還元法の連続板構造物への拡張応用

山　崎　徳　也 *
太　田　俊　昭 **

1　序　　言

土木構造物に広く活用される連続スラブや連続板ラーメンなど、いわゆる１方向連続板構造の解法に関する既往の研究には、橋軸方向の１対辺が単純支持などの特殊形式の連続矩形板を対象とした成岡[1)]、岡元[2)]氏および山崎[3)]らの研究があるが、２対辺が任意境界条件の１方向連続矩形板や連続板ラーメンの解法をすべて包括のうえ一般的に取り扱った論文は見当らない。

本論文は、有限要素法[4)]と還元法[5)]とを組み合せ、板の境界条件の一般性を満たすとともに、１方向に連続せる構造上の特長を十分生した行列解法を、図－１(a)に示す１方向連続無梁および有梁板や、(b)の１方向連続折板構造や(c)の連続１層板ラーメンなどを対象として一般的に論じたものである。

本法にしたがえば、図－１(d)の連続１層無梁板や(e)の連続多層板ラーメンなども１応用例として解くことが可能となるが、紙面の都合上これらについての解説は省略する。

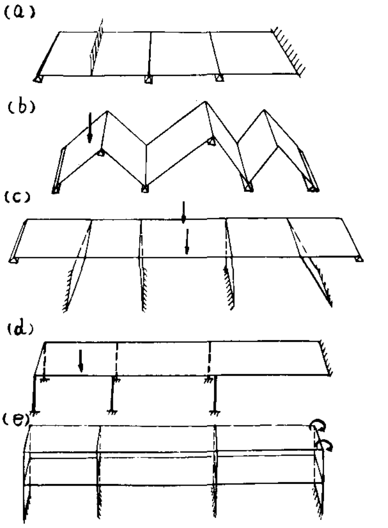


図　－　1

2　変形法公式の誘導

(1)　１方向連続有梁矩形板に対する変形法公式

図－２のごとく１対辺 AD および BC が任意支持条件を有し、他対辺 AB および DC がはりにて弾性支持された矩形板 $ABCD$ を考える。

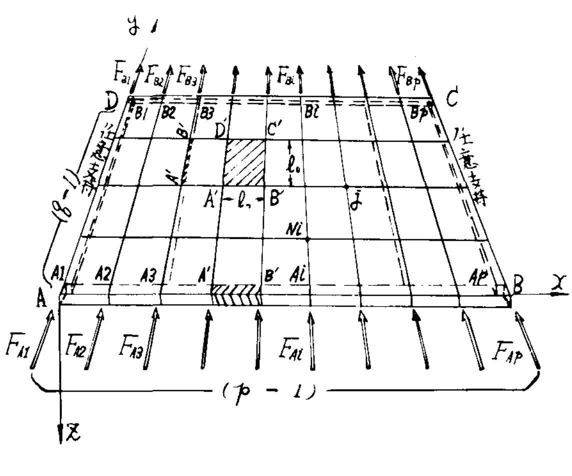


図　－　2

２辺 AB, AD に沿って x, y 軸を、さらに x, y 軸と垂直下向きに z 軸をとる。

いま、z 方向のたわみを w^z, x および y 軸に関する回転角をそれぞれ θ^x, θ^y とすれば、任意点 i の変形成分は一般に３次の例ベクトルで次のごとく示される。

* 九州大学工学部教授工博　　** 九州大学工学部講師工修

$$U_i = (\, w_i^z \;\; l_o\theta_i^x \;\; l_o\theta_i^y \,)^T \tag{1}$$

また、式(1)の変形成分 w^z および θ^x ， θ^y に対応して i 点に作用する一般力が、Z 方向の力 F^z および x ，y 軸廻りのモーメント M^x ，M^y により、同じく次の３次の列ベクトル F_i で一般表示される。すなわち、

$$F_i = (\, F_i^z \;\; M_i^x/l_o \;\; M_i^y/l_o \,)^T \tag{2}$$

ただし肩字 T は転置行列を表わす。

さて、矩形板 $ABCD$ を（$p-1$）×（$q-1$）個の辺長 l_o なる正方形板要素に分割すれば、この任意微小正方形板 $A'B'C'D'$ の頂点いわゆる Node に働く Nodal Force F_i（$i=A',B',C',D'$）が Stiffness Matrix（K'）を媒介として、変形成分 $U_{A'}$，$U_{B'}$，$U_{C'}$ および $U_{D'}$ で下記のごとく示される[4)]

$$(\, F_{A'} \; F_{B'} \; F_{C'} \; F_{D'} \,)^T = \bar{D}_o (K')(U_{A'} \; U_{B'} \; U_{C'} \; U_{D'})^T + (\boldsymbol{F}_{A'} \; \boldsymbol{F}_{B'} \; \boldsymbol{F}_{C'} \; \boldsymbol{F}_{D'})^T \tag{3}$$

ただし $\boldsymbol{F}_i$（$i=A',B',C',D'$）は Node i に働く外力モーメントおよび力などの一般力、$\bar{D}_o = D_o/l_o^2$ ，D_o：板の曲げ剛度。

一方、（$p-1$）あるいは（$q-1$）等分された各分割ばり $A'B'$ に対するたわみ角式および捩り角式を、式(3)と同一形式に整理統合すれば、結局次式をうる。

$$\begin{pmatrix} f_{A'} \\ f_{B'} \end{pmatrix} = \alpha \bar{D}_o \begin{pmatrix} k_{A'A'} & k_{A'B'} \\ k_{B'A'} & k_{B'B'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{A'} \\ U_{B'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_{A'} \\ \boldsymbol{f}_{B'} \end{pmatrix} \tag{4}$$

ここに　$f_i = (\, F_i^z \;\; M_i^x/l_o \;\; M_i^y/l_o \,)^T$ ，$\boldsymbol{f}_i = (\, \boldsymbol{f}_i^z \;\; \boldsymbol{M}_i^x/l_o \;\; \boldsymbol{M}_i^y/l_o \,)^T$

$\alpha = EI/D_o l_o$　　，　　（$i=A',B'$）

また

$$k'_{A'A'} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad k'_{A'B'} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad k'_{B'A'} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -6 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad k'_{B'B'} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & \gamma & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ただし　$\boldsymbol{f}_i^z$：　中間荷重による元端の Z 方向の端せん力。

$\boldsymbol{M}_i^x, \boldsymbol{M}_i^y$：　中間荷重による元端の x および y 軸廻りの固定端モーメント。

$\gamma = GJ/EI$ ，EI：はりの曲げ剛性、GJ：はりの捩り剛性。

次に任意の分割節点 j における一般力の釣合式を求めれば次のごとくである。

$$\Sigma(\, F_j + f_j \,) - \boldsymbol{P}_j = 0 \,, \quad (\, j = 1,2,3,\cdots\cdots, pq \,) \tag{5}$$

ただし　$\boldsymbol{P}_j$：　節点 j に働く外力モーメントおよび力などの一般力。

式(5)に式(3)および式(4)を代入して整理すれば、結局矩形板 $ABCD$ に対して次の剛性方程式をうる。[8)]

$$\begin{pmatrix} F_G \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{D}_o \begin{pmatrix} K_{GG} & K_{GN} \\ K_{NG} & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_G \\ U_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_G^o \\ \boldsymbol{F}_N^o \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここに　$F_G = (\, F_{AB} \;\; F_{BA} \,)^T$　　，　$\boldsymbol{F}_G^o = (\, \boldsymbol{F}_{AB}^o \;\; \boldsymbol{F}_{BA}^o \,)^T$

$F_{AB} = (\, F_{A1} \cdots F_{Ai} \cdots F_{AP} \,)^T$ ，　$F_{BA} = (\, F_{B1} \cdots F_{Bi} \cdots F_{BP} \,)^T$

$\boldsymbol{F}_{AB}^o = (\, \boldsymbol{F}_{A1}^o \cdots \boldsymbol{F}_{Ai}^o \cdots \boldsymbol{F}_{AP}^o \,)^T$ ，　$\boldsymbol{F}_{BA}^o = (\, \boldsymbol{F}_{B1}^o \cdots \boldsymbol{F}_{Bi}^o \cdots \boldsymbol{F}_{BP}^o \,)^T$

$\boldsymbol{F}_N^o = (\, \boldsymbol{F}_{N1}^o \cdots \boldsymbol{F}_{Ni}^o \cdots \,)^T$　　，

$$U_G = (\,U_A \;\; U_B\,)^T \quad ,$$

$$U_A = (\,U_{A1} \cdots U_{Ai} \cdots U_{AP}\,)^T \,, \quad U_B = (\,U_{B1} \cdots U_{Bi} \cdots U_{BP}\,)^T$$

$$U_N = (\,U_{N1} \cdots U_{Ni} \cdots \quad)^T$$

ただし、F_{Ai} , F_{Bi} ：節点 Ai , Bi に作用する不静定力。

$\boldsymbol{F}^o_{Ai}$, $\boldsymbol{F}^o_{Bi}$, $\boldsymbol{F}^o_{Ni}$ ：節点 Ai , Bi および節点 Ni に働く外力モーメントおよび力などの一般力。

U_{Ai} , U_{Bi} , U_{Ni} ：節点 Ai , Bi および節点 Ni の変形成分。

なお、節点 Ai , Bi および節点 Ni は、それぞれ辺 AB , DC 上の節点および不静定力の作用しない中間節点に相当する。

式(6)を変形して次のごとき所要の変形法公式をうる。[8)]

$$\begin{pmatrix} F_{AB} \\ F_{BA} \end{pmatrix} = \bar{D}_o\,(K)\begin{pmatrix} U_A \\ U_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{AB} \\ \boldsymbol{F}_{BA} \end{pmatrix} \tag{7}$$

ここに $(K) = \begin{pmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{pmatrix} = (K_{GG}) - (K_{GN})(K_{NN})^{-1}(K_{NG})$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{AB} \\ \boldsymbol{F}_{BA} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{F}^o_G) - (K_{GN})(K_{NN})^{-1}(\boldsymbol{F}^o_N)$$

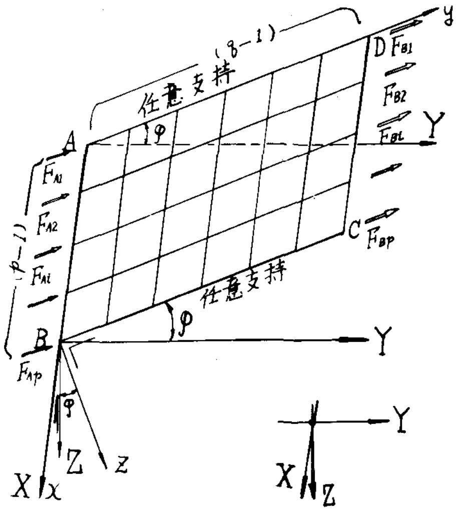


図 － 3

(2)　1方向連続折板構造に対する変形法公式

図－3に示すごとく水平面に対して傾斜角 φ を有し、1対辺 BC , AD が任意支持条件を有し、他対辺 AB , DC が弾性支持の矩形板 $ABCD$ を想定する。ここでは面内および面外変形を総て考慮すべく、式(1)の U_i および式(2)の F_i をいずれも次のごとく6次の列ベクトルで拡張定義する。

$$U_i = (\,w_i^x \;\; w_i^y \;\; w_i^z \;\; l_o\theta_i^x \;\; l_o\theta_i^y \;\; l_o\theta_i^z\,)^T \tag{8}$$

$$F_i = (\,F_i^x \;\; F_i^y \;\; F_i^z \;\; M_i^x/l_o \;\; M_i^y/l_o \;\; M_i^z/l_o\,)^T \tag{9}$$

ただし　w^x , w^y : x , y 軸方向の変位 , θ^z: z 軸廻りの回転角、

F^x , F^y : x , y 方向の力　, M^z: z 軸廻りモーメント。

直交座標(x , y , z)に関する矩形板 $ABCD$ の変形法公式は、2. (1)の場合と全く同様にして求められ、結局、$\alpha = 0$ とした式(7)と同一形式で与えられることとなる。

ここで固定座標(X , Y , Z)を図－3のごとく設置すれば、直交座標(x , y , z)との変換行列(L)が次の式で定義される。

$$(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{10}$$

いま、固定座標に関する一般力および変形成分をそれぞれ

$$F^* = (\,F^X\ F^Y\ F^Z\ M^X/l_o\ M^Y/l_o\ M^Z/l_o\,)^T$$

$$U^* = (\,w^X\ w^Y\ w^Z\ l_o\theta^X\ l_o\theta^Y\ l_o\theta^Z\,)^T$$

で表わせば、式(10)より次の関係式が成立する。

$$F^* = (L')F,\quad F=(L')^T F^*,\quad U^* = (L')U,\quad U=(L')^T U^* \tag{11}$$

ただし　F^i ,M^i (i=X,Y,Z)：i 軸に関する力およびモーメント。

　　　　w^i , θ^i (i=X,Y,Z)：i 軸に関する変位および回転角。

$$(L') = \begin{bmatrix} (L) & 0 \\ 0 & (L) \end{bmatrix}$$

式(7)に式(11)を代入のうえ整理すれば、所要の固定座標に関する変形法公式が導かれ次の内容となる。

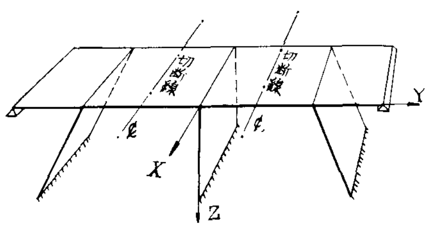
$$\begin{Bmatrix} F^*_{AB} \\ F^*_{BA} \end{Bmatrix} = \overline{D}_o \begin{bmatrix} K^*_{AA} & K^*_{AB} \\ K^*_{BA} & K^*_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^*_A \\ U^*_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}^*_{AB} \\ \boldsymbol{F}^*_{BA} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

ここに

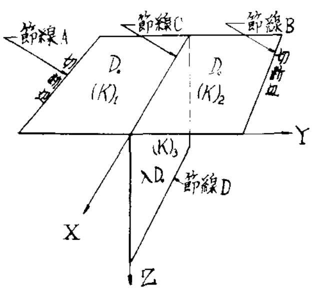
$$\begin{bmatrix} K^*_{AA} & K^*_{AB} \\ K^*_{BA} & K^*_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L) & & & 0 \\ & (L) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (L)^T & & & 0 \\ & (L)^T & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (L)^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}^*_{AB} \\ \boldsymbol{F}^*_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (L) & & & 0 \\ & (L) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{AB} \\ \boldsymbol{F}_{BA} \end{Bmatrix}$$

特に板が水平面内にある場合は、(L)が単位行列$\boldsymbol{I}$となり、$(K^*) = \boldsymbol{I}\,(K)\,\boldsymbol{I} = (K)$



図－4



図－5

(3)　連続1層板ラーメンに対する変形法公式

図－4に示すごとき連続1層板ラーメンを、図－5のごとく鉛直板（または傾斜板）を挟む左右の水平板の中央線で切断し、左右の切断辺の節線をA，Bで、鉛直板（または傾斜板）の上下2辺の節線をC，Dでそれぞれ一般表示する。

いま、これら3つの板を合せて1ブロック単位とし、各板のStiffness Matrix をそれぞれ図－5に示すごとく(K_1),(K_2)および(K_3)で区別すれば、これらの板に対する変形法公式が、面外変形のみの場合は式(7)より、また面内、面外両変形を考慮する場合は式(12)を用いて次のごとくえられる。

$$\left.\begin{aligned} F_{AC} &= \overline{D}_o\,\{\,(K_{AA})_1\,U_A + (K_{AB})_1\,U_C\,\} + \boldsymbol{F}_{AC} \\ F_{CA} &= \overline{D}_o\,\{\,(K_{BA})_1\,U_A + (K_{BB})_1\,U_C\,\} + \boldsymbol{F}_{CA} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{CB} &= \overline{D}_o\,\{\,(K_{AA})_2\,U_C + (K_{AB})_2\,U_B\,\} + \boldsymbol{F}_{CB} \\ F_{BC} &= \overline{D}_o\,\{\,(K_{BA})_2\,U_C + (K_{BB})_2\,U_B\,\} + \boldsymbol{F}_{BC} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} F^*_{CD} &= \lambda\overline{D}_0\ \{\ (K^*_{AA})_3\ U_C\ \} + \boldsymbol{F}^*_{CD} \\ F^*_{DC} &= \lambda\overline{D}_0\ \{\ (K^*_{BA})_3\ U_C\ \} + \boldsymbol{F}^*_{DC} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

次に節線Cで一般力の釣合式を求めれば次式をうる。

$$F_{CA} + F_{CB} + F^*_{CD} + \boldsymbol{P}_C = \boldsymbol{O} \tag{16}$$

式(16)に式(13), (14), (15)を代入して整理すれば、U_C が下記のごとくえられる。

$$U_C = -D_C^{-1}(K_{BA})_1\ U_A - D_C^{-1}(K_{AB})_2\ U_B - D_C^{-1}\boldsymbol{P}'_C/\overline{D}_0 \tag{17}$$

ここに　$D_C = (K_{BB})_1 + (K_{AA})_2 + \lambda\,(K^*_{AA})_3$

$\boldsymbol{P}'_C = \boldsymbol{P}_C + \boldsymbol{F}_{CA} + \boldsymbol{F}_{CB} + \boldsymbol{F}_{CD}$

$\boldsymbol{P}_C$ ：節線Cに作用する力外モーメントおよび力などの一般力。

λ ：水平板の曲げ剛度に対する鉛直板（または傾斜板）の曲げ剛度の比。

式(17)を式(13)の第１式および式(14)の第２式に代入し、かつ$F_{AC} = F^*_{AB}$，$F_{BC} = F^*_{BA}$ および $U_A = U^*_A$，$U_B = U^*_B$ と置き換えて整理すれば、結局次式をうる。

$$\begin{bmatrix} F^*_{AB} \\ F^*_{BA} \end{bmatrix} = \overline{D}_0 \begin{bmatrix} (K_{AA})_1 - (K_{AB})_1\ D_C^{-1}(K_{BA})_1 & -(K_{AB})_1\ D_C^{-1}(K_{AB})_2 \\ -(K_{BA})_2\ D_C^{-1}(K_{BA})_1 & (K_{BB})_2 - (K_{BA})_2\ D_C^{-1}(K_{AB})_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^*_A \\ U^*_B \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{AC} - (K_{AB})_1\ D_C^{-1}\boldsymbol{P}'_C \\ \boldsymbol{F}_{BC} - (K_{BA})_2\ D_C^{-1}\boldsymbol{P}'_C \end{bmatrix} \tag{18}$$

式(18)は式(12)のごとく簡略表示でき、したがって所要の変形法公式が次となる。

$$\begin{bmatrix} F^*_{AB} \\ F^*_{BA} \end{bmatrix} = \overline{D}_0 \begin{bmatrix} K^*_{AA} & K^*_{AB} \\ K^*_{BA} & K^*_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^*_A \\ U^*_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^*_{AB} \\ \boldsymbol{F}^*_{BA} \end{bmatrix} \tag{19}$$

ただし　$K^*_{AA} = (K_{AA})_1 - (K_{AB})_1\ D_C^{-1}(K_{BA})_1$　，$K^*_{AB} = -(K_{AB})_1\ D_C^{-1}(K_{AB})_2$

$K^*_{BA} = -(K_{BA})_2\ D_C^{-1}(K_{BA})_1$　，$K^*_{BB} = (K_{BB})_2 - (K_{BA})_2\ D_C^{-1}(K_{AB})_2$

$\boldsymbol{F}^*_{AB} = \boldsymbol{F}_{AC} - (K_{AB})_1\ D_C^{-1}\boldsymbol{P}'_C$　，$\boldsymbol{F}^*_{BA} = \boldsymbol{F}_{BC} - (K_{BA})_2\ D_C^{-1}\boldsymbol{P}'_C$

３　解　　法

式(12), (19)を用いて還元法の基本公式を導けば次のごとくである。

すなわち、式(12), (19)を展開すれば

$$\left.\begin{aligned} F^*_{AB} &= \overline{D}_0\ (K^*_{AA}\,U^*_A + K^*_{AB}\,U^*_B) + \boldsymbol{F}^*_{AB} \\ F^*_{BA} &= \overline{D}_0\ (K^*_{BA}\,U^*_A + K^*_{BB}\,U^*_B) + \boldsymbol{F}^*_{BA} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ここで　$F^*_{AB} = +\overline{F}_A$，$F^*_{BA} = -\overline{F}_B$ および $\overline{D}_0\,U^*_A = \overline{U}_A$，$\overline{D}_0\,U^*_B = \overline{U}_B$ とおいて式(20)を変形すれば

$$\left.\begin{aligned} \overline{F}_A - K^*_{AA}\,\overline{U}_A &= \boldsymbol{O} + K^*_{AB}\,\overline{U}_B + \boldsymbol{F}^*_{AB} \\ \boldsymbol{O}\ - K^*_{BA}\,\overline{U}_A &= \overline{F}_B + K^*_{BB}\,\overline{U}_B + \boldsymbol{F}^*_{BA} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式(21)を零行列$\boldsymbol{O}$と単位行列$\boldsymbol{I}$とを用いて新たに行列表示すれば次式をうる。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -K^*_{AA} \\ \boldsymbol{O} & -K^*_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{F}_A \\ \overline{U}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & K^*_{AB} \\ \boldsymbol{I} & K^*_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{F}_B \\ \overline{U}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^*_{AB} \\ \boldsymbol{F}^*_{BA} \end{bmatrix} \tag{22}$$

よって

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K^*_{AA} \\ 0 & -K^*_{BA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & K^*_{AB} \\ I & K^*_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_B \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -K^*_{AA} \\ 0 & -K^*_{BA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F^*_{AB} \\ F^*_{BA} \end{bmatrix} \tag{23}$$

または

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_B \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K^*_{AB} \\ I & K^*_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & -K^*_{AA} \\ 0 & -K^*_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K^*_{AB} \\ I & K^*_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F^*_{AB} \\ -F^*_{BA} \end{bmatrix} \tag{24}$$

式(23)および式(24)を係数行列いわゆるFeld Matrix (f_{AB}) および (f_{BA}) を用いて簡略表示すれば、下記のごとき還元法の基本公式がえられる。

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = (f_{AB}) \begin{bmatrix} \bar{F}_B \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} + (R_{AB}) \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_B \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} = (f_{BA}) \begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} + (R_{BA}) \tag{26}$$

ただし
$$(f_{AB}) = (f_{BA})^{-1} = \begin{bmatrix} I & -K^*_{AA} \\ 0 & -K^*_{BA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & K^*_{AB} \\ I & K^*_{BB} \end{bmatrix}$$

$$(R_{AB}) = \begin{bmatrix} I & -K^*_{AA} \\ 0 & -K^*_{BA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F^*_{AB} \\ F^*_{BA} \end{bmatrix}, \quad (R_{BA}) = \begin{bmatrix} 0 & K^*_{AB} \\ I & K^*_{BB} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F^*_{AB} \\ -F^*_{BA} \end{bmatrix} = -(f_{AB})^{-1}(R_{AB})$$

次に、図－6に示す連続4スパン1層板ラーメンを例に取り、本法の解法骨子を概説すれば以下のとおりである。

すなわち、対象とする構造物を図－6に示すごとく第2および第3スパンの中央線 bb' および cc' で切断のうえ3つのブロックに分割し、各ブロックに対して式(25)を適用する。

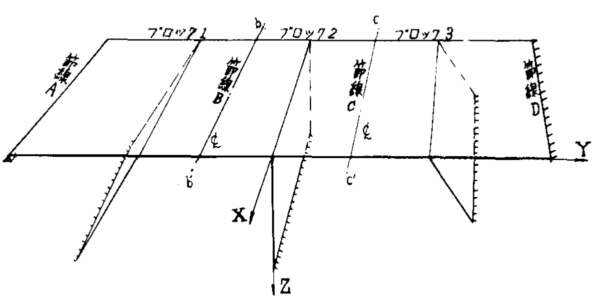


図 － 6

すなわち、ブロック1に対して：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = (f_{AB}) \begin{bmatrix} \bar{F}_B \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} + (R_{AB}) \tag{27}$$

ブロック2に対して：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_B \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} = (f_{BC}) \begin{bmatrix} \bar{F}_C \\ \bar{U}_C \end{bmatrix} + (R_{BC}) \tag{28}$$

ブロック3に対して：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_C \\ \bar{U}_C \end{bmatrix} = (f_{CD}) \begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{U}_D \end{bmatrix} + (R_{CD}) \tag{29}$$

式(27)に式(28), (29)を順次代入して整理すれば、結局次式をうる。

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{AA} & G_{AD} \\ G_{DA} & G_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{U}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \\ \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} \end{bmatrix}$$

ここに

$$\begin{bmatrix} G_{AA} & G_{AD} \\ G_{DA} & G_{DD} \end{bmatrix} = (f_{AB})(f_{BC})(f_{CD})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \\ \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} \end{bmatrix} = (R_{AB}) + (f_{AB})(R_{BC}) + (f_{AB})(f_{BC})(R_{CD})$$

式(30)にAおよびD端の境条件 $\bar{F}_A = \boldsymbol{O}$ および $\bar{U}_D = \boldsymbol{O}$ を代入して展開すれば

$$\boldsymbol{O} = G_{AA}\bar{F}_D + \bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \tag{31}$$

$$\bar{U}_A = G_{DA}\bar{F}_D + \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} \tag{32}$$

式(31)より直ちに $\bar{F}_D$ が定まり、次の内容となる。

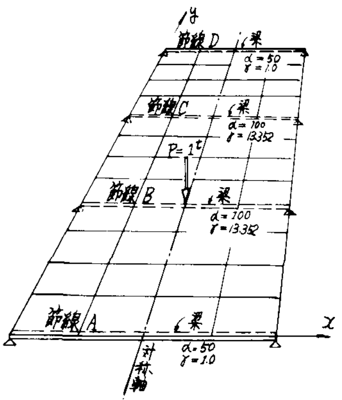
$$\bar{F}_D = -G_{AA}^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \tag{33}$$

式(32)に式(33)を代入して U_A が次のごとく求められる。

$$\bar{U}_A = \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} - G_{DA}G_{AA}^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \tag{34}$$

また、式(33)を式(29)に代入することにより、節線Cの $\bar{F}_C$ および $\bar{U}_C$ が決定でき、さらにこの結果を式(28)に適用して節線Bの $\bar{F}_B$ および $\bar{U}_B$ が確定されることとなる。

4 計算例



図－7

図－7に示す3スパン横桁つき連続矩形板の解析を行えば次のごとくである。ただし $\alpha = EI/l_o D_o$ および $\gamma = GJ/EI$ は、それぞれ図－7に示す諸値をとるものと仮定する。また、各板はいずれも4等分割し、$p = q = 5$とする。

まず、各板に対して式(25)を適用すればそれぞれ次式をうる。ただし点支承の拘束条件は式(7)の誘導段階で導入するものとする。

板ABに対して：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = (f_{AB}) \begin{bmatrix} \bar{F}_B^L \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} \tag{35}$$

板BCに対して：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_B^R \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} = (f_{BC}) \begin{bmatrix} \bar{F}_C \\ \bar{U}_C \end{bmatrix} \tag{36}$$

板CDに対して：

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_C \\ \bar{U}_C \end{bmatrix} = (f_{CD}) \begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{U}_D \end{bmatrix} \tag{37}$$

一方、節線Bにおける一般力の釣合式より、$\bar{F}_B^L$ と $\bar{F}_B^R$ との間に次の関係式が成立する。

$$\bar{F}_B^L = \bar{F}_B^R + \boldsymbol{P}_1 \tag{38}$$

ただし　$P_1 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)^T$

さて、式(36)に式(37)を代入すれば $\bar{F}_B^R$, $\bar{U}_B$ が節線Dの $\bar{F}_D$, $\bar{U}_D$ によって次のごとく示される。

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_B^R \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} = (f_{BC})(f_{CD})\begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{U}_D \end{bmatrix} \tag{39}$$

次に、式(35)に式(38), (39)を順次代入のうえ整理すれば節線Aの $\bar{F}_A$, $\bar{U}_A$ が節線Dの $\bar{F}_D$, $\bar{U}_D$ によって下記のごとく表わされる。

すなわち、

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = (f_{AB})\begin{bmatrix} \bar{F}_B^R + P_1 \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} = (f_{AB})\begin{bmatrix} \bar{F}_B^R \\ \bar{U}_B \end{bmatrix} + (f_{AB})\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

$$= (f_{AB})(f_{BC})(f_{CD})\begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{U}_D \end{bmatrix} + (f_{AB})\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

ただし　$P_2 = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$

よって

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_A \\ \bar{U}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{AA} & G_{AD} \\ G_{DA} & G_{DD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{F}_D \\ \bar{U}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \\ \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} \end{bmatrix} \tag{41}$$

ここに

$$\begin{bmatrix} G_{AA} & G_{AD} \\ G_{DA} & G_{DD} \end{bmatrix} = (G) = (f_{AB})(f_{BC})(f_{CD}),\quad \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \\ \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} \end{bmatrix} = (f_{AB})\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

ただし、(f_{AB}), (f_{BC}), (f_{CD})および(G)はいずれも１４行，１４列の正方行列である。

左右両端節線A，Dの境界条件は、それぞれ次式で与えられる（図－７参照）。

$$\left.\begin{aligned} &\text{節線}A\,;\quad (\bar{F}_A) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T \\ &\text{節線}D\,;\quad (\bar{F}_D) = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

式(41)に式(42)を代入して展開すれば

$$\boldsymbol{0} = (G_{AD})(\bar{U}_D) + \bar{\boldsymbol{F}}_{AD} \tag{43}$$

$$(\bar{U}_A) = (G_{DD})(\bar{U}_D) + \bar{\boldsymbol{F}}_{DA} \tag{44}$$

式(43)より $\bar{U}_D$ が求められ次の値となる。

$$(\bar{U}_D) = -(G_{AD})^{-1}\bar{\boldsymbol{F}}_{AD} = \begin{bmatrix} 0.7976 & \times 10^{-3} \\ -0.8644 & \times 10^{-5} \\ -0.7739 & \times 10^{-5} \\ 0.7963 & \times 10^{-3} \\ -0.5995 & \times 10^{-5} \\ -0.1086 & \times 10^{-4} \\ 0.7956 & \times 10^{-3} \end{bmatrix} \tag{45}$$

さらに、式(44)に式(45)を代入することにより $(\bar{U}_A)$ が次のごとく算定される。

$$(\bar{U}_A) = -(G_{DD})(G_{AD})^{-1}\bar{F}_{AD} + \bar{F}_{DA} = \begin{bmatrix} 0.3195 & \times 10^{-2} \\ 0.9279 & \times 10^{-4} \\ 0.8502 & \times 10^{-4} \\ 0.3210 & \times 10^{-2} \\ 0.6780 & \times 10^{-4} \\ 0.1212 & \times 10^{-3} \\ 0.3220 & \times 10^{-2} \end{bmatrix} \tag{46}$$

また、中間節線Bの $\bar{F}_B$, $\bar{U}_B$ は上記算出の（$\bar{U}_D$）を式(39)に代入することにより容易に算定することができる。

以上の演算の結果よりえられる変形図を図－8に示した。

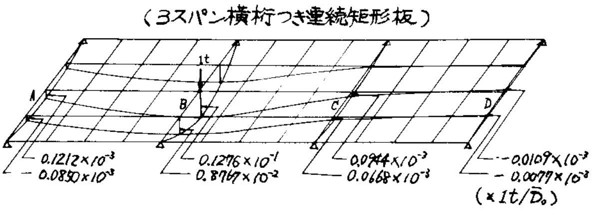


図 － 8

5 結　　語

複合板構造物の解法には、フーリエ級数[1),3)]を用うる解法、有限要素法に基づく変形法[6)]および差分法[7)]などがあるが、1方向連続多スパンの板構造を対象とする場合は、いずれも解式が極めて煩雑となる。

そこで著者らは、有限要素法と還元法を導入し、かかる構造物の解析に極めて有利な行列解法を提示し、図－1(a)～(c)に示す各種1方向連続板構造を対象として解法骨子の一般的考察を行うとともに、図－7の計算例により実際演算手法の解説を試みた。

本研究の結果明らかとなった諸利点を要約すれば次のとおりである。

すなわち、本法によれば、他解法に必須の中間節線での釣合条件式あるいは適合条件式が全く不要となり、単に左右両端辺における境界条件のみで所要の解がえられる利点がもたらされること、したがって連立方程式の元数が大巾に削減でき、在来の有限要素法に比べて電子計算機の記憶容量と演算時間を著しく短縮できること、さらに中間節線の不静定力および板内部の断面力も簡単な行列の積算によって容易に算定しうることなどが挙げられる。

参 考 文 献

(1) 成岡昌夫：撓角撓度法による一方向連続板の解法、土木学会論文集、第4号、昭和24年6月。

(2) 岡元北海：弾性梁にて支持される連続板の解法ならびに弾性梁のねじりモーメントが連続板におよぼす影響について、土木学会論文集、第19号、昭和29年4月。

(3) 山崎徳也・樗木武：一対辺自由な一方向連続矩形板の解法、第21回土木学会年次学術講演会講演概要、昭和41年5月。

(4) O.C.Zienkiewicz and Y.K.Cheung : The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs,Proc. of the I.C.E., Vol. 28, Ougust 1964.

(5) 中川建治・成岡昌夫：変形法とReduction 法との相互関係について、土木学会論文集、第141号、昭和42年5月。

(6) 山崎徳也・太田俊昭・馬々先勝弘：点支承をもつ矩形板の変形法公式、第22回土木学会年次学術講演概要、昭和42年5月。

山崎徳也・彦坂熙：連続板構造の解法、第17回応用力学連合講演会論文抄録集、昭和42年10月。

(7) 四野宮哲郎：スラブ式斜ラーメン橋解法の一試案、第21回土木学会年次学術講演会講演概要、昭和41年5月。

(8) 山崎徳也・彦坂熙：板たわみ角法による立体斜板構造の解析、第14回橋梁・構造工学研究発表会、昭和42年12月。