon_6 \varepsilon_8 + \varepsilon_8 \varepsilon_{10} + \varepsilon_{10} \varepsilon_{12} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{14} + \varepsilon_{14} \varepsilon_{16} + \varepsilon_{16} \varepsilon_{18}) \\ C_4 &= C_4 = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_6 + \varepsilon_4 \varepsilon_8 + \varepsilon_6 \varepsilon_{10} + \varepsilon_8 \varepsilon_{12} + \varepsilon_{10} \varepsilon_{14} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{16} + \varepsilon_{14} \varepsilon_{18}) \\ C_6 &= C_6 = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_8 + \varepsilon_4 \varepsilon_{10} + \varepsilon_6 \varepsilon_{12} + \varepsilon_8 \varepsilon_{14} + \varepsilon_{10} \varepsilon_{16} + \varepsilon_{12} \varepsilon_{18}) \\ C_8 &= C_8 = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_{10} + \varepsilon_4 \varepsilon_{12} + \varepsilon_6 \varepsilon_{14} + \varepsilon_8 \varepsilon_{16} + \varepsilon_{10} \varepsilon_{18}), C_{10} = C_{10} = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_{12} + \varepsilon_4 \varepsilon_{14} + \varepsilon_6 \varepsilon_{16} + \varepsilon_8 \varepsilon_{18}) \\ C_{12} &= C_{12} = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_{14} + \varepsilon_4 \varepsilon_{16} + \varepsilon_6 \varepsilon_{18}), C_{14} = C_{14} = -\mu/2 \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon_{16} + \varepsilon_4 \varepsilon_{18}), C_{16} = C_{16} = -\mu/2 \cdot \varepsilon_2 \varepsilon_{18} \end{aligned} \dots\dots\dots (36)$$

ただし $\varepsilon_2 = A^2, \varepsilon_4 = 2AB, \varepsilon_6 = B^2 + 2AC, \varepsilon_8 = 2(AD+BC), \varepsilon_{10} = 2AE + C^2 + 2BD$
 $\varepsilon_{12} = 2(BE+CD), \varepsilon_{14} = D^2 + 2CE, \varepsilon_{16} = 2DE, \varepsilon_{18} = E^2$

したがって式(36)を式(26)に代入し、さらに式(3)も考慮することにより所要の $\chi(\zeta)$ が次式のごとく決定される。

$$\chi(\zeta) = \chi(\zeta) = \sum_{n=0,2,4}^{16} d_n \zeta^n \dots\dots\dots (37)$$

ここに

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{2} \{ C_0 - 2(Ab_1 + Bb_3 + Cb_5 + Db_7 + Eb_9) \}, d_2 = C_2 - \{ Bb_1 + (A+C)b_3 + (B+D)b_5 + (C+E)b_7 + Db_9 + Eb_{11} \} \\ d_4 &= C_4 - \{ Cb_1 + Db_3 + (A+E)b_5 + Bb_7 + Cb_9 + Db_{11} + Eb_{13} \}, d_6 = C_6 - \{ Db_1 + Eb_3 + Ab_7 + Bb_9 + Cb_{11} + Db_{13} + Eb_{15} \} \\ d_8 &= C_8 - \{ Eb_1 + Ab_3 + Bb_5 + Cb_7 + Db_9 + Eb_{11} \}, d_{10} = C_{10} - \{ Ab_1 + Bb_3 + Cb_5 + Db_7 \} \\ d_{12} &= C_{12} - \{ Ab_{13} + Bb_{15} + Cb_{17} \}, d_{14} = C_{14} - \{ Ab_{15} + Bb_{17} \}, d_{16} = C_{16} - Ab_{17} \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

(2) 中央集中荷重 P もうける場合 かかる負荷に対する式(10)の特解 W_F は次式で与えられる³⁾

$$W_F = -\frac{P}{16\pi D_3} \left[2\bar{z} \log \frac{1}{\bar{z}} + \bar{z} \left\{ \frac{2}{3} d_3 + z \left\{ \frac{\bar{z}}{3} d_3 \right\} \right\} \right] \dots\dots\dots (39)$$

式(39)より式(22)は次式のごとくなる。 $-\frac{1}{2}(\Delta W_F)_{Z=\omega(\sigma)} = 0 \dots\dots\dots (40)$

したがって式(40)、式(23)および式(32)により所要の $\psi(\zeta)$ が次式のごとく決定される。

$$\psi(\zeta) = \psi(\zeta) = 0 \dots\dots\dots (41)$$

$\chi(\zeta) = \chi(\zeta)$ は満載等分布荷重もうける場合と全く同様にして求められる。すなわち式(26)において $b_n = 0$ とすればよく、したがって所要の $\chi(\zeta)$ が次式のごとく決定される。

$$\chi(\zeta) = \chi(\zeta) = \sum_{n=0,2,4}^8 d_n \zeta^n \dots\dots\dots (42)$$

ここに $d_0 = \frac{1}{2} C_0$
 $d_n = C_n (n=2,4,6,8)$ } (43)

であり、 $C_n (n=0,2,4,6,8)$ は式(39)を式(35)に代入して次式のごとく求められるものである。

$$\begin{aligned} C_0 &= 2(A^2 + \frac{B^2}{3} + \frac{C^2}{5} + \frac{D^2}{7} + \frac{E^2}{9})K \\ C_2 &= 2(\frac{2}{3}AB + \frac{4}{5}BC + \frac{6}{7}CD + \frac{8}{9}DE)K \\ C_4 &= 2(\frac{2}{3}AC + \frac{4}{5}BD + \frac{6}{7}CE)K \\ C_6 &= 2(\frac{2}{3}AD + \frac{4}{5}BE)K \\ C_8 &= 2\frac{2}{3}AEK \end{aligned} \dots\dots\dots (44)$$

ただし $K = P/8\pi D_3$

6. 計算例

(1) 菱形板 内角 $\kappa\pi = 90^\circ, 80^\circ,$

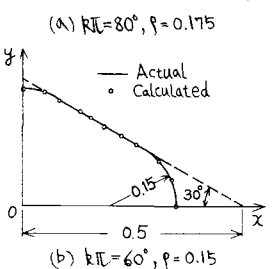
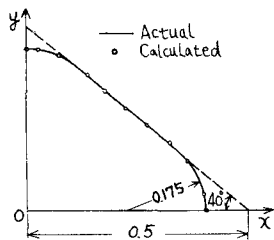
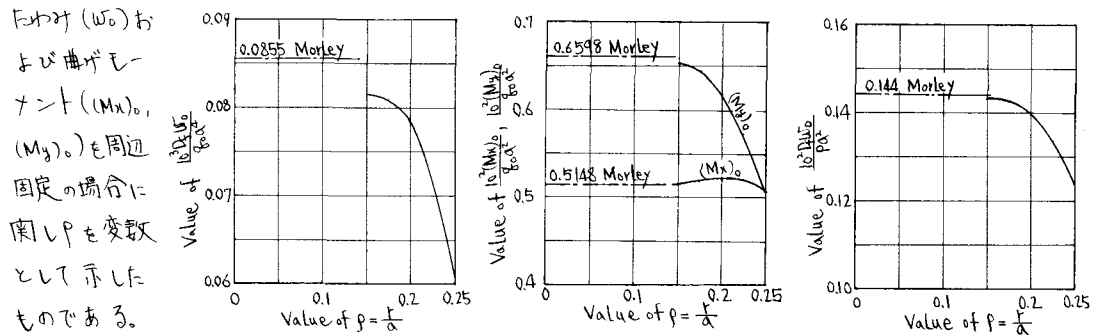


図-3 実際の板形状と想像された板形状との比較(菱形板)

表-1 菱形板の想像函数の係数

κπ	K = $\frac{p}{8\pi D_3}$	$P = \frac{p}{8\pi D_3}$	A	B	C	D	E
90°	1	.35353	.35353	0	0	0	0
		.325	.36989	+0.00119	+0.00529	+0.00015	-0.01523
		.300	.365796	+0.00014	+0.11017	-0.00001	-0.01156
		.250	.37390	+0.00019	+0.21933	+0.00002	+0.01443
		.200	.37834	+0.00008	+0.30966	+0.00005	+0.07173
		.175	.379466	-0.00004	+0.34230	-0.00004	+0.09394
80°	.839100	.321394	.321394	0	0	0	0
		.300	.327534	+0.003083	+0.03662	-0.00735	-0.01131
		.250	.337133	+0.008718	+0.15410	+0.02479	-0.00124
		.200	.343412	+0.011801	+0.25935	+0.02777	+0.00485
		.175	.345144	+0.012498	+0.29746	+0.03850	+0.007814
70°	.700208	.286788	.286788	0	0	0	0
		.250	.297615	+0.010435	+0.07629	-0.01127	-0.00800
		.200	.306407	+0.019419	+0.20509	+0.03072	+0.002106
		.175	.308716	+0.021676	+0.25673	+0.05719	+0.005624
60°	.577350	.250000	.250000	0	0	0	0
		.225	.257773	+0.011579	+0.004962	-0.01351	-0.000206
		.200	.266280	+0.020606	+0.12344	+0.000556	-0.000087
		.150	.272392	+0.024453	+0.23595	+0.08205	+0.007497

70°, 60°の菱形板に関して半径比 $p = r/a$ の種々の値に対する写像函数の係数値を表-1に示すが、この値も式(4)に代入することによって写像される菱形板の境界は図-3のごとくである。図に見るごとく極めて正確な図形がえられ、これより本写像法が高精度のものであることが認められる。満載等分布荷重も受ける場合には表-1の値も式(33)および式(37)に、中央集中荷重も受ける場合には式(41)および式(42)にそれぞれ代入計算すれば、解析函数 $q(s)$, $\chi(s)$ の係数値が決定され、さらにこの値を用いて板のたわみおよびモーメントが求められる。図-4は以上の計算によってえられた板中央点の



図より容易に判断されるごとく、中央点のたわみおよび曲げモーメントは p の値の如何にかかわらず、すなわち隅角部の丸味がかなり変化してもさ程大きく変わることなく、 $p = 0.15$ での値と隅に丸味が無い菱形板($p = 0$)に対する Morley の解(図中、一点鎖線)との差異は、満載等分布荷重時の W_0 , $(M_x)_0$ および

図-4 周辺固定の場合の中央たわみおよび中央曲げモーメント, $R/L = 60^\circ$

表-2 菱形板の中央たわみおよび中央曲げモーメント

α=0°							α=90°						
載荷条件 (R/L)		内角条件		境界条件		文南大	載荷条件 (R/L)		内角条件		境界条件		文南大
U	80°	F	0.20835	0.90939	0.98254	著者 (P=0.175)	C	80°	F	0.23170	著者 (P=0.175)		
		S.S.	0.67733	1.8824	2.0254				S.S.	0.47493			
		F	0.2178	0.9112	0.9866				F	0.233	Morley ⁽⁴⁾		
		S.S.	0.702	—	—				S.S.	0.4800	Aggarwala ⁽⁵⁾		
	70°	F	0.13534	0.70020	0.81575	著者 (P=0.175)	C	70°	F	0.18570	著者 (P=0.175)		
		S.S.	0.43797	1.4596	1.6807				S.S.	0.38088			
		F	0.1417	0.7005	0.8234				F	0.187	Morley ⁽⁴⁾		
		S.S.	—	—	—				S.S.	0.3868	Aggarwala ⁽⁵⁾		
	60°	F	0.080916	0.51482	0.65287	著者 (P=0.150)	C	60°	F	0.14318	著者 (P=0.150)		
		S.S.	0.27053	1.0958	1.3694				S.S.	0.29696	Morley ⁽⁴⁾		
		F	0.0855	0.5148	0.6598				F	0.144	Morley ⁽⁴⁾		
		S.S.	0.285	—	—				S.S.	0.3000	Aggarwala ⁽⁵⁾		

メントはPの値の如何にかかわらず、すなわち隅角部の丸味がかなり変化してもさ程大きく変わることなく、P=0.15での値と隅に丸味がない菱形板(P=0)に対するMorleyの解 ⁽⁴⁾ (図中、一点鎖線)との差は、満載等分布

<Note> U: 満載等分布荷重, C: 中央集中荷重, F: 周辺固定, S.S.: 周辺単純支持

荷重時の W_0 , $(M_x)_0$ および

$(M_y)_0$ でそれぞれ5.4%, 0%, 1.0%であり、同じく中央集中荷重時の W_0 で0.7%である。図みに菱形板の中央点におけるたわみおよび曲げモーメントを内角 R , 載荷条件および境界条件に関して示せば表-2のごとくなる。

(2) 正方形板 この場合の写像函数は板形状の対称性により次式のごとくなる。

$$Z = w(s) = AS + BS^5 + CS^9 + DS^{13} + ES^{17} + \dots \quad (45)$$

式(45)中の係数 $A \sim F$ も決定するに必要な条件は図-5に示るごとき点も通過することで、各点の座標値は次式で与えられる。

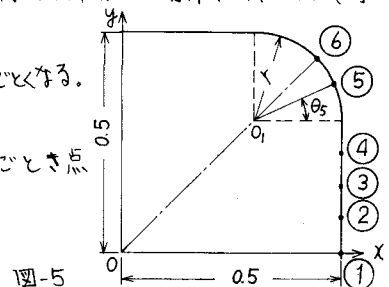


図-5

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.5; & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.5; & y_2 &= \frac{1}{4} 0.5 \\ x_3 &= 0.5; & y_3 &= \frac{1}{2} 0.5 \\ x_4 &= 0.5; & y_4 &= \frac{3}{4} 0.5 \\ x_5 &= 0.5 + r \cos \theta_5; & y_5 &= 0.5 + r \sin \theta_5 \\ x_6 &= 0.5 + r/\sqrt{2}; & y_6 &= 0.5 + r/\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

$$E \text{ 及び } Q_{1x} = Q_{1y} = 0.5 - r, \theta_5 = \pi/6$$

式(45) および式(46)により決定される写像函数の係数値を半径比 $p = r/a$ を変数として表-3に示す。この値を用いて写像される正方形板の境界は図-6のごとく、極めて正確な図形がえられている。

図-7は板中央点のたわみ(w_0)および

曲げモーメント ($(M_x)_0 = (M_y)_0$) を周辺固定の場合に、 p も変数として示したもので、 $p = 0.20$ の値と隅に丸味がない正方形板 ($p=0$) に対する Timoshenko の解⁵⁾ (図中、一点鎖線) との差異は満載等分布荷重時の w_0 および $(M_x)_0$ で

それぞれ4.0%, 1.3%であり、同じく中央集中荷重時の w_0 で0.2%である。図中に正方形板の中央点におけるたわみおよび曲げモーメントを各荷重条件および境界条件に対して示せば表-4のごとくなる。

(3) 正八角形板 この場合の写像函数も正方形板の場合と同じく式(45)のごときなり、式中の係数 $A \sim H$ は図-8に示す点(各点の座標値は式(47)で与えられる)を通すべき条件により、半径比 p を変数として表-5のごとく決定される。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.5; & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 0.5; & y_2 &= \frac{1}{2} 0.5 \\ x_3 &= 0.5 + r \cos \theta_3; & y_3 &= 0.5 + r \sin \theta_3 \\ x_4 &= 0.5 + r \cos \theta_4; & y_4 &= 0.5 + r \sin \theta_4 \\ x_5 &= 0.5 + r \cos \theta_5; & y_5 &= 0.5 + r \sin \theta_5 \\ x_6 &= \frac{1}{2} (x_6 + 0.5/\sqrt{2}); & y_6 &= \frac{1}{2} (y_6 + 0.5/\sqrt{2}) \\ x_7 &= 0.5/\sqrt{2}; & y_7 &= 0.5/\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

E 及び

$$\begin{aligned} Q_{1x} &= 0.5 - r; & Q_{1y} &= (0.5 - r) \tan \pi/8 \\ U_x &= 0.5 + r/\sqrt{2}; & U_y &= 0.5 + r/\sqrt{2} \\ \theta_3 &= \pi/8, & \theta_4 &= \pi/4, & \theta_5 &= \pi/6 \end{aligned}$$

表-3 正方形板の写像函数の係数

$p = r/a$	A	B	C	D	E
500	500000	0	0	0	0
450	514395	-008924	-005984	-000965	+019445
425	518620	-015308	-004738	+000096	+001151
400	522333	-021137	-002215	+000639	+000893
375	525666	-026563	+000050	+000815	+000173
350	528449	-031687	+002560	+000651	-000143
325	531269	-036420	+005319	+000110	-000344
300	533496	-040784	+008294	-000888	-000374
275	535300	-044423	+011400	-002494	-000101
250	536671	-047487	+014407	-004533	+000698
225	537467	-049733	+017031	-006833	+002277
200	538114	-051244	+019799	-009769	+004239

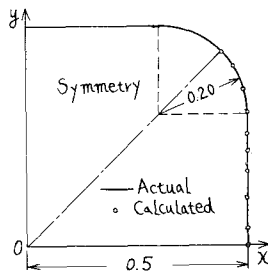
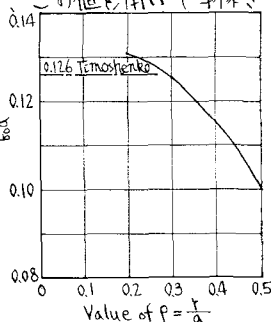


図-6 実際の板形状と写像された板形状との比較(正方形板)



(a) 満載等分布荷重

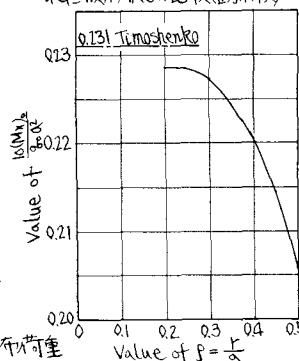
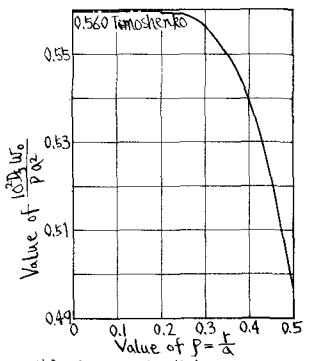


図-7 周辺固定の場合の中央たわみおよび中央曲げモーメント



(b) 中央集中荷重

表-4 正方形板の中央たわみおよび中央曲げモーメント

荷重条件	境界条件	$10^3 w_0/pa$	$10(M_x)_0/pa^2$	文庫	荷重条件	境界条件	$10^3 w_0/pa$	文庫
U	F	0.13105	0.22835	著者 ($p=0.20$)	C	F	0.55937	著者 ($p=0.20$)
	S.S.	0.40070	0.47545			S.S.	1.1544	
	F	0.126	0.231			F	0.560	
	S.S.	0.406	0.479			S.S.	1.160	
				Timoshenko ⁵⁾				Timoshenko ⁵⁾

(Note) U: 満載等分布荷重, C: 中央集中荷重, F: 周辺固定, S.S.: 周辺単純支持

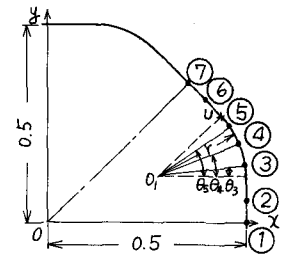
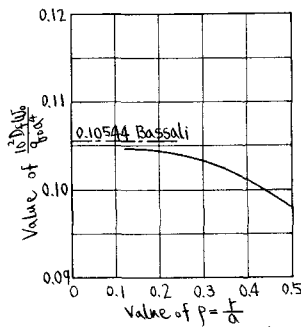


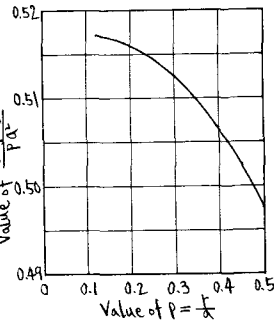
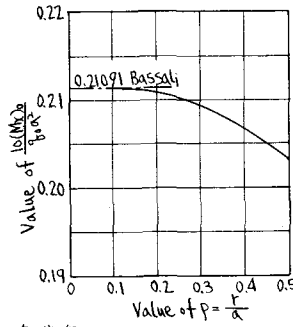
図-8

表-4の値を用いて写像される正八角形板の境界は図-9のごとく極めて正確な図形がえられている。

図-10は板中央点のたわみ(w_0)および曲げモーメント($(M_x)_0 = (M_y)_0$)を周辺固定の場合に同じ p を変数として示したもので、 $p=0.125$ におけるBassaliらの解との差異は、満載等分布荷重時の w_0 および $(M_x)_0$ でそれぞれ0.7%、0.1%である。表-2、表-4に対応して表-6も示す。



(a) 満載等分布荷重



(b) 中央集中荷重

図-10 周辺固定の場合の中央たわみおよび中央曲げモーメント

7. 結論 本論文は円形、楕円形、矩形など簡単な形状をも含めた任意形状板の解法を示したものであるが、本法の特徴を要約して述べれば次のごとくである。

(1) 対象とする板の写像函数さえ決定できれば、以後の計算は簡単かつ系統的である。

(2) 対象とする板の対称軸が多い程、少量の計算で高精度の写像函数がえられる。

(3) 対称軸が少なく、かつ比較的複雑な板形状であっても、写像函数の係数A, B, C, ... (式(3)参照)のオノ近似値を適切に与えることにより電子計算機を用いて非線型多元連立方程式を解くだけで比較的容易に写像函数を決定しうる。

なお、数値計算はすべて本学電子計算機OKITAC-5090Hによったことを付記する。

参考文献 1) N.I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 1963.

2) S.R. Helly, Jr., et al., Proc. 3rd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech., 1958. 3) B.D. Aggarwala, Quart. Jour. Mech. Appl. Mech., Vol. 19, 1966.

4) L.S.D. Morley, Quart. Jour. Mech. Appl. Math., Vol. 17, 1964. 5) S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959. 6) W.A. Bassali and F.R. Barsour, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 62, 1966.

7) B.D. Aggarwala, ZAMM, Bd. 34, 1954.

表-5 正八角形板の写像函数の係数

$p = \frac{1}{a}$	A	B	C	D	E
500	500000	0	0	0	0
475	501471	-0.00243	-0.00653	+0.00372	-0.00179
450	502623	-0.00442	-0.01189	+0.00142	-0.00464
425	503689	-0.00620	-0.02432	+0.00031	-0.00957
400	504684	-0.00812	-0.04071	-0.00018	-0.00574
375	505615	-0.00912	-0.05194	-0.00035	-0.00486
350	506486	-0.00982	-0.06311	-0.00034	-0.00325
325	507295	-0.000016	-0.07404	-0.00026	-0.00099
300	508035	-0.00009	-0.08475	-0.00016	+0.00195
275	508706	-0.00003	-0.09514	-0.00006	+0.00561
250	509292	-0.00001	-0.10510	+0.00003	+0.01008
225	509784	-0.00004	-0.11433	+0.00009	+0.01547
200	510177	-0.00005	-0.12233	+0.00011	+0.02185
175	510475	-0.00004	-0.12804	+0.00001	+0.02917
150	510694	-0.00003	-0.12932	+0.00009	+0.03726
125	510779	-0.00002	-0.127	+0.00005	+0.04670

図-9 実際の板形状と写像された板形状との比較(正八角形板)

表-6 正八角形板の中央たわみおよび中央曲げモーメント

載荷条件	境界条件	$10^4 W_0 / q a^4$	$10^4 (M_x)_0 / q a^2$	文献	載荷条件	境界条件	$10^4 W_0 / p a^2$	文献	
U	F	0.10466	0.21114	著者 ($p=0.125$)	C	F	0.51698	著者 ($p=0.125$)	
	S.S.	0.31935	0.42419			S.S.	1.0381		
	F	0.10544	0.21091	Bassali ⁶⁾		F	—	Aggarwal ⁷⁾	
	S.S.	0.3201	0.42500			S.S.	1.040		

<Note> U: 満載等分布荷重, C: 中央集中荷重, F: 周辺固定, S.S.: 周辺単純支持