

板たわみ角法による立体斜板構造の解析

山 崎 徳 也 *
彦 坂 熙 **

1 緒 言

矩形および斜(平行四辺形)水平スラブと鉛直壁とからなる立体板構造は、スラブ式ラーメンとして土木構造物にしばしば用いられているが、既往研究には、矩形スラブ門型壁体に関する倉田氏⁽¹⁾および斜スラブ式門型ラーメンを扱った四野宮氏⁽²⁾岡村氏⁽³⁾らのものがあるに過ぎず、節線の不静定モーメント、断面諸力の分布およびスラブのたわみなど設計資料として未知の点が多い。特に斜板の解析は単一板でも矩形板に比して著しく面倒であり、多スパン立体斜板構造を扱った文献は皆無といって差支えない。

近年、R.W.Clough⁽⁴⁾、O.C.Zienkiewicz and Y.K.Cheung⁽⁵⁾およびJ.H.Arigyris⁽⁶⁾らにより板、殻の応力解析をはじめとして多方面に応用されてきたいわゆるFinite Element Methodは、演算諸式の簡潔さと、行列演算の特徴として電算による高速計算のプロセスへ乗せやすい利点の両面から、構造解析における極めてすぐれた手法といえるが、これを本題の立体斜板構造の解析に直接適用することは、計算機の記憶容量、計算時間とも甚だ不経済であり、さらに計算精度の低下も避けられない。

著者らはさきに、骨組構造物におけるたわみ角法に相当する“板たわみ角法”を、上記難点を排除し、かつ物理的意味の明確なる連続板構造の解法として提案したが⁽⁷⁾本論文はこれを立体斜板構造にも適用可能なるごとく拡張応用したもので、一方向のみならず二方向連続板構造をも包含し、局所および固定の両斜交座標の導入と面外および面内のすべての変形を考慮することにより、任意傾斜のスラブおよび壁体をもつ複合板構造の解析を可能ならしめるものである。

2 平行四辺形板要素の Stiffness Matrix

(i) 面外変形に対する Stiffness Matrix

図-1のごとく、相隣る2辺の長さがそれぞれ a 、 b なる平行四辺形板要素A(1-2-3-4)の中立面に斜行軸 x 、 y を、これらと垂直下向きに z 軸を設ける。いまモーメントベクトルは右ねじの法則にしたがうものとし、 xy 平面内で y および x 軸に垂直方向のモーメントをそれぞれ M_θ 、 M_φ 、また z 方向の力を P_z とおけば、板要素の任意節点 i ($i=1,2,3,4$)

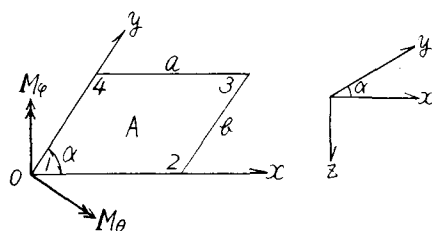


図 - 1

に作用する外力が次の3次の列ベクトル F_i で表わされる。

$$F_i = \{M_\theta \ M_\varphi \ P_z \ \ell\}_i \quad (i=1,2,3,4) \quad (1)$$

ただし、 ℓ は長さのdimensionをもつ任意量である。

他方、 M_θ 、 M_φ に対応する回転変分をそれぞれ $\theta = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 、 $\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}$ 、 z 方向のたわみを w とすれば、 i

*九州大学工学部教授。工博

** 同助手

点の変形成分は3次の列ベクトル

$$U_i = \{ \theta \varphi \omega \}_i \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

で表わされる。ここに $\omega = w/\ell$

さて、板要素Aの4節点の外力および変形成分をそれぞれ12次の列ベクトル

$$F_A = \{ F_1 F_2 F_3 F_4 \} \quad (3)$$

$$U_A = \{ U_1 U_2 U_3 U_4 \} \quad (4)$$

にて表わすこととすれば、(12×12)のStiffness Matrix K_A を媒体として一般に次式が成立する。

$$F_A = K_A U_A \quad (5)$$

K_A の誘導過程は文献(8)で詳述したゆえ、途中の演算を省略して結果のみ記せば、次式でえられることとなる。

$$K_A = 4 \lambda \mu D (C^{-1})^T \left\{ \int_0^1 \int_0^1 B^T G B d\xi d\eta \right\} C^{-1} \quad (6)$$

ここに、

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -p & 0 & 0 & -3p\xi & -p\eta & 0 & 0 & -p(3\xi\eta + \nu_1 \eta^2) & -p\nu_2 \eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p^{-1} & 0 & 0 & -p^{-1}\xi & -3p^{-1}\eta & -p^{-1}\nu_1 \xi^2 & -p^{-1}(3\xi\eta + \nu_2 \xi^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\xi & 2\eta & 0 & 3\xi^2 + 4\nu_1 \xi\eta & 3\eta^2 + 4\nu_2 \xi\eta \end{bmatrix}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$C = \begin{bmatrix} -\mu \\ \lambda \\ 1 \\ -\mu & -\mu & -\mu & -\mu \\ \lambda & 2\lambda & 3\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\mu & -\mu & -2\mu & -\mu & -2\mu & -3\mu & -\mu(1+2\nu_1) & -\mu(3+2\nu_2) \\ \lambda & 2\lambda & \lambda & 3\lambda & 2\lambda & \lambda & \lambda(3+2\nu_1) & \lambda(1+2\nu_2) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\nu_1 & 1+\nu_2 \\ -\mu & -2\mu & -3\mu \\ \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(空白の要素は0)

$$G = \frac{1}{S_0^2} \begin{bmatrix} 1 & (C_0^2 + \nu S_0^2) & C_0 \\ (C_0^2 + \nu S_0^2) & 1 & C_0 \\ C_0 & C_0 & 1 + C_0^2 - \nu S_0^2 \end{bmatrix}$$

また各記号は次のとき内容をもつ。

D : 板剛度. ν : ポアソン比.

$\lambda = \ell/a$. $\mu = \ell/b$. $p = b/a$. $\xi = x/a$. $\eta = y/b$. $S_0 = \sin \alpha$. $C_0 = \cos \alpha$.

$$\nu_1 = \frac{3C_0}{1+2C_0^2} \frac{b}{a} \quad \nu_2 = \frac{3C_0}{1+2C_0^2} \frac{a}{b}$$

$$\nu_1 = \frac{3C_0}{1+2C_0^2} \frac{b}{a} \quad \nu_2 = \frac{3C_0}{1+2C_0^2} \frac{a}{b}$$

(II) 面内変形に対する Stiffness Matrix

図-2のごとく、斜交軸 x, y に関する面内変形量をそれぞれ $\bar{u}, \bar{v}$ で定義し、これらを無次元化して $u = \bar{u}/\ell, v = \bar{v}/\ell$ とおく。いま u, v が次式で表わされるものと仮定する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 + A_2 \xi + A_3 \eta + A_4 \xi \eta \\ v &= A_5 + A_6 \xi + A_7 \eta + A_8 \xi \eta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

板要素 A の節点 i ($i = 1, 2, 3, 4$) の変形成分を

2 次の列ベクトル

$$\bar{U}_i = \{u \ v\}_i \quad (8)$$

で表わし、板要素の 4 節点の変形成分を 8 次の列ベクトル

$$U = \{\bar{U}_1 \ \bar{U}_2 \ \bar{U}_3 \ \bar{U}_4\} \quad (9)$$

で表わせば、式(7)の ξ, η に各節点の座標 (ξ_i, η_i) を代入することにより次式をうる。

$$U_A = \bar{C} A \quad (10)$$

$$\text{または } A = \bar{C}^{-1} \bar{U}_A \quad (11)$$

ここに $\bar{C}$ は (8×8) 行列、 A は式(7)の 8 個の係数の列ベクトルである。

他方、式(8)の変形成分に対応する i 点の外力をそれぞれ x, y 軸方向の力 P_x, P_y により 2 次の列ベクトル $F_i = \{P_x \ P_y\}$

で表わし、板要素 A の全体についても、式(9)と同じく 8 次の列ベクトル

$$\bar{F}_A = \{\bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \ \bar{F}_3 \ \bar{F}_4\} \quad (13)$$

にて表わせば、 (8×8) の Stiffness Matrix $\bar{K}_A$ を媒介にして一般に次式が成立する。

$$\bar{F}_A = \bar{K}_A \bar{U}_A \quad (14)$$

さて、斜交座標 x, y に関する任意点のひずみおよび応力をそれぞれ 3 次の列ベクトル

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right\}$$

$$\sigma = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}$$

で表わせば、これらは次式のごとく求められる。

$$\varepsilon = \lambda \mu \bar{B} A = \lambda \mu \bar{B} \bar{C}^{-1} \bar{U}_A \quad (15)$$

$$\text{ここに } \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \mu^{-1}\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^{-1}\lambda^{-1}\xi & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1}\lambda^{-1}\xi & 0 & p & 0 & \mu^{-1}\eta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu_2} \bar{C} \varepsilon = \frac{E}{1-\nu_2} \lambda \mu \bar{C} \bar{B} \bar{C}^{-1} \bar{U}_A \quad (16)$$

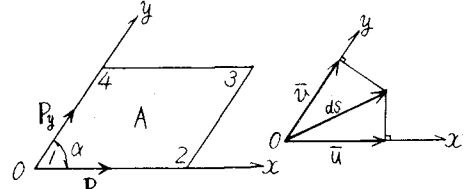


図 - 2

$$\text{ここに } \bar{G} = \frac{1}{S_0^3} \begin{bmatrix} 1 & (C_0^2 + \nu S_0^2) & -C_0 \\ (C_0^2 + \nu S_0^2) & 1 & -C_0 \\ -C_0 & -C_0 & \frac{1}{2}(1 + C_0^2 - \nu S_0^2) \end{bmatrix}$$

E : ヤング係数

仮想変位 $\delta \bar{U}_A$ に対する外力および内力の仕事はそれぞれ次式で算定される。

$$\text{外力の仕事: } W_e = (\delta \bar{U}_A)^T \bar{F}_A$$

$$\text{内力の仕事: } W_i = h \quad (\delta \varepsilon)^T \sigma d_x d_y \quad h : \text{板厚}$$

ここに、式(15)、(16)より

$$(\delta \varepsilon) = \lambda \mu \bar{B} \bar{C}^{-1} \delta \bar{U}_A$$

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \lambda \mu \bar{G} \bar{B} \bar{C}^{-1} \bar{U}_A$$

いま $\delta \bar{U}_A$ を identity matrix I とれば

$$W_e = I \bar{F}_A = \bar{F}_A$$

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{E h}{1-\nu^2} \lambda^2 \mu^2 a b \int_0^1 \int_0^1 (\bar{B} \bar{C}^{-1})^T \bar{G} \bar{B} \bar{C}^{-1} \bar{U}_A d\xi d\eta \\ &= \frac{E h^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \lambda \mu (\bar{C}^{-1})^T \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \bar{B}^T \bar{G} \bar{B} d\xi d\eta \right\} \bar{C}^{-1} \bar{U}_A \end{aligned}$$

$$W_e = W_i \text{ より } \bar{F}_A = \bar{K}_A \bar{U}_A$$

よって式(14)の $\bar{K}_A$ は結局次式にて与えられることとなる。

$$\bar{K}_A = \frac{E h^2}{1-\nu^2} \left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \lambda \mu (\bar{C}^{-1})^T \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \bar{B}^T \bar{G} \bar{B} d\xi d\eta \right\} \bar{C}^{-1} \quad (17)$$

(iii) 面内、面外変形 Stiffness Matrix の合成

2.(i), (ii) で定義した任意点の変形成分および外力成分 $U = \{\theta \varphi \omega\}$, $\bar{U} = \{u v\}$, $F = \{M_\theta M_\varphi P_z \ell\}$, $\bar{F} = \{P_x \ell P_y \ell\}$ に加えて、 z 軸に関する回転成分 Ψ およびモーメント M_Ψ を新たに定義し、板要素 A の全体についても

$$\Psi_A = \{\Psi_1 \Psi_2 \Psi_3 \Psi_4\}$$

$$M_\Psi^A = \{M_{\Psi_1} M_{\Psi_2} M_{\Psi_3} M_{\Psi_4}\}$$

なる4次の列ベクトルで表わすことにすれば、面内および面外変形をすべて考慮した板要素 A の剛性方程式が次式でえられる。

$$\begin{bmatrix} F_A \\ \bar{F}_A \\ M_\Psi^A \end{bmatrix} = [K_A^e] \begin{bmatrix} U_A \\ \bar{U}_A \\ \Psi_A \end{bmatrix} \quad (18)$$

ここに $[K_A^e]$ は次の内容をもつ (24×24) 行列である。

$$[K_A^e] = \begin{bmatrix} K_A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

次に、任意節点 i の変形成分ベクトル U_i , $\bar{U}_i$ および Ψ_i と、外力成分ベクトル F_i , $\bar{F}_i$ および M_{Ψ_i} をそ

れぞれ統合して次の 6 次の列ベクトル U_i, F_i を新たに定義することとする。

$$\begin{aligned} U_i &= \{\theta \ \varphi \ \Psi \ u \ v \ \omega\} \\ F_i &= \{M_\theta \ M_\varphi \ M_\Psi \ P_x \ell \ P_y \ell \ P_z \ell\} \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) の U_i, F_i を用いた板要素 A の剛性方程式が次式でえられる。

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} = [\bar{K}_A^e] \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\text{ここに } \bar{K}_A^e = T_e^T K_A^e T_e$$

ただし、 T_e は次式を満足する (24×24) の変換行列である。

$$\begin{pmatrix} F_A \\ \bar{F}_A \\ M_\Psi^A \end{pmatrix} = [T_e] \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_A \\ \bar{U}_A \\ \Psi_A \end{pmatrix} = [T_e] \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}$$

3 板たわみ角式の誘導

図-3のごとく、一对辺 AB および DC が任意に支持され、任意荷重を受ける平行四辺形板 $ABCD$ の両端辺 AD および BC におけるモーメントおよびせん断力とたわみ角および垂直変位量の関係式を求めれば、骨組構造物の解析に常用されるたわみ角式を平板に拡張応用したものとなり、これを“板たわみ角式”と称することとする。板たわみ角式の誘導に当っては、直線部材のたわみ角式と同じく部材の面内変形をひとまず無視し、曲げおよび捩りモーメントの影響のみを考慮する。

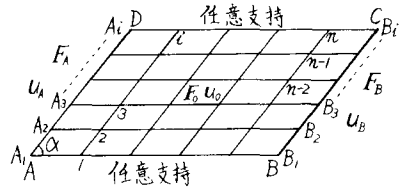


図 - 3

平行四辺形板 $ABCD$ を平行四辺形要素に分割し、両端辺 AD および BC の力と変形成分を式(1), (2)を用いてそれぞれ次の列ベクトルで表わすものとする。

端辺 AD ;

$$\begin{aligned} F_A &= \{F_{A1} \ F_{A2} \ \cdots \ F_{Ai}\} \\ U_A &= \{U_{A1} \ U_{A2} \ \cdots \ U_{Ai}\} \end{aligned}$$

端辺 BC ;

$$\begin{aligned} F_B &= \{F_{B1} \ F_{B2} \ \cdots \ F_{Bi}\} \\ U_B &= \{U_{B1} \ U_{B2} \ \cdots \ U_{Bi}\} \end{aligned}$$

また、中間節点 $1, 2, 3, \dots, n$ の荷重と変形成分をそれぞれ列ベクトル

$$\begin{aligned} F_0 &= \{F_{01} \ F_{02} \ \cdots \ F_{0n}\} \\ U_0 &= \{U_{01} \ U_{02} \ \cdots \ U_{0n}\} \end{aligned}$$

で表わせば、各節点における釣合条件より次の剛性方程式をうる。

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & K_{A0} \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{B0} \\ K_{0A} & K_{0B} & K_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式(21)の右辺Stiffness Matrixは対称行列で、式(6)のStiffness Matrix K_A を既知とすれば重ね合わせにより容易に求められる。⁽⁸⁾

式(21)を展開して次式がえられる。

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{A0} \\ K_{B0} \end{bmatrix} U_0 \quad (22a)$$

$$F_0 = [K_{0A} \ K_{0B}] \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \end{Bmatrix} + K_{00} U_0 \quad (22b)$$

式(22b)より次式をうる。

$$U_0 = K_{00}^{-1} F_0 - K_{00}^{-1} [K_{0A} \ K_{0B}] \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式(23)を式(22a)に代入して整理すれば、所要の板たわみ角式が結局次のごとく誘導される。

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{AB}^T & S_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{A0} \\ F_{B0} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad S_{AA} &= K_{AA} - K_{A0} K_{00}^{-1} K_{0A}, \quad S_{BB} = K_{BB} - K_{B0} K_{00}^{-1} K_{0B} \\ S_{AB} &= K_{AB} - K_{A0} K_{00}^{-1} K_{0B} \\ F_{A0} &= K_{A0} - K_{00}^{-1} F_0, \quad F_{B0} = K_{B0} K_{00}^{-1} F_0 \end{aligned}$$

4 立体斜板構造に対する板たわみ角式の拡張

式(24)の板たわみ角式は、一方向連続斜板や面内変形を無視した斜板を含む多スパン門型板ラーメンの解析に適用可能であるが、二方向に連続した立体斜板構造の厳密解析には、式(24)を拡張して面内および面外変形をともに考慮しかつ4端辺の変形量をすべて導入することが必要となる。

式(19)を用いて、平行四辺形板ABCDの4辺の力と変形成分の列ベクトルをそれぞれ F_A, F_B, F_C, F_D および U_A, U_B, U_C, U_D 、中間節点の荷重と変形成分のそれを F_0, U_0 とおけば(図-4参照)、前節の式(21)に対応して次の剛性方程式が成立する。

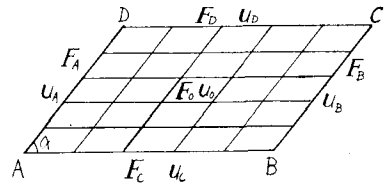


図 - 4

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{AA}^e & \bar{K}_{AB}^e & \bar{K}_{AC}^e & \bar{K}_{AD}^e & \bar{K}_{A0}^e \\ & \bar{K}_{BB}^e & \bar{K}_{BC}^e & \bar{K}_{BD}^e & \bar{K}_{B0}^e \\ & & \bar{K}_{CC}^e & \bar{K}_{CD}^e & \bar{K}_{C0}^e \\ & & & \text{Symmetry} & \bar{K}_{DD}^e & \bar{K}_{D0}^e \\ & & & & & \bar{K}_{00}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

式(25)より U_0 を消去すれば所要の板たわみ角式がえられ、途中の演算を省略して結果のみ示せば次のごとくである。

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} & S_{AC} & S_{AD} \\ & S_{BB} & S_{BC} & S_{BD} \\ & & S_{CC} & S_{CD} \\ \text{Symmetry} & & & S_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{AO} \\ F_{BO} \\ F_{CO} \\ F_{DO} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\text{ここに } S_{ij} = \bar{K}_{ij}^e - \bar{K}_{io}^e \bar{K}_{oo}^{e-1} \bar{K}_{oj}^e$$

$$F_{io} = \bar{K}_{io}^e \bar{K}_{oo}^{e-1} F_o$$

$$(i, j = A, B, C, D)$$

なお、これまで用いてきた斜交座標系 (x, y, z) は、立体斜板構造を構成する一パネルの平板ごとにとつた局所斜交座標系であり、立体斜板構造の解析に当っては、力および変形量を構造全体に都合よくとつた固定斜交座標系に変換する必要がある。

図-5 のとき斜角 α の局所斜交座標系 (x, y, z) に対し、て定義された式 (19) の U, F を、斜角 β の固定斜交座標系 (X, Y, Z) に変換してそれぞれ U^*, F^* をえたものとなすば次式が成立する。⁽⁶⁾

$$U = L U^*, \quad F = (L^T)^{-1} F^* \quad (27)$$

$$\text{ここに } L = \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} C_\alpha D & 0 \\ 0 & D C_\beta \end{bmatrix}$$

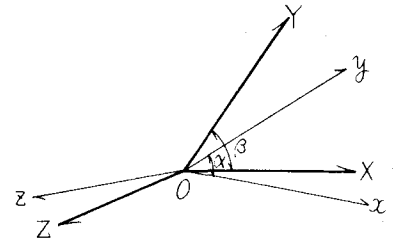


図 - 5

$$C_\alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{bmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad C_\beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} \begin{bmatrix} 1 & -\cos \beta & 0 \\ -\cos \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}$$

式 (27) を用いれば、式 (20) の剛性方程式は次のごとく変換される

$$\begin{Bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \end{Bmatrix} = [\bar{K}_A^{**}] \begin{Bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \\ U_3^* \\ U_4^* \end{Bmatrix} \quad (28)$$

$$\text{ここに } \bar{K}_A^{**} = T^T \bar{K}_A^e T$$

$$T = \begin{bmatrix} L & & \\ & L & 0 \\ 0 & & L \end{bmatrix}$$

よって局所斜交座標系に関する式 (24) および式 (26) の板たわみ角式は、それぞれ次式のごとく固定座標系に変換されることとなる。

$$\begin{Bmatrix} F_A^* \\ F_B^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{AA}^* & S_{AB}^* \\ S_{AB}^{T*} & S_{BB}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A^* \\ U_B^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{AO}^* \\ F_{BO}^* \end{Bmatrix} \quad (24)'$$

$$\begin{Bmatrix} F_A^* \\ F_B^* \\ F_C^* \\ F_D^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{AA}^* & S_{AB}^* & S_{AC}^* & S_{AD}^* \\ & S_{BB}^* & S_{BC}^* & S_{BD}^* \\ & & S_{CC}^* & S_{CD}^* \\ \text{Symmetry} & & & S_{DD}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_A^* \\ U_B^* \\ U_C^* \\ U_D^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{AO}^* \\ F_{BO}^* \\ F_{CO}^* \\ F_{DO}^* \end{Bmatrix} \quad (26)'$$

5 立体斜板構造の解法

図-6(a)のごとく、水平斜スラブ①と底辺が固定された鉛直壁②③④⑤とからなる箱形立体斜板構造を例にとり、本法による解法骨子を説明すれば以下のごとくである。

いま、節線 $l_1, l_2, \dots, l_8$ における変形量をそれぞれ $U_1, U_2, \dots, U_8$ とおき、4頂点A, B, CおよびDの変形量はそれぞれ U_1, U_3, U_2 および U_4 に含まれるものとする。図-6(b)のごとく各パネルごとに局所座標を設け、適宜に定めた固定座標に関して誘導した式(26)'の板たわみ角式を用いれば、構造全体に対する剛性方程式が次のごとく求められる。ただし、便宜上肩字*は省略した。

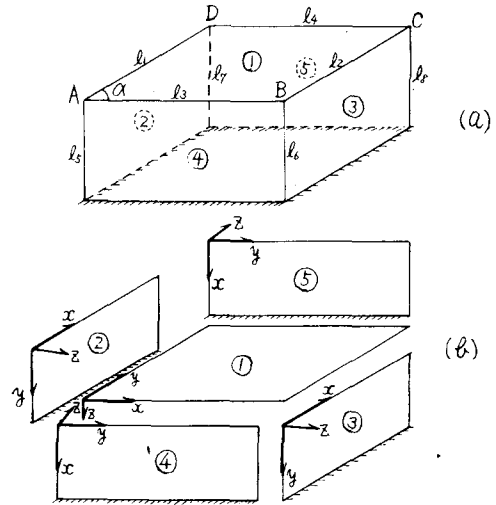


図 - 6

$$\begin{bmatrix} S_{AA}^{(1)} + S_{CC}^{(2)} + (S_{AA}^{(4)}) & S_{AB}^{(1)} & S_{AC}^{(1)} & S_{AD}^{(1)} & S_{CA}^{(2)} + (S_{AC}^{(4)}) & (S_{AD}^{(4)}) & S_{CB}^{(2)} & 0 \\ & S_{BB}^{(1)} + S_{CC}^{(3)} + (S_{AA}^{(5)}) & S_{BC}^{(1)} & S_{BD}^{(1)} & 0 & S_{CA}^{(3)} & (S_{AC}^{(5)}) & S_{AB}^{(2)} \\ & & S_{CC}^{(1)} + S_{AA}^{(4)} + (S_{CC}^{(5)}) & S_{CD}^{(1)} & S_{AC}^{(4)} & S_{AD}^{(4)} + (S_{CA}^{(3)}) & 0 & (S_{CB}^{(5)}) \\ & & & S_{DD}^{(1)} + S_{AA}^{(5)} + (S_{CC}^{(2)}) & (S_{CA}^{(4)}) & 0 & S_{AC}^{(5)} + (S_{CB}^{(2)}) & S_{AD}^{(5)} \\ & & & & S_{AA}^{(2)} + S_{CC}^{(3)} & S_{CD}^{(4)} & S_{AB}^{(2)} & 0 \\ & \text{Symmetry} & & & & S_{AA}^{(3)} + S_{DD}^{(4)} & 0 & S_{AB}^{(3)} \\ & & & & & & S_{BB}^{(2)} + S_{CC}^{(5)} & S_{CD}^{(5)} \\ & & & & & & & S_{BB}^{(2)} + S_{DD}^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{AO}^{(1)} + F_{CO}^{(2)} + (F_{AO}^{(4)}) \\ F_{BO}^{(1)} + F_{CO}^{(3)} + (F_{AO}^{(5)}) \\ F_{CO}^{(1)} + F_{AO}^{(4)} + (F_{CO}^{(5)}) \\ F_{DO}^{(1)} + F_{AO}^{(5)} + (F_{CO}^{(2)}) \\ F_{AO}^{(2)} + F_{CO}^{(3)} \\ F_{AO}^{(3)} + F_{DO}^{(4)} \\ F_{BO}^{(2)} + F_{CO}^{(5)} \\ F_{BO}^{(3)} + F_{DO}^{(5)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (29)$$

ただし、()内の項は頂点 A, B, C, Dの変形量 U に関するものだけをとることとする。

パネル④のない車庫型構造を扱う場合には、式(29)から肩字④をもつ項をすべて除去すれば所要の剛性方程式をうる。また、パネル④および⑤を取り除いた門型斜板ラーメンについては、同様に肩字④, ⑤をもつ項を除去すればよいが、この場合は一方向連続板となるゆえ、式(24)'の板たわみ角式を用いる方が有利で、剛性方程式は次のごとく簡単になる。

$$\begin{bmatrix} S_{AA}^{①} + S_{BB}^{②} & S_{AB}^{①} \\ S_{BA}^{①} & S_{BB}^{①} + S_{AA}^{③} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{AO}^{①} + F_{BO}^{②} \\ F_{BO}^{①} + F_{AO}^{③} \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

式(29)または式(30)を解けば節線の未知変形量 U がすべて求められ、これらを式(24)'または式(26)'の原たわみ角式に代入すれば節線の不静定モーメントが、また任意点の変形量はたとえば式(23)から求められる。さらに任意点の曲げおよび捩りモーメント M_x, M_y, M_{xy} は、 $M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}$ において次式よりえられる。⁽⁸⁾

$$M = \frac{2\ell}{a\ b} D G B C^{-1} U_A$$

6 計算例

図-7のごとく、水平スラブ①, ②, ③と鉛直壁④, ⑤とからなる3スパン板ラーメンに式(24)'の板たわみ角式を適用すれば、両端辺および中間節線の変形量 U_1, U_2, U_3 および U_4 に関する剛性方程式が次式でえられる。

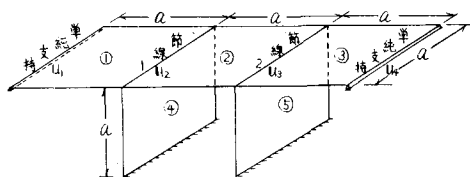


図 - 7

$$\begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB}^{①} & 0 & 0 \\ S_{AB}^{①} & S_{BB}^{①} + S_{AA}^{②} + S_{BB}^{③} & S_{AB}^{②} & 0 \\ 0 & S_{AB}^{②} & S_{BB}^{②} + S_{AA}^{③} + S_{BB}^{④} & S_{AB}^{③} \\ 0 & 0 & S_{AB}^{③} & S_{BB}^{③} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{AO}^{①} \\ F_{BO}^{①} + F_{AO}^{②} \\ F_{BO}^{②} + F_{AO}^{③} \\ F_{AO}^{④} \end{bmatrix} = 0 \quad (31)$$

式(31)を解き、節線1の各4等分点についてスラブ②の不静定端モーメント M_ϕ の影響面を描けば、 $\alpha = 60^\circ$ の斜スラブラーメンでは図-8、 $\alpha = 90^\circ$ の矩形スラブラーメンでは図-9のごとくえられる。ただしポアソン比は $\nu = 0.2$ と仮定し、鉛直壁の影響面図は省略した。図-8, 9を比較して明らかなごとく、斜スラブラーメンでは斜角の影響による構造の非対称性が顕著に現われており、かかる構造物の設計に当っては鋭角および鈍角部の応力集中特性に対する十分な考慮を必要とすることが認められる。

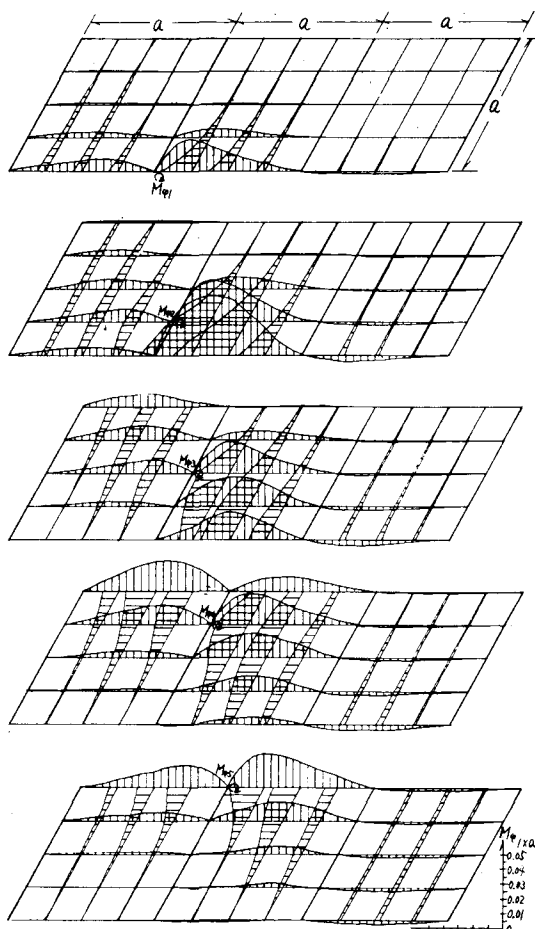


図 - 8

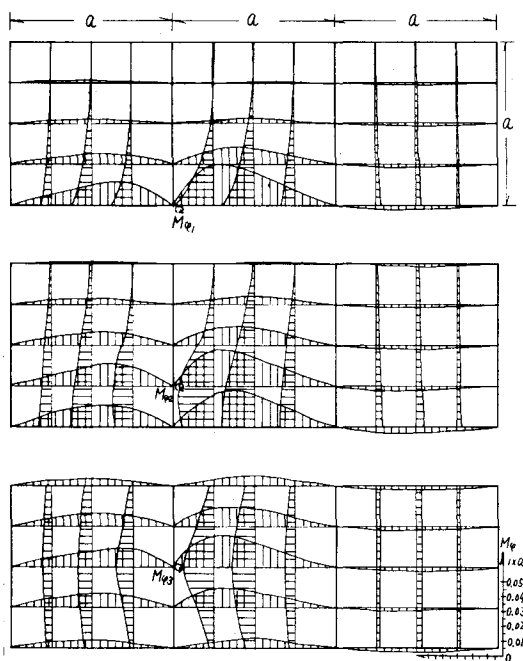


図 - 9

7 結 語

本論文は、一貫した行列演算により誘導した板たわみ角式を用いての立体斜板構造の解法を提示し数値計算例と併せ報告したもので、この種の構造に関する既往研究と比較して本法の有する利点を挙げれば以下のごとくである。すなわち

- (i) 従来、矩形スラブラーメンに比して斜スラブラーメンの解は極めて繁雑となるのが常であった⁽²⁾⁽³⁾のに対し、本論文では斜交座標の採用とこれに基づいて定義された応力および変形量の導入により、演算が著しく簡易化された。
- (ii) 行列演算に基づく本法は電算プログラミングのプロセスに乗せるうえで極めて便利であり、各種影響面の算定が容易である点からも、実際構造物の設計計算に適した手法である。
- (iii) 一般に Finite Element Method では高次 Stiffness Matrix の逆行列演算に計算機の膨大な記憶容量と計算時間とを費やし、また Stiffness Matrix の次数が高くなるにつれて計算精度の低下も避けられない。

これに対し本法によれば、必要とする逆行列演算は一パネルの板についてのみ行えばよく、かつStiffness Matrix の大きな部分を占める0要素を板たわみ角式の誘導過程で集中的に排除できるゆえ、計算機の記憶容量の有効利用と計算時間の大幅な短縮をはかることができ、比較的小容量の計算機にても立体斜板構造の解析が容易に可能となる。

立体板構造は単にスラブ式ラーメンとしてのみならず、極めてSlenderな複合板構造を長大スパン橋梁の主構として採用した施工例も欧米では報告されており、本法はかかる構造物の解析にも大いに資するものと確信する。

参 考 文 献

- (1) 倉田・岡村：門型壁体の曲げ．第18回土木学会年次学術講演会講演額要．昭和38年5月．
- (2) 四野宮：スラブ式斜ラーメン橋解法の一試案．第21回土木学会年次学術講演会講演概要．昭和41年5月
- (3) 岡村・吉田・小林：斜折板構造の解析．第22回土木学会年次学術講演会講演概要．昭和42年5月．
- (4) R.W.Clough: The Finite Element Method in Structural Mechanics in "Stress Analysis". Tohn Wiley & Sons, Ltd. London 1965.
- (5) O.C.Zienkiewicz and Y.K.Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw Hill. London 1967.
- (6) J.H.Argyris: Matrix Displacement Analysis of Plates and Shells. Ingenieur Archiv. XXXV Band 1966.
- (7) 山崎・彦坂：連続板構造の解法．第17回応用力学連合講演会論文抄録集．昭和42年10月．
- (8) 山崎・彦坂：Finite Element Methodによる一方向連続斜板の解法．九州大学工学集報．第40巻 第5号，昭和42年9月．