

局部座屈を考慮した鋼アーチ橋の耐荷力

倉 西 茂*

1 序 論

橋梁等の構造物を設計する場合、それがよい設計であるためには、力学的面のみを考えると、一つには材料の塑性領域等まで考慮を払い構造物の極限耐荷力が大きい事、もう一つには常用荷重の下で応力度が過大にならず、しかも材料が力学的に有効に使用されている事であろう。現在塑性設計あるいは解析という一つの体系ができてはいるが、これも合理的設計への一つのアプローチと考えるべきものと思われる。塑性設計的立場から、頭部を剛体で連結された柱列に横荷重を加えた時、その中の一本の柱のみを太くすると、その柱の応力度が大きくなるため弾性設計では弱くなったとされるのは不合理であるという考えが生じるが、構造物の設計という立場から考えこれが合理的補強方法であるかどうかはまた別の問題という事ができよう。橋梁のように荷重が移動する

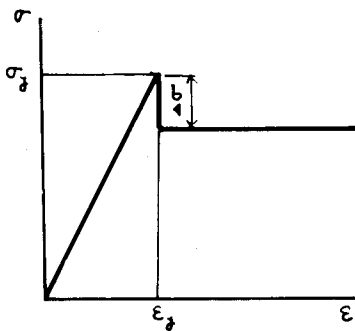


図 - 1

ものに対しては、常用荷重の下での応力の軽減、あるいは剛度の向上という要求が常に付き纏い、これになるべく薄い板でできた構造物への要求となっている。薄い板の使用は当然塑性ヒンジの安定性の問題とつながりをもって来る事になる。

本論文は、薄肉断面主桁をもった鋼アーチ橋が、静荷重を受け局部座屈を起す場合を論じたものであり、板は板に働いている応力度が降伏点に達すると座屈を起し、板の耐荷力は減少するが、一定の耐荷力を有するものとして取り扱われている。すなわち座屈を起す部分の板の平均応力度・平均歪曲線は図-1に示したような関係をもつと仮定する。

2 静荷重を受けるアーチの耐荷力

アーチの崩壊機構はその荷重分布の形によってその様相が異って来る。そこで

- a) アーチリブに直応力のみが働いている場合
- b) アーチリブに主として直応力が働き、それに若干の曲げモーメントが加わっている場合
- c) アーチリブに主として曲げモーメントが働き直応力の影響が小さい場合

の3つの場合について考えて見る事にする。なおここで取扱うアーチは薄肉断面のソリフト・リブ・2ヒンジ・アーチ橋を対象としており、変形もアーチ面内に限定している。

- a) アーチリブに直応力度のみが働いている場合

放物線アーチでは等分布荷重が全径間に載荷されたときに生じ、アーチの崩壊は主として全体としての座屈により生じる。一般に放物線アーチでは限界水平反力は

* 土木学会正員 東北大学工学部土木工学科助教授工博

$$H_k = \frac{\alpha E_t I}{\ell^2} \quad (1)$$

なる形で与えられる。 α はスパン・ライズ比、 $\ast$ 両端の支持条件、断面2次モーメントの変化の仕方等によって定まる定数であるが、2ヒンジアーチでは $4\pi^2$ に近い値となる。

b) アーチリブに主として直応力度が働き、それに若干の曲げモーメントが加わっている場合

放物線アーチで云えば等分布荷重と集中荷重が加わっているような場合である。もちろんこの場合もアーチ

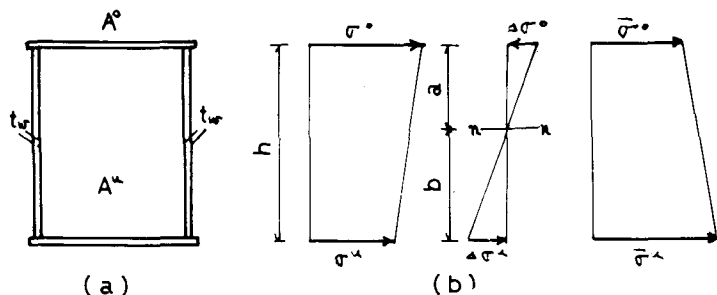


図 - 2

リブ全体としての座屈、あるいは有限変形による応力度の増加といった事も考えなければならないが、Deutsche, Eの研究に従えばアーチが載荷し得る荷重強度はほとんど一定である事が報告されている。ここでは断面を構成している板の座屈によるアーチ全

体としての崩壊機構を考えて見よう。

いま図-2に示したように、箱型断面のハリの突縁が降伏点を越えて座屈し、その突縁に働いている応力の平均値は σ より $\sigma - \Delta\sigma = \bar{\sigma}$ に突然変化したものとしよう。腹板に働いている応力も突縁の座屈の影響を受けて突縁と接する点で突縁と同じ $\bar{\sigma}$ となり、直線的に腹板内で変化するものとする。 A^o を上突縁の断面積 A^u を下突縁の断面積、 a を応力の変化が0である点から上突縁までの距離とし、引張り応力を正とする。上記の応力変化による直応力の変化 ΔN は次式で与えられる。

$$\Delta N = A^o \Delta\sigma^o + A^u \Delta\sigma^u + \frac{t_w h}{2} (\Delta\sigma^o + \Delta\sigma^u) \quad (2)$$

また抵抗曲げモーメントの変化は n 点まわりで与え次式で与えられる。

$$-\Delta M = h \left\{ A^o \frac{(\Delta\sigma^o)^2}{\Delta\sigma^o - \Delta\sigma^u} + A^u \frac{(\Delta\sigma^u)^2}{\Delta\sigma^o - \Delta\sigma^u} + \frac{A^w}{3} \left(\frac{\Delta\sigma^o^2 + \Delta\sigma^o \Delta\sigma^u + \Delta\sigma^u^2}{\Delta\sigma^o - \Delta\sigma^u} \right) \right\} \quad (3)$$

ただし、 A^w は腹板の断面積である。

いまある荷重状態にあるアーチのA点が最も大きな応力を受けているものとし、荷重の増大とともにA断面の上突縁応力度が降伏点に達し、上カバープレートが座屈を起した場合を考えよう。近似的にA断面に働く直応力は θ_A をA点でアーチ軸が水平線となす角度とし、 $-N = H \sec \theta$ で与えられると

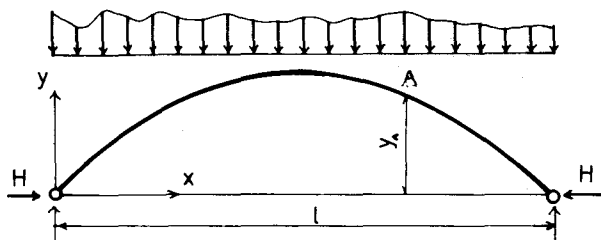


図 - 3

する。A点でのこの荷重状態による単純バリとしての曲げモーメントを M_{A0} とすればA断面に働く曲げモー

メント M_A は

$$M_A = M_{A0} - y_A H \quad (4)$$

で与えられる。(図-3 参照) 上カバープレートの座屈による抵抗モーメントの変化分はアーチ軸のたわみの変化によるものを無視し、水平反力の変化分のみで釣合うものとする。n 点まわりのモーメントの平衡より

$$\Delta M = -(\bar{y} - a) \Delta H = (\bar{y} - a) \cos \theta_A \cdot \Delta H \quad (5)$$

なる式が得られる。ここで $\bar{y}$ はアーチの両支点を結ぶ線と A 断面上カバープレートとの距離である。(2)式(3)式を(5)式に代入し、整理すると $\Delta \sigma^o$ と $\Delta \sigma^u$ とに関し次式を得る。

$$C_1 (\Delta \sigma^o)^2 + C_2 \Delta \sigma^o \Delta \sigma^u - C_3 (\Delta \sigma^u)^2 = 0 \quad (6)$$

ただし

$$C_1 = \frac{\bar{y}}{h} \left\{ A^o + \frac{A^w}{2} \right\} \cos \theta_A + \left(A^o + \frac{A^w}{3} \right) - \left(A^o + \frac{A^w}{2} \right) \cos \theta_A$$

$$C_2 = \frac{\bar{y}}{h} \left\{ A^u - A^o \right\} \cos \theta_A + \frac{A^w}{3} - \left(A^u + \frac{A^w}{2} \right) \cos \theta$$

$$C_3 = \frac{\bar{y}}{h} \left\{ A^u + \frac{A^w}{2} \right\} \cos \theta - \left(A^u + \frac{A^w}{3} \right)$$

$\Delta \sigma^o$ の値を与えれば下カバープレートの応力度の変化は計算できる。断面として対称に近いものと考え、 $\frac{\bar{y}}{h}$ は一般に大きな値となるので、 $\frac{\bar{y}}{A}$ の項のみを考えれば

$$(\Delta \sigma^u)^2 \div \frac{A^o + \frac{A^w}{2}}{A^u + \frac{A^w}{2}} \Delta \sigma^o = (1+m)^2 (\Delta \sigma^o)^2$$

$$\therefore \Delta \sigma^u = \pm (1+m) \Delta \sigma^o \quad (7)$$

となるが、 m は普通の場合かなり小さい値となる。正負の記号が表われるが、正の場合(3)式で分るようにモーメントの変化は極めて大きい事を要するので実際にはこういう事はあり得ないので、負の場合のみが実際に生じる応力度変化分である。

A 断面で上突縁が座屈を起す瞬前の下突縁の応力度を σ_{c1}^u とし

$$\sigma_{c1}^u \geq \sigma_y - \Delta \sigma^u \quad (8)$$

であれば上突縁の座屈とともに下突縁は圧縮応力度が増加し、降伏点を越え、局部座屈を起し、アーチに働いている軸力が、(2)式で与えられる ΔN だけ減少するので断面の抵抗力を越え、断面全体の縮みを起し、アーチは低くなる低くなると水平反力も増大するので結局、アーチは崩壊する。上突縁が $-\sigma_y$ 、下突縁が $(-\sigma_y + \Delta \sigma^u)$ なる応力度にある応力状態は、そのときの直応力、曲げモーメントを N_{c1} 、 M_{c1} とし

$$-\sigma_y = -\frac{N_{c1}}{A} - \frac{M_{c1}}{W^o} \quad -\sigma_y + \Delta \sigma^u = -\frac{N_{c1}}{A} + \frac{M_{c1}}{W^u} \quad (9)$$

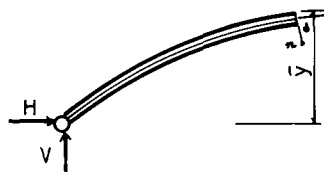


図 - 4

で与えられる故その限界曲げモーメントは

$$M_{e_1} = \frac{\Delta \sigma^u}{\frac{1}{W^o} + \frac{1}{W^u}} \quad (10)$$

となる。ここで A は全断面積を表わし、 W^o 、 W^u は上突縁および下突縁に対する断面係数である。またこのとき働いている直応力 N_{e_1} は

$$N_{e_1} = -A(-\sigma_y + \frac{M_c}{W^o}) \quad (11)$$

で与えられる。よって

$$\left| \frac{M_{e_1}}{N_{e_1}} \right| = e_c = \frac{W^o W^u (1-r)(1+m)}{A \{ W^o + W^u - W^u (1-r)(1+m) \}} \quad (12)$$

ただし、 r は板の座屈による応力度の低下率である。

で与えられる e_c 。内に直応力の着点があれば、全断面にわたって局部座屈を起す可能性を生じる。(12)式で与えられる値は必要条件であって必しも e_c 。以内に直応力が働いていても、アーチにおいては一般に働いている曲げモーメントの正負の値は近い値となっており、 A 断面の局部座屈による水平反力の増大により、他の断面で座屈を起す可能性も生じる。しかし、ここでは一応直応力の偏心量が e_c 。以内であれば全断面で座屈を起し、他断面で座屈を起す場合については次章で取扱う。

c) アーチリブに主として曲げモーメントが働き直応力の影響が小さい場合

等分布荷重の他に半載分布荷重や、集中荷重が載荷されているときに相当する。b) では圧縮縁応力の最も大きい断面でその突縁に座屈が生じ、一方の突縁も座屈を起す場合を述べたが、ここでは一方の突縁はもとの形状を保ち、塑性ヒンジを形成する場合について述べる事にある。

いま断面 A で一突縁が座屈を起し、その断面の抵抗モーメントは ΔM だけ低下したとすれば、水平反力は

$$\Delta M = (\bar{y} - a) \Delta H$$

$$\text{より } \Delta H = \frac{\Delta M}{\bar{y} - a}$$

だけ増加する。この ΔM は(6)式で得られる値を(3)式に代入して得られる。この水平反力の増加により他の断面で局部座屈を起すならば、それでアーチの耐荷力は決定されてしまうが、他断面で降伏応力度を越さないならば、 A 点で塑性ヒンジが形成されたとし3ヒンジアーチとして以後の応力を計算する事ができる。回転の中心としては近似的に座屈を起していない方の突縁をとる。すると以後の荷重の増加に伴う曲げモーメントの増加を A 点で $\bar{M}_{Ao}$ とすれば、水平反力 $\bar{H}$ の増加は

$$H = \frac{\bar{M}_{Ao}}{\bar{y} - h \sec \theta}$$

で与えられる。よって任意の点の曲げモーメントは

$$\bar{M}_B = M_{Bo} - y_B (H + \Delta H + \bar{H})$$

で与えられる。このモーメントによる応力度が降伏点を越せば、その荷重によってアーチの耐荷力は定まる。

また断面 A では座屈しなかった突縁は $\bar{H}$ による応力度の増加に耐えなければならず、もし A 断面の突縁が

降伏点を越えれば b) の場合と同じ崩壊変形を示す事になる。

3 計算例

いま図-6に示したような荷重を受けているアーチの諸元は次のようなものとする。

$$l = 6 \times 10^3 \text{ cm} \quad f = 1.0 \times 10^3 \text{ cm}$$

$$h = 1.0 \times 10^2 \text{ cm}$$

$$A^o = A^u = A^w = 200 \text{ cm}^2$$

$$I = 1.167 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$W^o = W^u = 2333 \times 10^4 \text{ cm}^3$$

1/4 点に載った集中荷重は

$$P = pwl \quad p = 0.2$$

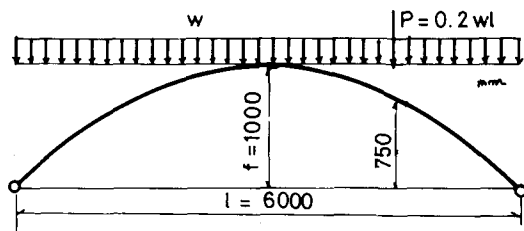


図 - 6

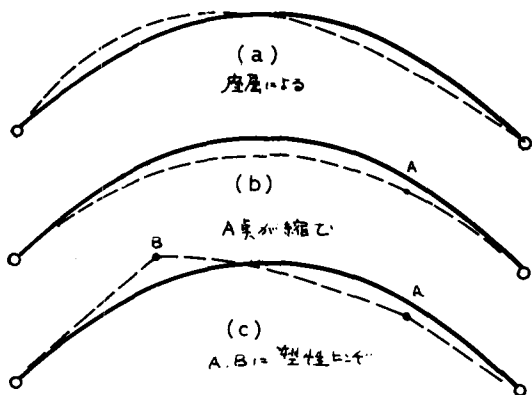


図 - 5

で与えられるものとする。

鋼材の降伏応力 σ_y は $3 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ とし、座屈による平均応力度の降下率 r は 0.2 とする。

水平反力は近似的に

$$H = \frac{wl^2}{8} + \frac{5}{8} \frac{l}{f} \left\{ \left(\frac{x}{e} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{e} \right)^3 + \left(\frac{x}{e} \right) \right\} P$$

$$x = 0.25$$

で与えられるものとする。上突縁の座屈による下突縁の応力度の増加分は(6)式より

$$\Delta \sigma^u = -(1+m) \Delta \sigma^o = -1.125 \Delta \sigma^o$$

を得る。

断面 A の上突縁が丁度降伏点に達したときの荷重を $w \cdot l$ とすれば

$$-\sigma_y = -\frac{N_A}{A} - \frac{M_A}{W^o}$$

$$\text{ここで} \quad M_A = \frac{l_x}{4} P_1 - 4fx(1-x)H_1$$

$$= 99.75 W_1 l^2$$

$$N_A = 0.967 W_1 l$$

であるから

$$W_1 l = 5.096 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$\text{他の値も} \quad P_1 = 1.019 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$M_{A1} = 5.083 \times 10^7 \text{ kg}$$

$$H_1 = 4.659 \times 10^5 \text{ Kg}$$

$$N_{A1} = 4.930 \times 10^5 \text{ Kg}$$

が得られる。(3)式より上突縁の座屈による抵抗モーメントの変化分 ΔM は

$$\Delta M = 1.49 \times 10^7 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

と計算される。これに釣合うための水平反力の増加は

$$\Delta H \doteq \frac{\Delta M}{\bar{y} - a \cos \theta} = 1.99 \times 10^4 \text{ Kg}$$

である。以後の荷重の増加を $\bar{w}l$ とすれば

$$\bar{M}_A = \frac{3}{16} \bar{c} \bar{P} + \frac{\bar{w}l^2}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$$

$$= 7.875 \times 10^2 \bar{w}l$$

$$\bar{H} \doteq \frac{\bar{M}_A}{\bar{y} - h} = 1.11 \bar{w}l$$

断面 B の座標を X_B とすれば、断面 B に働いている曲げモーメントは

$$M_B = \frac{X_B l}{4} (P_1 + \bar{P}) + (w_1 + \bar{w}) \frac{X_B (\bar{l} - X_B)}{2} - y_B (H_1 + \Delta H + \bar{H})$$

で与えられる故、 M_B の最大値は $\frac{\partial M_B}{\partial X_B} = 0$ より、求められるが、この条件は w を含むので繰返し計算が必要である。今近似的に $X_B = 0.3 \bar{l}$ とすると断面 B の下突縁が降伏点に達する荷重は

$$-\sigma_y = \frac{(H_1 + \Delta H + \bar{H}) \cos \theta_{1.3}}{A_B} + \frac{M_B}{W_B^0}$$

より $w_2 l = 2.74 \times 10^4 \text{ Kg}$ が得られる。

水平反力 H および M_B の変化の様子を画くと図-7が得られる。

また荷重の各段階での曲げモーメントの変化の仕方を画くと図-8が得られる。断面 A での局部座屈による曲げモーメントの増加 ΔM が大きな影響をもつ事が分る。

4 む す び

薄板構造をとると避ける事ができない板の座屈がある仮定の下に取り扱ったが、2ヒンジアーチ橋程度の不静定次数の低い構造物では塑性領域を考えても大きな耐荷力の増加は期待できない。一般に構造物を設ける場合、局部座屈は防がれているものとして、あるいは局部座屈は生じないようにするが、そのような考え方が本当によい方法かどうか一度考えて見る必要があるものと思われる。

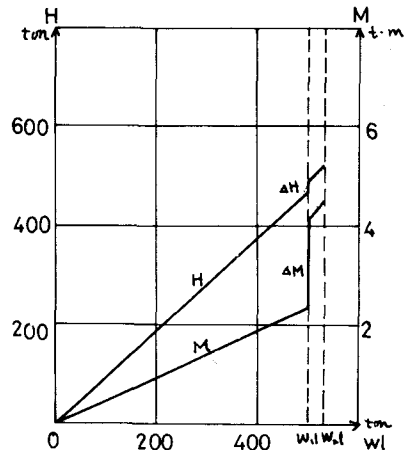


図 - 7

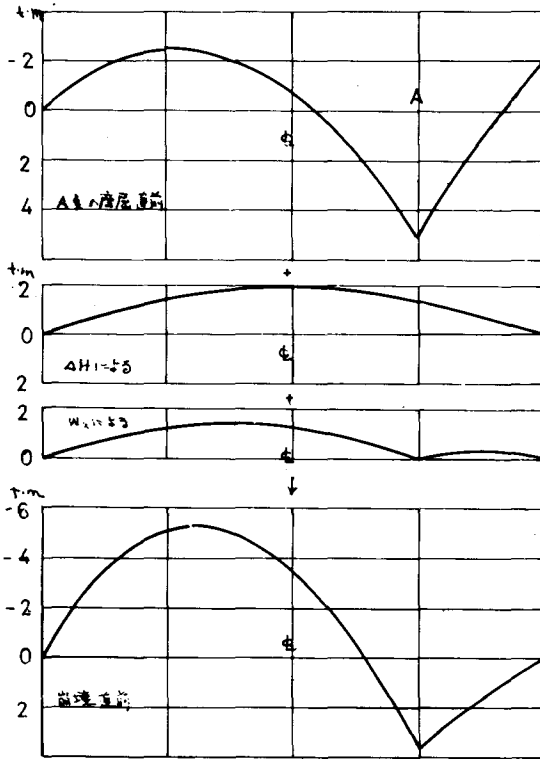


図 - 8

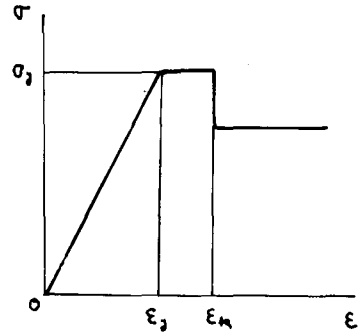


図 - 9

付記I 板の座屈歪について

本論文では、板は降伏応力度に達するとただちに座屈すると考えたが、一般には図-9に示したように、降伏応力で歪が増し、ある歪 E_k に達して座屈を起すものと思われる。この座屈歪 E_k は次のようにして得られる。Ilyushinの提出した板の塑性座屈の方程式は

$$D' \left[\left(1 - \frac{3}{4}k \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + t \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (a)$$

ここで $D' = \frac{E_s t^3}{9}$, $k = 1 - \frac{E}{E_A}$

である。 E_s , E_t はセカント・モデュラス、タンジェント・モデュラスを表わす。今板は理想弾塑性体であるとすると、丁度降伏点に達したとき

$$E_t = 0 \quad E_s = \frac{\sigma_y}{\epsilon} \quad (b)$$

である。座屈変形として

$$w = a \sin \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (c)$$

とすれば、 $b t \sigma_x = N$ とし (d)

(a)(b)(c)(d) 式より

$$\frac{N}{A} = \sigma_k = \frac{\sigma_y}{\epsilon} \frac{17\pi^2}{36} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (e)$$

が得られる。 $\sigma_k = \sigma_y$ とすれば

$$\varepsilon_k = \frac{17\pi^2}{36} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

の歪に達したとき座屈を起す事になる。今

$$\left(\frac{b}{t}\right) = 30, 40, 50, 60$$

の値を入れて、応力・歪曲線と共に図示すると図-10 が得られる。図中Eは $2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ の線である。板厚比 40 の板は若し降伏応力が 6000 Kg/cm^2 であれば、図-1 に示した曲線のように降伏点に達すると共に座屈を生じる事が分る。板厚比が 50 のものは降伏点が 3700 Kg/cm^2 の鋼材でできていれば、やはり図-1 の型となる。実際には、材料の歪硬化、溶接による残留応力度、板のもつ元たわみ等により、より小さい降伏応力度で座屈を起すものと考えられる。

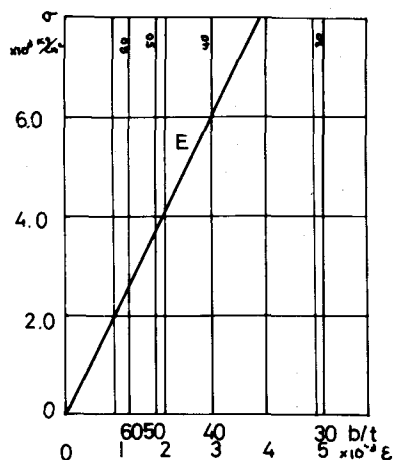


図 - 10

付記Ⅱ 板の塑性座屈後の耐荷力について

板の座屈の形として

$$w = a \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

をとり、座屈により生じる歪を計算し、Henky, Mises の条件により塑性が生じるものとし、応力の履歴に関係なく、残った弾性部分の中央を通る面を考えそれが板中央断面で、表面と交わる点を y_1 とすると

$$2 \sin \frac{\pi}{b} y_1 = -\phi + \sqrt{\phi^2 + \left(1 + \frac{r}{2\mu}\right)} \quad (f)$$

$$\text{ここで } \phi = \frac{\pi}{\mu^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \beta}, \quad \beta = \frac{b}{t}, \quad \varepsilon = \mu \varepsilon_y$$

ε は板の平均歪

である。圧縮領域から引張り領域の 2 倍を減じたものを板の座屈後の耐荷力とすれば座屈による減少率 r は

$$r = 1 + \frac{1}{2\pi\phi} \left\{ (2 + r\mu^{-1}) \log \tan \frac{\pi y_1}{2b} + 2 \cos \frac{\pi y_1}{b} + r \left(\frac{1}{2} - \frac{y_1}{b} \right) \right\} \quad (g)$$

$$\text{ここで } r = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_y}$$

で与えられる。(g)式を計算すると μ があまり大きな値でない範囲では r はほぼ一定の値となる。

参 考 文 献

倉西 茂 “静的荷重を受ける 2 ヒンジ鋼アーチ橋の耐荷力について” 土木学会論文集 68 号 1959