

周辺で単純支持される無梁板の自由振動

山 崎 徳 也 *
橋 本 武 **

1 緒 言

矩形板について、周辺が単純支持される場合や一对辺が単純支持され他対辺が任意境界条件をもつ場合、周辺が固定される場合¹⁾、固定辺と自由辺を有する場合²⁾、一方向また二方向に連続する場合³⁾⁴⁾などの自由振動については既往研究があるが、無梁板のそれは未だ見当たらない。

本論文は、周辺で単純支持されかつ中間で任意配列したがって任意間隔に点支持される等方性等断面の矩形無梁板の自由振動の厳密解を、振動の基礎微分方程式を解くことにより求め、かゝる構造物の動力学解析ならびに設計に資せんとするものである。

2 解 法

(1) 規準函数の誘導

図-1に示すごとく、スパン a 、 b の矩形板において、辺 AB に沿って x 軸、辺 AC に沿って y 軸、紙面に直交して z 軸をもつ直交座標系 (x, y, z) を導入する。また、板は周辺で単純支持され、かつ中間にて任意配列の支点で単純に支持されているものとし、各支点に支点番号 $11, 12, \dots, 1r, 21, 22, \dots, 2r, \dots, ij, \dots, kl, \dots, r1, r2, \dots, rs$ を付す (図-1 参照)。

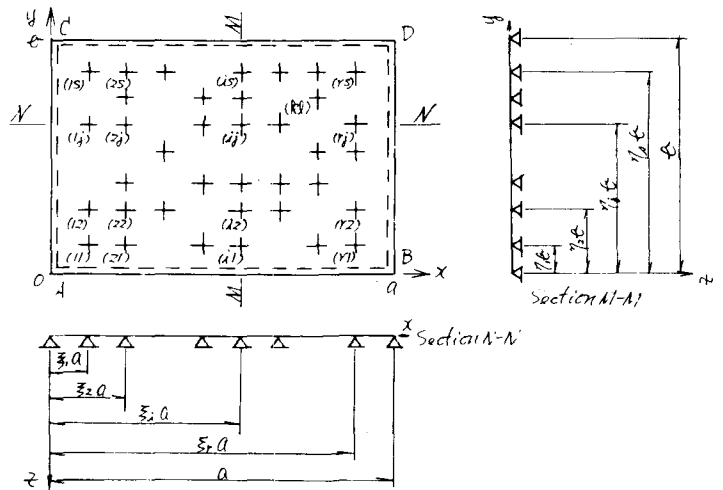


図 - 1

矩形板が振動すれば、当然各中間支点で z 軸方向の垂直反力を生ずるが、この反力は矩形板の振動変位を拘束する一種の強制力とみなすことができ、一般に支点の座標値 x, y と時間 t の函数であるから $q(x, y, z)$ と書き表わせば、本題の無梁板の自由振動の基礎微分方程式は、板の強制振動の基礎微分方程式と同じく次式で表わされる。

$$DV^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{こゝに } \nu^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$$

$$D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2) \text{ (板剛度)}$$

$$\rho : \text{板の密度,} \quad h : \text{板厚}$$

$$E : \text{板の弾性係数,} \quad \nu : \text{板のポアソン比}$$

$$w : \text{板の垂直変位}$$

式(1)の一般解は、その斉次方程式からえられる余函数を w_1 、特殊解を w_0 とすれば、両者の和で与えられる。

余函数 w_1 を次のごとく仮定する。

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1 \sin(\omega t + \varepsilon) \\ &= (X \sin N\pi\eta + Y \sin M\pi\xi) \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

こゝに w : 固有円振動数

$$\varepsilon : \text{初期位相角,} \quad \xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad M, N = 1, 2, \dots\dots$$

式(2)を式(1)の斉次方程式に代入すれば、次の2式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - 2 \left(\frac{N\pi}{b} \right)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \left\{ \left(\frac{N\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right\} X &= 0 \\ \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} - 2 \left(\frac{M\pi}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \left\{ \left(\frac{M\pi}{a} \right)^4 - \frac{\rho h}{D} \omega^2 \right\} Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

こゝで

$$\lambda^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 a^4 \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおけば、式(3)の一般解 X, Y は λ に対してそれぞれ3種類求まり、次式のごとくえられる。

X :

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{N\pi}{\mu} \right)^2 - \lambda^2 > 0 \text{ の場合}$$

$$X = A_x \sinh \bar{k}_1^1 \xi + B_x \cosh \bar{k}_1^1 \xi + C_x \sinh k_1 \xi + D_x \cosh k_1 \xi$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{N\pi}{\mu} \right)^2 - \lambda^2 = 0 \text{ の場合}$$

$$X = A_x + B_x \xi + C_x \sinh \frac{\sqrt{2}}{\mu} \pi \xi + D_x \cosh \frac{\sqrt{2}}{\mu} \pi \xi$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\frac{N\pi}{\mu} \right)^2 - \lambda^2 < 0 \text{ の場合}$$

$$X = A_x \sin \bar{k}_1^1 \xi + B_x \cos \bar{k}_1^1 \xi + C_x \sinh k_1 \xi + D_x \cosh k_1 \xi \quad \dots\dots\dots (5)$$

Y :

$$\textcircled{1} \quad (M\pi)^2 - \lambda^2 > 0 \text{ の場合}$$

$$Y = A_y \sinh \bar{k}_2^1 \eta + B_y \cosh \bar{k}_2^1 \eta + C_y \sinh k_2 \eta + D_y \cosh k_2 \eta$$

$$\textcircled{2} \quad (M\pi)^2 - \lambda^2 = 0 \text{ の場合}$$

$$Y = A_y + B_y \eta + C_y \sinh \sqrt{2} \pi \mu \eta + D_y \cosh \sqrt{2} \pi \mu \eta$$

$$\textcircled{3} \quad (M\pi)^2 - \lambda^2 < 0 \text{ の場合}$$

$$Y = A_y \sin \bar{k}_2^1 \eta + B_y \cos \bar{k}_2^1 \eta + C_y \sinh k_2 \eta + D_y \cosh k_2 \eta$$

$$\text{こゝに } \mu = b/a,$$

$$k_1 = \sqrt{\left(\frac{N\pi}{\mu}\right)^2 + \lambda^2}, \quad \bar{k}_1 = \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{N\pi}{\mu}\right)^2}, \quad \bar{k}_1^1 = \sqrt{\left(\frac{N\pi}{\mu}\right)^2 - \lambda^2}$$

$$k_2 = \mu \sqrt{(M\pi)^2 + \lambda^2}, \quad \bar{k}_2 = \mu \sqrt{\lambda^2 - (M\pi)^2}, \quad \bar{k}_2^1 = \mu \sqrt{(M\pi)^2 - \lambda^2}$$

$A_x \sim D_x$ および $A_y \sim D_y$ は積分定数

他方、単に周辺のみで単純支持される矩形板の自由振動に関して、周辺の境界条件を満足する変位 w を

$$w = A \sin M\pi \xi \sin N\pi \eta \sin(\omega t + \varepsilon)$$

を仮定するとき、固有直 $\lambda = \lambda_0$ は周知のごとく次式で与えられる。

$$\lambda_0^2 = \pi^2 \{ M^2 + (N/\mu)^2 \} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)における M, N は 1 またはそれより大なる自然数であるから、右辺 $\{ \}$ 内は次の不等式を満足する。

$$M^2 + (N/\mu)^2 > M^2 \quad \text{および} \quad M^2 + (N/\mu)^2 > (N/\mu)^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

不等式(7)の関係を式(6)に代入すれば、 λ_0^2 に関する次の不等式をうる。

$$(M\pi)^2 < \lambda_0^2 \quad \text{および} \quad (N\pi/\mu)^2 < \lambda_0^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

本題の無梁板は周辺が単純支持されたと同時に中間で点支持されるゆえ、単に周辺のみで単純支持される矩形板より構造的に剛であり、したがって、その固有値 λ の初期値は単純支持矩形板のそれより大きいかまたは等しいかのいずれかとなるのが容易に推定され、 λ に関して次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} (M\pi)^2 < \lambda_0^2 \leq \lambda^2 \quad \text{よって} \quad (M\pi)^2 - \lambda^2 < 0 \\ (N\pi/\mu)^2 < \lambda_0^2 \leq \lambda^2 \quad \text{よって} \quad (N\pi/\mu)^2 - \lambda^2 < 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(5)に示すごとく、無梁板の振動変位に関して、 X, Y それぞれ 3 種類の解がえられたが、不等式(9)の事実を考慮すれば、 X, Y ともに③の場合のみが物理的意義をもち、結局余函数 w_1 が次の 1 式のみで表わされることとなる。

$$\begin{aligned} w_1 = \{ & (A_x \sin \bar{k}_1 \xi + B_x \cos \bar{k}_1 \xi + C_x \sinh k_1 \xi \\ & + D_x \cosh k_1 \xi) \sin N\pi \eta + (A_y \sin \bar{k}_2 \eta + B_y \cos \bar{k}_2 \eta \\ & + C_y \sinh k_2 \eta + D_y \cosh k_2 \eta) \sin M\pi \xi \} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \dots\dots (10) \end{aligned}$$

次に、特殊解 w_0 を次のごとく誘導する。すなわち、中間支点 i, j の垂直反力を V'_{ij} とすれば、 V'_{ij} は一般に時間 t の函数であるが、板の変位 w がその全領域にわたって 0 である場合には当然ながら全ての支点反力が 0 であることから、 V'_{ij} は次式のごとく変位 w と同じ時間 t の周期函数で与えられる。

$$V'_{ij} = V_{ij} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{こゝに } i = 1, 2, \dots, \tau, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

式(11)の V_{ij} は反力 V'_{ij} の最大値であり、これを正弦フーリエ級数を用いて x および y 方向に二重展開すれば次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} \{V_{ij}\}_{SF} = \frac{4V_{ij}}{\mu a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \\ \times \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

こゝに、 $\xi_i = x_i/a$, $\eta_i = y_i/b$ であり、 (x_i, y_i) は中間支点 i, j の座標値である。また、 $\{ \}_{SF}$

は二重正弦フーリエ級数展開式を意味し、 $[FL^{-2}]$ の次元をもつ。

式(1)の $q(x, y, t)$ は板に作用する全強制力であり、本題の無梁板では中間支点反力の総和で与えられるゆえ、式(12)を式(11)に代入してえられる結果を、全ての i, j について加え合せれば、次式のごとく求められる。

$$q(x, y, t) = -\frac{4}{\mu a^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s V_{ij} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \\ \times \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \cdots \cdots (13)$$

(ただし、 V'_{ij} は上向きを正、 $q(x, y, t)$ は下向きを正とする)。

したがって、特殊解 w_0 として次式を仮定する。

$$w_0 = W_0 \sin(\omega t + \varepsilon) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \cdots \cdots (14)$$

ここに G_{mn} : 任意常数

式(13)および式(14)を式(1)に代入すれば、式(14)の任意常数 G_{mn} が求まり次式をうる。

$$G_{mn} = -\frac{4a^2}{\pi^2 \mu D} \cdot \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s V_{ij} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j}{\{(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2})^2 - (\frac{\lambda}{\pi})^4\}} \quad \cdots \cdots (15)$$

式(15)を式(14)に代入してえられる結果と式(10)とを加え合わせれば、式(1)の一般解 w したがって無梁板の規準函数 $W (=W_1 + W_0)$ が次のごとく求められる。

$$W = (A_x \sin \bar{k}_1 \xi + B_x \cos \bar{k}_1 \xi + C_x \sinh k_1 \xi \\ + D_x \cosh k_1 \xi) \sin N\pi \eta + (A_y \sin \bar{k}_2 \eta \\ + B_y \cos \bar{k}_2 \eta + C_y \sinh k_2 \eta + D_y \cosh k_2 \eta) \sin M\pi \xi \\ - \frac{4a^2}{\pi^4 \mu D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s V_{ij} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j}{\{(m^2 + \frac{n^2}{\mu^2})^2 - (\frac{\lambda}{\pi})^4\}} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \\ \cdots \cdots (16)$$

(2) 振動数方程式

本題の無梁板は周辺で単純支持されているから、周辺の境界条件は次式で表わされる。

$$x=0, a \text{ で}$$

$$w=0, M_x = -D(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2) = 0$$

$$y=0, b \text{ で}$$

$$w=0, M_y = -D(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu \partial^2 w / \partial x^2) = 0$$

規準函数 W として式(16)を用いるゆえ、上記境界条件は結局次のごとく書き換えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \xi=0, 1 \text{ で } X=0, \quad \partial^2 X / \partial \xi^2 = 0 \\ \eta=0, 1 \text{ で } Y=0, \quad \partial^2 Y / \partial \eta^2 = 0 \end{array} \right\} \quad \cdots \cdots (17)$$

式(16)を式(17)に代入すれば次のとき連立方程式をうる。

$$\left[\begin{array}{cc} \langle\langle K_0^1 \rangle\rangle & \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44} \\ \langle\langle 0 \rangle\rangle_{44} & \langle\langle K_0^2 \rangle\rangle \end{array} \right] \cdot \{ A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y \}^T = 0 \quad \cdots (18)$$

$$\begin{aligned}
 \langle\langle K_0^1 \rangle\rangle &= \begin{bmatrix} \sin \bar{k}_1 & \cos \bar{k}_1 & \sinh k_1 & \cosh k_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\bar{k}_1^2 \sin \bar{k}_1 & -\bar{k}_1^2 \cos \bar{k}_1 & k_1^2 \sinh k_1 & k_1^2 \cosh k_1 \\ 0 & -\bar{k}_1^2 & 0 & k_1^2 \end{bmatrix} \\
 \langle\langle K_0^2 \rangle\rangle &= \begin{bmatrix} \sin \bar{k}_2 & \cos \bar{k}_2 & \sinh k_2 & \cosh k_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\bar{k}_2^2 \sin \bar{k}_2 & -\bar{k}_2^2 \cos \bar{k}_2 & k_2^2 \sinh k_2 & k_2^2 \cosh k_2 \\ 0 & -\bar{k}_2^2 & 0 & k_2^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

また、 $\langle\langle 0 \rangle\rangle_{44}$ は 4 行 4 列の零行列である。

また、無梁板の振動時における中間支点 $k\ell$ の垂直変位を d'_{kl} とすれば、 d'_{kl} は一般に時間 t の関数であるが、板から中間支点 $k\ell$ に伝えられる垂直反力 V'_{kl} が 0 の場合には当然 d'_{kl} も 0 となり、 V'_{kl} と同じ時間 t の周期函数となる。よって、 d'_{kl} は次式のごとく表わされる。

$$d'_{kl} = d_{kl} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \cdots (19)$$

さらに、中間支点 $k\ell$ の垂直変位が作用反力に比例するものとし、その比例定数を γ_{kl} と記号表示すれば、式 (19) は次えとなる。

$$d'_{kl} = \gamma_{kl} V_{kl} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \cdots (20)$$

$$\text{よって } \gamma_{kl} = d_{kl} / V_{kl}$$

無梁板は中間支点で支持されているが、全支点で浮上り防止が施されているものとすれば、全ての支点位置における板のたわみ $w(\xi_k, \eta_l)$ が式 (20) に示す垂直変位 d'_{kl} に等しくなければならないことから、次のとき一連の変形条件式をうる。

$$W(\xi_k, \eta_l) - \gamma_{kl} V_{kl} = 0 \quad \cdots (21)$$

$$\text{よって } k = 1, 2, \dots, r$$

$$\ell = 1, 2, \dots, s$$

$$\xi_k = x_k / a, \quad \eta_l = y_l / b$$

式 (21) に式 (16) を代入すれば次のごとき連立方程式がえられる。

$$\left(\begin{array}{c} \text{Diagram: A triangle with dashed lines and vertices labeled } \langle\langle K_{kl}^1 \rangle\rangle \text{ and } \langle\langle K_{kl}^2 \rangle\rangle \\ \langle\langle K_{kl}^1 \rangle\rangle \quad \langle\langle K_{kl}^2 \rangle\rangle \end{array} \right) \begin{array}{ccccccc} H_{11}^{11} + \delta_{11} & H_{12}^{11} & \cdots & H_{kl}^{11} & \cdots & H_{rs}^{11} \\ H_{11}^{12} & H_{12}^{12} + \delta_{12} & \cdots & H_{kl}^{12} & \cdots & H_{rs}^{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{11}^{kl} & H_{12}^{kl} & \cdots & H_{kl}^{kl} + \delta_{kl} & \cdots & H_{rs}^{kl} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{11}^{rs} & H_{12}^{rs} & \cdots & H_{kl}^{rs} & \cdots & H_{rs}^{rs} + \delta_{rs} \end{array} \right)$$

$$\cdot \{ A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y,$$

$$V_{11}, V_{12}, \dots, V_{kl}, \dots, V_{rs} \}^T = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\text{よって } V_{kl} = -\frac{4a^2}{\mu^4 \pi D} V_{kl}, \quad \delta_{kl} = -\frac{\pi^4 \mu D}{4a^2} \gamma_{kl}$$

$$H_{ij}^{kl} = H_{kl}^{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_l$$

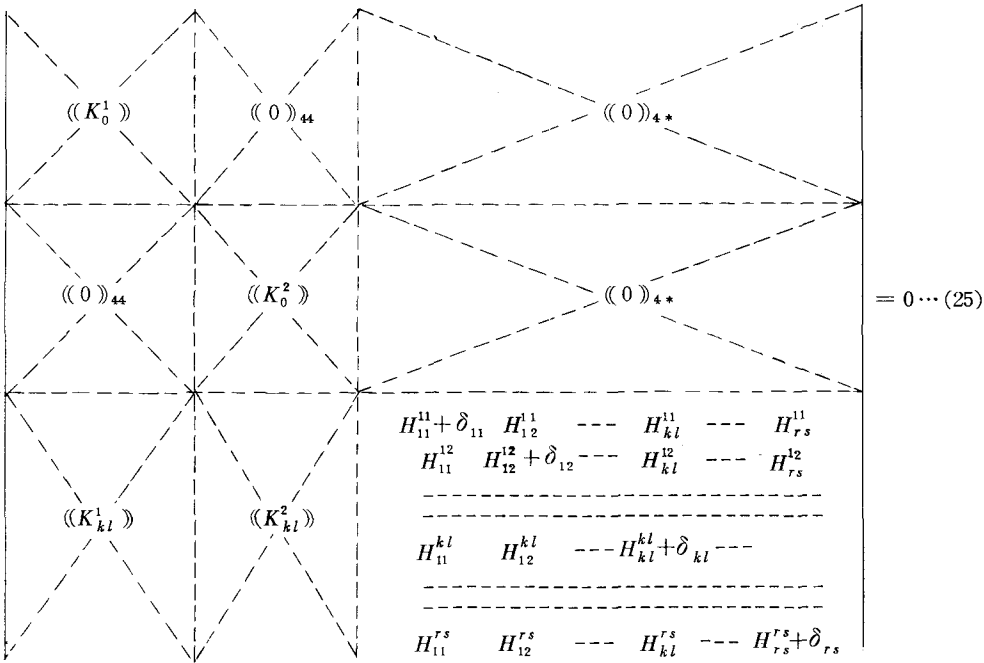
$$K_{mn} = (m^2 + \frac{n^2}{\mu^2})^2 - (\frac{\lambda}{\pi})^2$$

$$\langle\langle K_{kl}^1 \rangle\rangle = \begin{pmatrix} \sin \bar{k}_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_1 & \cos \bar{k}_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_1 & \sinh k_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_1 & \cosh k_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_1 \\ \sin \bar{k}_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_2 & \cos \bar{k}_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_2 & \sinh \bar{k}_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_2 & \cosh \bar{k}_1 \xi_1 \sin N\pi \eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin \bar{k}_1 \xi_k \sin N\pi \eta_l & \cos \bar{k}_1 \xi_k \sin N\pi \eta_l & \sinh k_1 \xi_k \sin N\pi \eta_l & \cosh k_1 \xi_k \sin N\pi \eta_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin \bar{k}_1 \xi_r \sin N\pi \eta_s & \cos \bar{k}_1 \xi_r \sin N\pi \eta_s & \sinh k_1 \xi_r \sin N\pi \eta_s & \cosh k_1 \xi_r \sin N\pi \eta_s \end{pmatrix}$$

$$\langle\langle K_{kl}^2 \rangle\rangle = \begin{pmatrix} \sin M\pi \xi_1 \sin \bar{k}_2 \eta_1 & \sin M\pi \xi_1 \cos \bar{k}_2 \eta_1 & \sin M\pi \xi_1 \sinh k_2 \eta_1 & \sin M\pi \xi_1 \cosh k_2 \eta_1 \\ \sin M\pi \xi_1 \sin \bar{k}_2 \eta_2 & \sin M\pi \xi_1 \cos \bar{k}_2 \eta_2 & \sin M\pi \xi_1 \sinh k_2 \eta_2 & \sin M\pi \xi_1 \cosh k_2 \eta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin M\pi \xi_k \sin \bar{k}_2 \eta_l & \sin M\pi \xi_k \cos \bar{k}_2 \eta_l & \sin M\pi \xi_k \sinh k_2 \eta_l & \sin M\pi \xi_k \cosh k_2 \eta_l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sin M\pi \xi_r \sin \bar{k}_2 \eta_s & \sin M\pi \xi_r \cos \bar{k}_2 \eta_s & \sin M\pi \xi_r \sinh k_2 \eta_s & \sin M\pi \xi_r \cosh k_2 \eta_s \end{pmatrix}$$

式(18)と式(22)とを全て連立させれば、未知数 $A_x, B_x, C_x, D_x; A_y, B_y, C_y, D_y$ および V_{kl} ($k=1, 2, \dots, r; \ell=1, 2, \dots, s$)を求めるための基本連立方程式をうるが、定数項はいずれも0である。したがって、未知数 $A_x \sim D_x, A_y \sim D_y$ および V_{kl} のうち少なくとも1つ以上0でない解が存在するためには、上述の連立方程式の係数行列式が0でなければならないことより、いわゆる振動数方程式が次の式(23)のごと

く成立し、これより所要の振動数が算定され、在来未解決であったこの種無梁板の振動問題が解明されることになる。



こゝに、 $\langle\langle 0 \rangle\rangle_{4*}$ は中間支点の総数を*とすれば4行*列の零行列である。

3 計 算 例

(1) 周辺単純支持正方形板

辺長比 $\mu = \frac{b}{a} = 0.1$ なる周辺単純支持正方形板の固有値 λ を、式 (23) よりえられる8行8列の正方行列式の振動数方程式を用いて計算すれば、表-1に示すとき結果をうる。表-1(a)欄は式 (10) の余函数 w_1 において $M=N=1$ として算出した固有値群のうち最初の5個を示すものであり、式(6)に示す既往理論の結果において、 $M=1$ (または $N=1$) として N (または M) の種々の値に対して計算される固有値群と一致する。また、表-1(b)欄は $M=N=2$ とした場合の固有値群であり、式(6)において $M=2$ (または $N=2$) として N (または M) の種々の値に対する固有値群とこれまた一致し、本法で仮定した余函数 w_1 の正当性が数値的に立証された。

表-1 周辺単純支持正方形板の固有値

λ	(a) $M=N=1$ の固有値群	(b) $M=N=2$ の固有値群
1	4.4429	7.0248
2	7.0248	8.8858
3	9.9346	11.3272
4	12.9531	14.0496
5	16.0191	16.9180

(2) 無梁板①

図-2(a)~(d)に示すごとく、辺長比 $\mu=b/a=1.0$ なる周辺単純支持正方形板が、中間にて1~4個の支点で支持され、各中間支点の支点沈下がない場合($\delta_{kl}=0$)の固有値 λ を式(23)より計算すれば表-2(a)~(d)欄に示す諸値をうる。また、表-2(e)、(f)欄は、先に著者らが文献(4)で報告した連続矩形板の固有周期算定法を用いて、図-2(e)、

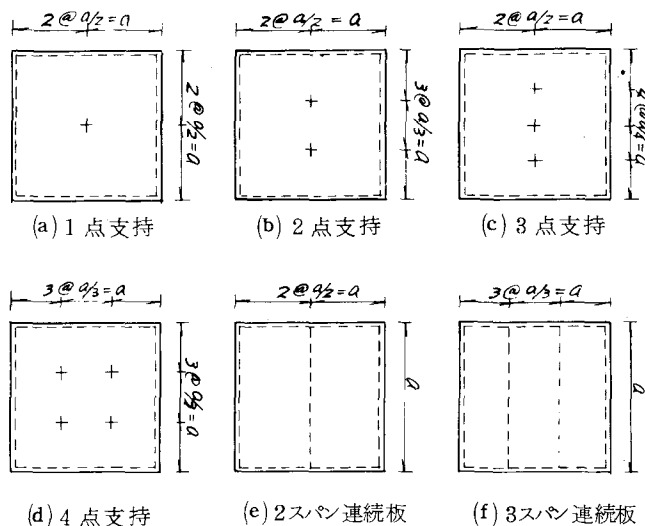


図 - 2

(f)に示す連続板の固有周期の演算結果を示し、無梁板のそれと比較対照した。

表-2 無梁板および連続板の固有値

λ 次数	無 梁 板				連 続 板	
	(a) 1 点支持	(b) 2 点支持	(c) 3 点支持	(d) 4 点支持	(e) 2 スパン	(f) 3 スパン
1	7.0 2 4 8 *	7.0 2 4 8 *	7.0 2 4 8 *	9.9 3 4 6 *	7.0 2 4 8	9.9 3 4 6
2	7.2 6 0 8	8.0 8 1 1	8.2 3 4 4	10.5 0 8 5	8.3 1 1 9	11.3 2 7 2
3	8.8 8 5 8 *	8.1 0 0 0	8.8 8 5 8 *	11.3 2 7 2 *	8.8 8 5 8	12.0 9 5 3
4	11.3 2 7 2 *	8.8 8 5 8 *	9.5 5 6 6	13.3 2 8 7 *	9.7 3 3 8	13.0 4 2 3
5	12.1 2 2 3	9.1 5 2 7	11.3 2 7 2 *	15.0 8 8 2	12.9 5 3 1	13.3 2 8 7

固有値 λ が明らかとなれば振動Modeが算出可能となる。表-2(a)~(e)欄に示す固有値の右肩に*印を付したものは、式(23)の振動数方程式左辺の第1列または第5列の行列要素が、あるいは第1列および第5列の行列要素が同時にいずれも0となり、その値は周辺単純支持正方形板の固有値群のなかに見い出されるものである。したがって、規準函数 W は次のごとき式形となり、周辺単純支持正方形板のそれと合致する。

$$W = A \sin M \pi \xi \sin N \pi \eta$$

*印のない固有直の振動では、式(23)の左辺において、全ての要素が0となるごとき列がないゆえ、式(16)における $A_x \sim D_x$ および $A_y \sim D_y$ がいずれも0となり、したがって、規準函数は式(24)に示す連立方程式を解いて適当な未知数に対する他の全ての未知数の比を算出のうえ、式(16)に代入すれば本例の規準函数が式(25)のごとく求められる。

$$\begin{pmatrix} H_{11}^{11} & H_{12}^{11} & \cdots & H_{kl}^{11} & \cdots & H_{rs}^{11} \\ H_{11}^{12} & H_{12}^{12} & \cdots & H_{kl}^{12} & \cdots & H_{rs}^{12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{11}^{kl} & H_{12}^{kl} & \cdots & H_{kl}^{kl} & \cdots & H_{rs}^{kl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{11}^{rs} & H_{12}^{rs} & \cdots & H_{kl}^{rs} & \cdots & H_{rs}^{rs} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ \vdots \\ V_{kl} \\ \vdots \\ V_{rs} \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots \cdots (24)$$

$$W = V_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 V_{ij} \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad \cdots \cdots (25)$$

ここに $v_{ij} = V_{ij}/V_0$

図-2(a)~(d)の各無梁板に関する1次、2次振動のModeを求めれば図-3に示すとおりである。

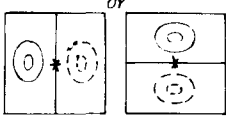
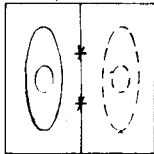
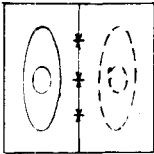
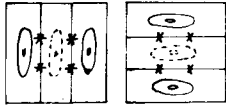
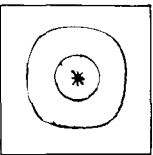
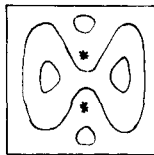
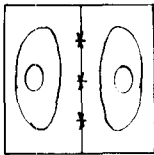
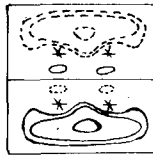
	1 点支持	2 点支持	3 点支持	4 点支持
一 次	 $W = \sin 2\pi \xi \sin \pi \eta$ or $W = \sin \pi \xi \sin 2\pi \eta$	 $W = \sin 2\pi \xi \sin \pi \eta$	 $W = \sin 2\pi \xi \sin \pi \eta$	 $W = \sin 3\pi \xi \sin \pi \eta$ or $W = \sin \pi \xi \sin 3\pi \eta$
二 次	 $W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta$ $\times \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \sin m\pi \eta$	 $W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} v_1 v_2 \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta$ $\times \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \sin m\pi \eta$ $\therefore v_1: v_2 = 1.0, v_2 = 1.0$	 $W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} v_1 v_2 \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta$ $\times \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \sin m\pi \eta$ $\therefore v_1: v_2 = 1.0, v_2 = 1.414, v_2 = 1.0$	 $W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} v_1 v_2 v_3 \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta$ $\times \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \sin m\pi \eta$ $\therefore v_1: v_2 = 1.0, v_2 = -1.0, v_3 = 1.0, v_3 = -1.0$

図 - 3

(3) 無梁板②

図-4(a)に示すごとく、辺長比 $\mu = 1.0$ の周辺単純支持正方計板が1個の中間支点で支えられているものとし、かつ支点が図一中一点鎖線で示した対角線上を移動する場合の一次振動の固有値 λ の変動を求めれば図-5(b)のごとくなり、2スパン連続ばり(図-4(b))の場合(図-5(b))とほぼ同じ傾向を示すことがわかる。

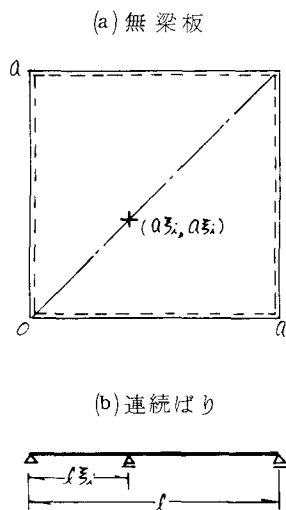


図 - 4

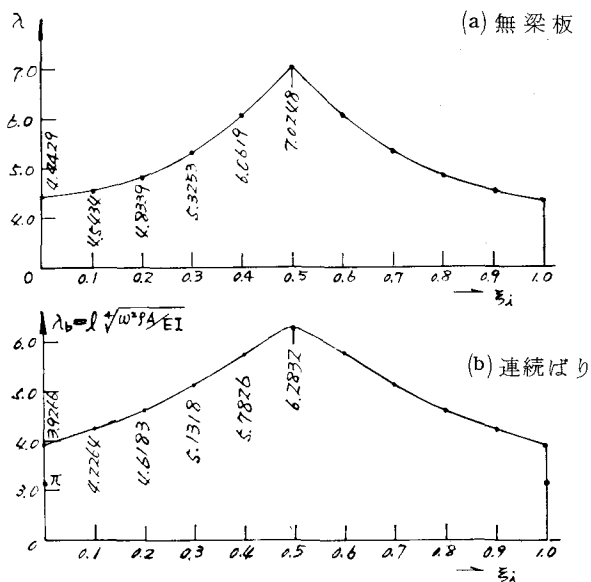


図 - 5

4 結 語

本論文は周辺が単純支持される無梁板の自由振動について論じたが、他の周辺境界条件に関しては、境界条件式に式(16)の規準函数を代入したとき、式(18)に示すとき簡単な条件式とはならず極めて複雑であるが、条件式中の各函数を級数展開することによりあるいは解析可能となることも考えられ、この点に関して現在検討中である。

また、本法の応用拡張により、中間支点で垂直反力の他に反力モーメントが生ずる場合、すなわち、板と柱とが直結する無梁板や、一方向または二方向連続板等の自由振動が解析可能となる。

さらに、固有値問題には振動の他に座屈があるが、これについても本法と同様の手法が適用でき、無梁板および連続板、連続ばりやラーメンなどの骨組構造の座屈問題が解け、したがって、本論文は板および骨組構造の固有値問題における基礎理論として極めて多様性に富むものといえることができる。

参 考 文 献

- 1) N.W.Bazley, D.W.Fox & J.T.Stadter: Upper and Lower Bounds for the Frequencies of Rectangular Plates, Z.A.M.M, Bd.47, April 1967,
- 2) D.Young: Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, Journal of Applied Mechanics, vol.17, No.4, Dec.1950,
- 3) S.Kurata: On vibration of Continuous Rectangular Plates, Proc.of the 1st JaPan Nat.Congr for App.Mech., 1951
- 4) 山崎・樗木・横田: 連続等方性矩形板の固有周期算定法、九州大学工学集報、第40巻第5号、昭和42年9月、