

円弧曲線桁の曲げねじり理論について

小 西 一 郎 *
白 石 成 人 **
神 部 俊 一 ***

1 緒 言

H. Wagner¹⁾によって端緒が開かれた閉断面の薄肉直線材に関する曲げねじり理論は、多数の研究者によって発展させられて閉断面の薄肉直線材にも理論が拡張され、結局 F. W. Bornscheuer²⁾によって集大成されたと言える。これらの理論では、曲げねじれによる垂直応力を計算するのに St. Venant のねじれによるそり変位だけを考え、その垂直応力の変化にともなう二次せん断応力によるそり変位を無視している。そり変形の拘束が大きい閉断面の場合には、両者のせん断変形の大きさが同程度であるから、この仮定は妥当でないと言われており、以上の点を改良する試みが S. U. Bencsoter³⁾, R. Heilig⁴⁾ K. Roik & G. Sedlacek⁵⁾らによって行われた。薄肉円弧曲線材への曲げねじり理論の拡張は、小西、小松⁶⁾、深沢⁷⁾らによって行われ、曲線材に固有の種々の興味ある成果が得られているが、これらは F. W. Bornscheuer の理論に基いており、二次せん断変形は考慮されていない。閉断面の円弧曲線桁を曲線橋として用いる場合、直線橋に比べてねじりモーメントが大きくなるので以上の点を改良した理論に従って計算することがより望ましいと考えられる。本論文は、R. Heilig の理論を円弧曲線桁に適用できるように拡張したものである。

2 座標系と記号

変形前の曲線桁の断面の中立点 N を連ねた軸線（中立軸）の曲率中心を原点とし、 $\rho - \theta$ 平面が中立軸の曲率面に一致する円柱座標系、桁軸線の接線方向に x 座標軸、桁断面内で曲率半径方向に y 座標軸、鉛直下方に z 座標軸を有し、原点をそれぞれ中立軸 N、せん断中心 S にとった場合の二つの右手直交座標系（ $N - xyz$ ）、（ $S - \tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ）、および薄板中心線にそって曲線座標 S とを設ける（図-1）。断面力成分（ N, Q_y, Q_z ）、断面モーメント成分（ T, M_y, M_z ）、変位成分（ u, v, w ）、断面のねじれ回転角 ϕ 、断面のそり変位 U の正の向きは、図-1 に示されている。作用線が x, y, z 軸に一致し、中立点を通る軸線の単位長さあたりの荷重をそれぞれ P_x, P_y, P_z とし、 x, y, z 軸周りの、軸線の単位長さあたりのモーメント荷重をそれぞれ m_x, m_y, m_z とする。なおさしあたって次の記号を導入するが、式中に現われる新しい記号はそのつど説明する。

R ; 中立点を連ねた軸線が有する曲率半径

R_s ; せん断中心を連ねた軸線が有する曲率半径

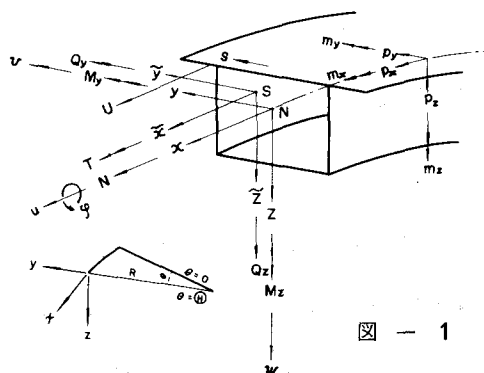


図 - 1

t ; 薄板の板厚
 E ; ヤング係数
 G ; せん断弾性係数

3 基礎方程式

従来の理論^{6),7)}では、ねじれ率が一定でない場合のそり変位 U を、ねじれ率が軸線にそって一定という仮定のもとで求められたそり変位の断面上の分布を示す関数、いわゆる St. Venant のそり関数 $\omega(S)$ と、その断面でのねじれ率 $\psi_x(\theta)$ との積で表わしているが、ここでは $\omega(S)$ は保存し、 $\psi_x(\theta)$ の代りに θ のある関数 $\chi(\theta)$ との積と仮定する。^{3),4)}すなわち、

$$U = -\omega^*(S) \cdot \chi(\theta) \quad (1)$$

ここに、 ω^* はせん断中心に関するそり関数であり、次式で与えられる。⁷⁾

$$\omega^* = R_s \rho \int_0^s \frac{1}{\rho^2} r^* dS - R_s^2 \rho \tilde{q}_s \int_0^s \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS + \frac{\rho}{R_s} \omega_0 \quad (2)$$

r^* は、せん断中心 S から薄板中心線の接線に至る距離を、 $\tilde{q}_s$ は、ねじり関数^{6),7)}を表わしている。ここに、

$$\tilde{q} = \begin{cases} \tilde{q}_{s,j}^0 - \tilde{q}_{s,j-1}^0 & j-1 \text{ 室と } j \text{ 室との境界壁} \\ \tilde{q}_{s,j}^0 & \text{境界でない壁} \\ \tilde{q}_{s,j}^0 - \tilde{q}_{s,j+1}^0 & j \text{ 室と } j+1 \text{ 室との境界壁} \end{cases} \quad (3)$$

$\tilde{q}_{s,j}^0, \dots, \dots$ は、そり変位の連続性を示す条件式

$$\phi_j \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\omega^*}{\rho} \right) dS = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

を、(2)式に適用して得られるつぎの連立方程式を解くことにより求める。

$$-\tilde{q}_{s,j-1}^0 \int_{j-1,j} \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} + \tilde{q}_{s,j}^0 \phi_j \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS - \tilde{q}_{s,j+1}^0 \int_{j,j+1} \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS = \frac{1}{R_s} \phi \frac{1}{\rho^2} r^* dS \quad (4)$$

積分手数 ω_0 は、全断面のそり量の平衡条件式

$$R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^* t dS = 0 \quad \text{によって定まる。}$$

$$\text{つぎに、そり変位の拘束により生じる垂直応力 } \sigma_{\theta\omega} \text{ は、} \quad \sigma_{\theta\omega} = E \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -E \frac{\omega^*}{\rho} \frac{dx}{d\theta} \quad (5)$$

次式で定義される曲げねじりモーメント M_{ω}^* は、

$$M_{\omega}^* = \int_F \sigma_{\theta\omega} \omega^* t dS = -E \frac{dx}{d\theta} \int_F \frac{\omega^{*2}}{\rho} t dS = -\frac{1}{R_s} EC_{\omega}^* \frac{dx}{d\theta} \quad (6)$$

ここに、

$$C_{\omega}^* = R_s \int_F \frac{\omega^*}{\rho} t dS$$

$$\text{を用いると、} \sigma_{\theta\omega} = R_s \frac{M_{\omega}^*}{C_{\omega}^*} \frac{\omega^*}{\rho} \quad (7)$$

しかるに、垂直応力 $\sigma_{\theta\omega}$ にともなうせん断応力 τ_{ω} との間の平衡方程式は、

$$t \frac{\partial \sigma_{\theta\omega}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 \tau_{\omega} t) = 0 \quad (8)$$

$\tau_{\omega} t \equiv Q_{\omega}$ (二次せん断流) において、(8)式に(7)式を代入し ω^* を乗じて全断面にわたって積分すると

$$\int_F \left\{ R_s \frac{1}{C_{\omega}^*} \frac{\omega^*}{\rho} t \frac{dM_{\omega}^*}{d\theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 q_{\omega}) \right\} \omega^* dS = 0 \quad (9)$$

$$\text{ここで、} \int_F \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 q_{\omega}) \frac{\omega^*}{\rho} dS \equiv -R_s \tilde{T}_{\omega} \quad (10)$$

$$\text{と定義すると、(9)式は、} \frac{dM_{\omega}^*}{d\theta} - R_s \tilde{T}_{\omega} = 0 \quad (11)$$

しかるに、(8)式は、(7)、(11)式を用いると

$$R_s \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \omega^* t + \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 q_{\omega}) = 0 \quad (12)$$

(12)式を $\rho^2 q_{\omega}$ について解くと

$$\rho^2 q_{\omega} = R_s^2 \tilde{q}_{\omega} - R_s^2 \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} S_{\omega} \quad (13)$$

ここに、 S_{ω} は、次式で定義される関数である。

$$S_{\omega} \equiv \int_0^s \omega^* t dS \quad (14)$$

$\tilde{q}_{\omega}$ は、積分定数であり、そり変位連続の条件式

$$\phi_j \frac{1}{\rho} \frac{q_{\omega}}{t} dS = 0$$

から求まる。

$$\tilde{q}_{\omega} = \begin{cases} \tilde{q}_{\omega,j}^0 - \tilde{q}_{\omega,j-1}^0 & j-1 \text{ 室と } j \text{ 室との境界壁} \\ \tilde{q}_{\omega,j}^0 & \text{境界でない壁} \\ \tilde{q}_{\omega,j}^0 - \tilde{q}_{\omega,j+1}^0 & j \text{ 室と } j+1 \text{ 室との境界壁} \end{cases} \quad (15)$$

この条件式は、(13)式を用いると

$$-\tilde{q}_{\omega,j-1}^0 \int_{j-1,j} \frac{1}{\rho^3} \frac{1}{t} dS + \tilde{q}_{\omega,j}^0 \phi \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS - \tilde{q}_{\omega,j+1}^0 \int_{j,j+1} \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS = \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \phi_j \frac{1}{\rho^3} S_{\omega} \frac{1}{t} dS \quad (16)$$

ここで、
$$\tilde{q}_{\omega,j}^0 \equiv \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \phi_j \quad (17)$$

とおくと、(16)式は
$$\frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \phi_j (\phi - S_{\omega}) \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS = 0 \quad (18)$$

ただし、
$$\phi = \begin{cases} \phi_j - \phi_{j-1} & j \text{ 室と } j-1 \text{ 室との境界壁} \\ \phi_j & \text{境界でない壁} \\ \phi_j - \phi_{j+1} & j \text{ 室と } j+1 \text{ 室との境界壁} \end{cases} \quad (19)$$

この ϕ を用いると、(13)式から q_{ω} は

$$q_{\omega} = \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \cdot \frac{R_s^2}{\rho^2} (\phi - S_{\omega}) \quad (20)$$

つぎに、二次せん断流 Q_{ω} により生じる断面ねじりモーメント T_{ω} と(10)式で定義されている断面力 $\tilde{T}_{\omega}$ との関係

を求める。(10)式を、部分積分によって変形すると、
$$\tilde{T}_{\omega} = -\frac{1}{R_s} \int_F \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 q_{\omega}) \frac{\omega^*}{\rho} dS =$$
$$-\frac{1}{R_s} \sum_j \int_{j-1} \frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 q_{\omega}) \frac{\omega^*}{\rho} dS = -\frac{1}{R_s} \sum \left[(\rho^2 q_{\omega}) \frac{\omega^*}{\rho} \right]_{j-1}^j + \frac{1}{R_s} \sum_j \int_{j-1}^j \rho^2 q_{\omega} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\omega^*}{\rho} \right) dS \quad (21)$$

総和の順序を入れ換えて(21)式の第一項を変形すると、

$$-\frac{1}{R_s} \sum_j \left[(\rho^2 q_{\omega}) \frac{\omega^*}{\rho} \right]_{j-1}^j = -\frac{1}{R_s} \sum_j \left\{ \frac{\omega^*}{\rho} d_j (\rho^2 q_{\omega}) \right\}$$

ここに、 d_j は、 j 番目の節点(各壁の接合部)でのある量の流入量と流出量との差を示すオペレータである。節点で $\sigma_{\theta\omega} = 0$ ³⁾と考えると、節点での平衡条件式は、 $\frac{\partial}{\partial S} (\rho^2 q_{\omega}) = 0$ であるから、第一項は結局零になる。

(2)式より $\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\omega^*}{\rho} \right) = R_s \frac{r^*}{\rho^2} - R_s^2 \tilde{q}_s \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t}$ を(21)式の第二項に代入し、(20)式を用いて変形すると、

$$\frac{1}{R_s} \int_F \rho^2 q_{\omega} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\omega^*}{\rho} \right) dS = R_s^2 \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \int_F (\phi - S_{\omega}) \frac{r^*}{\rho^2} dS$$
$$- R_s^2 \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \int_F (\phi - S_{\omega}) \tilde{q}_s \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS$$

しかるに、 $\tilde{q}_s$ は、各薄板で一定である^{6),7)}から、(3)、(18)式を考慮すると

$$\frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \int_F (\phi - S_{\omega}) \tilde{q}_s \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{1}{t} dS = 0 \quad (22)$$

が成立する。よって結局、 $\tilde{T}_{\omega}$ は
$$\tilde{T}_{\omega} = R_s^2 \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \int_F (\phi - S_{\omega}) \frac{r^*}{\rho^2} dS \quad (23)$$

ところで、(20)式より
$$T_{\omega} \equiv \int_F q_{\omega} r^* dS = R_s^2 \frac{\tilde{T}_{\omega}}{C_{\omega}^*} \int_F (\phi - S_{\omega}) \frac{r^*}{\rho^2} dS \quad (24)$$

$$\text{ゆえに、(23), (24)式より } T_\omega = \tilde{T}_\omega \quad (25)$$

よって、St. Venant のねじりによるせん断流 Q_s とそり変位の拘束により生じる二次せん断流 Q_ω との和 Q は、

$$q = q_s + q_\omega = \frac{T_s}{J_T^*} \cdot \frac{R_s^2}{\rho^2} \tilde{q}_s^{(7)} + \frac{T_\omega}{C_\omega^*} \frac{R_s^2}{\rho^2} (\phi - S_\omega) \quad (26)$$

ここに、 T_s は St. Venant のねじりモーメント、 J_T^* は、せん断中心に関する St. Venant のねじれ定数である。

$$\text{しかるに、断面ねじりモーメント } T \text{ は、} \quad T \equiv \int_F q R^* dS = \int_F q_s R^* dS + \int_F q_\omega R^* dS = T_s + T_\omega \quad (27)$$

つぎに、 T_ω と変位との関係を定めるために補正仮想仕事の原理 (Principle of complementary virtual work) を適用する。

$$\text{ie } \delta \left\{ \Pi_j + \Pi_a + \int_0^{\theta} \left(\sum_{j=1}^7 \lambda_j \Gamma_j \right) d\theta \right\} = 0 \quad (28)$$

ここに、(28)式の第三項は付帯条件式である。 λ_j は Lagrange の乗数、 Γ_j は断面力に関する衡条件式であり、(11)式を含めて計七つある。

微小角 $d\theta$ には含まれている曲線桁の素片に作用しているすべての力のつり合いを考えると、次式のようになる。

$$\Gamma_1 \equiv \frac{dN}{d\theta} + Q_y + R P_x = 0$$

$$\Gamma_2 \equiv \frac{dQ_y}{d\theta} - N + R P_y = 0$$

$$\Gamma_3 \equiv \frac{dQ_z}{d\theta} + R P_z = 0$$

$$\Gamma_4 \equiv \frac{dT}{d\theta} + M_y + R m_x = 0 \quad (29 \quad a \sim g)$$

$$\Gamma_5 \equiv \frac{dM_y}{d\theta} - T - R Q_z + R m_y = 0$$

$$\Gamma_6 \equiv \frac{dM_z}{d\theta} + R Q_y + R m_z = 0$$

$$\Gamma_7 \equiv \frac{dM_\omega}{d\theta} - R_s T_\omega = 0$$

$$\begin{aligned} \text{補正仮想内力仕事 } \delta \Pi_j \text{ は } \quad \delta \Pi_j &= \int_0^{\theta} \int_F \left(\varepsilon_\theta \delta \sigma_\theta + r \frac{\delta q}{t} \right) t \rho dS d\theta \\ &= \int_0^{\theta} \int_F \frac{\sigma_\theta \delta \sigma_\theta}{E} t \rho dS d\theta + \int_0^{\theta} \int_F \frac{q \delta q}{G t} \rho dS d\theta \quad (30) \end{aligned}$$

補正仮想外力仕事 $\delta \Pi_a$ は

$$\begin{aligned} \delta \Pi_a = & - \int_{F_e} (\tilde{u} \delta \sigma_\theta + \tilde{v} \delta \tau_{\rho\theta} + \tilde{w} \delta \tau_{\theta z}) t dS \\ & - \int_0^{2\pi} (u \delta P_x + v \delta P_y + w \delta P_z + Q_x \delta m_x + Q_y \delta m_y + Q_z \delta m_z) R d\theta \end{aligned} \quad (30)$$

ここに、 F_e は曲線桁の端面の横断面の面積を表わす。 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ は断面内の任意点の変位成分、 Q_x , Q_y , Q_z は $N-x-y-z$ 座標系の各座標軸周りの回転角であり、それぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u - Q_x y + Q_y z - \omega^* \chi \\ \tilde{v} &= v - Q_x z \end{aligned} \quad (32 \text{ a} \sim \text{c})$$

$$\tilde{w} = w + Q_x y$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \varphi \\ Q_y &= -\frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \end{aligned} \quad (33 \text{ a} \sim \text{c})$$

$$Q_z = \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\theta} - u \right)$$

垂直ひずみ ϵ_θ は、平面保持の仮定に基づいて曲げと軸力とから算定される部分と、そり変位の拘束により生じる部分との和として次式で表わされる。

$$\epsilon_\theta = \frac{R}{\rho} \left(\epsilon - \psi_x y + \psi_y z - \frac{1}{R} \frac{d\chi}{d\theta} \omega^* \right) \quad (34)$$

ここに、

ϵ ; 中立軸線の伸び率

ψ_y ; $y-z$ 面内における中立軸線の曲率変化

ψ_x ; $x-y$ 面内における中立軸線の曲率変化

であり、それぞれ次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\theta} + v \right) \\ \psi_y &= -\frac{1}{R} \left(\varphi + \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \quad (35 \text{ a} \sim \text{c})$$

$$\psi_x = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 v}{d\theta^2} - \frac{du}{d\theta} \right)$$

なお、中立軸線のねじれ率は、つぎのようになる。

$$\psi_x = \frac{1}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right) \quad (35 \text{ d})$$

垂直応力 $\sigma_\theta = E \epsilon_\theta$ を、断面力を用いて表わすためには、つぎの関係式が必要である。

$$\text{中立点の定義より } ^{6),7)} \quad R \int_F \frac{1}{\rho} y t dS = R \int_F \frac{1}{\rho} z t dS = 0$$

$$\text{せん断中心の定義より } ^{6),7)} \quad R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^* \tilde{y} t dS = R_s \int_F \frac{1}{\rho} \omega^* \sim z t dS = 0 \quad (36 \text{ a} \sim \text{c})$$

全断面のそり量の平衡条件より $\int_F \frac{1}{\rho} \omega^* t dS = 0$

したがって、断面力の定義から σ_θ は

$$\sigma_\theta = \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{N}{A} - \frac{J_{yz} M_y + J_y M_z}{J_y J_z - J_{yz}^2} y + \frac{J_z M_y + J_{yz} M_z}{J_y J_z - J_{yz}^2} z + \frac{R_s}{R} \frac{M_\omega^*}{C_\omega^*} \omega^* \right\} \quad (37)$$

ここに、 J_y, J_z, J_{yz}, A は、次式で定義される中立点 N に関する断面定数である。

$$J_y = R \int_F \frac{z^2}{\rho} t dS \quad J_z = R \int_F \frac{y^2}{\rho} t dS \quad J_{yz} = R \int_F \frac{yz}{\rho} t dS \quad A = R \int_F \frac{1}{\rho} t dS \quad (38 \text{ a} \sim \text{d})$$

(36 a~c) の関係式を考慮して、(37)式を用いて(30)式の第一項を計算すると、 $\int_0^{\Theta} \int_F \frac{\sigma_\theta}{E} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} t \rho dS d\theta$

$$= R \int_0^{\Theta} \frac{N \delta N}{E A} d\theta + R \int_0^{\Theta} \frac{J_z M_y + J_{yz} M_z}{E (J_y J_z - J_{yz}^2)} \delta M_y d\theta + R \int_0^{\Theta} \frac{J_{yz} M_y + J_y M_z}{E (J_y J_z - J_{yz}^2)} \delta M_z d\theta + R_s \int_0^{\Theta} \frac{M_\omega^* \delta M_\omega^*}{E C_\omega^*} d\theta$$

(39)

(22)式を考慮して、(26)式を用いて(30)式の第二項を計算すると

$$\int_0^{\Theta} \int_F \frac{q \delta q}{G t} \rho dS d\theta = \frac{R_s^4}{G J_T^*} \int_0^{\Theta} T_s \delta T_s d\theta \int_F \tilde{q}_s \frac{1}{\rho^3} \frac{dS}{t} + \frac{R_s^4}{G C_\omega^*} \int_0^{\Theta} T_w \delta T_w \int_F (\phi - S_\omega)^2 \frac{1}{\rho^3} \frac{dS}{t}$$

ここで、定数 ν を $\frac{1}{\nu} \equiv R_s^3 \frac{J_T^*}{C_\omega^{*2}} \int_F (\phi - S_\omega)^2 \frac{1}{\rho^3} \frac{dS}{t}$ (40)

で定義すると $J_T^* = R_s^3 \int_F \tilde{q}_s^2 \frac{1}{\rho^3} \frac{dS}{t}$ (41)

なる関係があるから、結局

$$\int_0^{\Theta} \int_F \frac{q \delta q}{G t} \rho dS d\theta = R_s \int_0^{\Theta} \frac{T_s \delta T_s}{G J_T^*} d\theta + R_s \int_0^{\Theta} \frac{T_w \delta T_w}{\nu G J_T^*} d\theta \quad (42)$$

(36 a~c)式を考慮すると、(32 a~c) 式、(33 a~c) 式と断面力の定義式とから、(30)式の第一項は、つぎのようになる。

$$\int_{Fe} (\tilde{u} \delta \sigma_\theta + \tilde{v} \delta \tau_{\rho\theta} + \tilde{w} \delta \tau_{\theta z}) t dS$$

$$= \left[u \delta N \right]_0^{\Theta} + \left[\mathcal{Q}_y \delta M_y \right]_0^{\Theta} + \left[\mathcal{Q}_z \delta M_z \right]_0^{\Theta} - \left[\chi \delta M_\omega^* \right]_0^{\Theta} + \left[\nu \delta q_y \right]_0^{\Theta} + \left[w \delta q_z \right]_0^{\Theta} + \left[\mathcal{Q}_x \delta T \right]_0^{\Theta} \quad (43)$$

(29 a~g) 式を用いて付帯条件式の部分積分を行ない、(39), (42), (43)式を(28)式に用いると、結局つぎの結果を得る。

$$\lambda_1 = u \quad \lambda_2 = v \quad \lambda_3 = w \quad \lambda_4 = \varphi_x = \varphi \quad \lambda_5 = \varphi_y \quad \lambda_6 = \varphi_z \quad \lambda_7 = -\chi \quad (44)$$

$$N = EA \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{d\lambda_1}{d\theta} + \lambda_2 \right) = EA \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\theta} + v \right) = EA \cdot \varepsilon \quad (45)$$

$$T_s = \frac{GJ_T^*}{R_s} \left(\frac{d\lambda_4}{d\theta} + \lambda_5 \right) = \frac{R}{R_s} \frac{GJ_T^*}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{1}{R} \frac{dw}{d\theta} \right) = \frac{R}{R_s} GJ_T^* \psi_x \quad (46)$$

$$T_\omega = \frac{1}{R_s} \nu GJ_T^* \left(\frac{d\lambda_4}{d\theta} + \lambda_5 + R_s \lambda_7 \right) = \frac{R}{R_s} \nu GJ_T^* \left(\psi_x - \frac{R_s}{R} \chi \right) \quad (47)$$

$$M_\omega^* = EC_\omega^* \frac{1}{R_s} \frac{d\lambda_7}{d\theta} = -EC_\omega^* \frac{1}{R_s} \frac{d\chi}{d\theta} \quad (48)$$

$$\frac{J_z M_y + J_{yz} M_z}{E(J_y J_z - J_{yz}^2)} = \frac{1}{R} \left(\frac{d\lambda_5}{d\theta} - \lambda_4 \right) = \frac{1}{R} \left(\varphi + \frac{1}{R} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) = \psi_y \quad (49)$$

$$\frac{J_{yz} M_y + J_y M_z}{E(J_y J_z - J_{yz}^2)} = \frac{1}{R} \frac{d\lambda_6}{d\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 v}{d\theta^2} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\theta} \right) = \psi_z \quad (50)$$

つぎに、断面力、変位を求めるための微分方程式を誘導する。外力として、沿直荷重 P_z とねじりモーメント m_x だけを考えると、 $M_z = 0, N = 0, Q_y = 0$ であるから計算は簡単になる。まず、(29 c,d,e) 式より

$$\frac{d^2 M_y}{d\theta^2} + M_y = -R(m_x + Rq_z) \quad (51)$$

(46), (47), (48)式より ψ_x を消去し(29,d) 式を用いると

$$\frac{d^2 M_\omega^*}{d\theta^2} - \mu^2 M_\omega^* = -KR_s(M_y + Rm_x) \quad (52)$$

ここに、

$$\mu^2 = R_s^2 \frac{\nu}{1+\nu} \frac{GJ_T^*}{EC_\omega^*} \quad K = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (53)$$

$$(35-b), (35-d) \text{ 式より } \quad \frac{d\psi_x}{d\theta} - \psi_y = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \varphi \right)$$

(46), (47), (48), (29,d) 式より $\frac{d\psi_x}{d\theta}$ を消去し、(49)式により ψ_y を消去すると

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \varphi = - \left\{ (1-K) \frac{R_s}{GJ_T^*} + \frac{RJ_z}{E(J_y J_z - J_{yz}^2)} \right\} M_y - \mu^2 \frac{M_\omega^*}{GJ_T^*} - \frac{RR_s}{GJ_T^*} (1-K) m_x \quad (54)$$

(35,b), (49)式より

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} = -R^2 \frac{J_z}{E(J_y J_z - J_{yz}^2)} M_y - R\varphi \quad (55)$$

桁の両端が単純支持の場合、境界条件は $\theta = 0$, $\theta = \pi$ で $w = 0$, $\varphi = 0$, $M_y = 0$, $M_\omega^* = 0$ であるから上記の方程式は容易に解ける。

w , φ が求まると (35,d) 式から ψ_x が求まり、(40)式から T_x が求まる。 M_ω^* が求まれば、(11)式より T_ω が求まるから、(28), (27)式より応力成分は既知になる。

なお、曲げにともなうせん断応力は、(29,e) 式から Q_x が既知になるから、曲げ垂直力との平衡条件から求められる。6),7)

4 結 語

そり変位の拘束が大きい閉断面の場合には、ねじれ率が一定でないことにより生じる二次せん断変形を無視することは妥当でない。この影響を、補正仮想仕事の原理を用いて近似的に解析し、円弧曲線材に対して、従来の曲げねじり理論の修正式を得た。なお、数値計算は目下進行中である。

文 献

- 1) Wagner, H. & Pretschner, W.: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Luftfahrt-Forschung, Band 11, 1934
- 2) Bornscheuer, F. W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Staebau, Band 21, 1952, Heft 1,
- 3) S. U. Benscoter: A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, Journal of Applied Mechanics March 1954
- 4) Heilig, R.: Beitrag Zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Der Stahlbau 30, 1961, H. 11
- 5) K. Roik & G. Sedlacek: Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen Der Stahlbau 1966, 2
- 6) 小西、小松: 薄肉曲線桁の基礎理論、土木学会論文集第87号
- 7) 深沢: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論、土木学会論文集第110号