

せん断中心軸の不連続性を考慮した 変断面薄肉曲線桁の解析法

深 沢 泰 晴*

1 緒 言

曲げに加えてねじりをも受ける変断面の薄肉材が鋼構造物の構造要素として使用されている例は随所に見受けられるが、それに対する構造解析の理論は現在必ずしも十分であるとは云えない。すなわち、曲げのみを受ける変断面材の問題は従来の多くの研究成果によって比較的容易に取り扱い得るが、曲げに加えて更にねじりをも受ける場合、換言すれば薄肉変断面材の曲げねじり問題の場合、特に断面定数の変化に加えてせん断中心の位置の変化をも伴うような場合には、従来の所謂変断面材としての単純な取り扱いだけでは不十分であり、本質的により複雑な現象として捉えなければならなくなる。

特にねじれが卓越する曲線桁においては、このようなせん断中心軸の不連続の影響は、なおざりにできないと思われる場合が少なくない。

例えば、図一1及び図一2に示すようなS字形に曲った桁橋の両円弧桁の接合断面、及び曲率の異なる連続曲線桁橋の中間支点断面においては、場合によっては

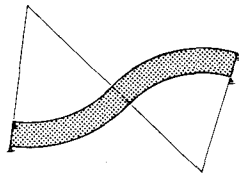


Fig. 1

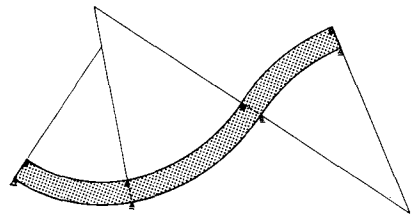


Fig. 2

せん断中心軸に水平方向の相当大きな違いが生ずる。このような場合には、その不連続の影響がかなり効いてくると推察される。

そこで本文ではこのような問題に対処する意味で、任意形状の薄肉断面を有する変断面曲線桁がその曲率面に垂直な荷重とねじりモーメント荷重を受ける問題、すなわち曲率面外への変形に関する変断面曲線桁の曲げねじり問題を、せん断中心軸の不連続性を考慮して解析する方法を提案する。先ず曲率一定の等断面薄肉曲線桁の Field Matrix並びに変断面桁の任意の接合条件及び支持条件を網羅したPoint Matrixを誘導し、これを用いた所謂 Reduction Methodによって解析を行なう。

直線桁の場合は曲線桁の特別な場合として取り扱うことができるし、また水平面内で任意に曲った曲線桁に対しては、近似的に幾つかの円弧桁に分割することによって本文に述べる解法を適用することができる。

2 曲線桁の基礎方程式

Fig. 3に示すように、変形前の曲率一定の等断面薄肉曲線材の各断面の中立点を連ねた軸線すなわち中立軸の曲率中心 O' を原点とし、 ζ 軸を曲線材の曲率中心線に一致させ、 $\rho-\theta$ 面を曲線材の曲率面に平行な面に一致させた円柱座標系($O' - \rho, \theta, \zeta$)を設定する。またFig. 4に示すように、曲線材の端断面($\theta=0$)の

* 山梨大学工学部土木工学科助教授

中立点 O を原点とし、
 ζ 軸に平行な x 軸、曲率中心方向に向う y 軸、中立軸に一致する z 軸をもつ座標系 ($O-x, y, z$) を定め、断面のせん断中心 S の座標を (x_s, y_s) とする。

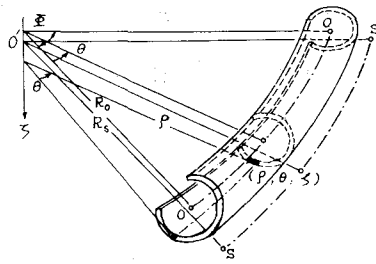


Fig. 3

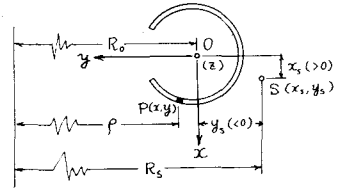


Fig. 4

曲線材の中立軸及びせん断中心軸の曲率半径をそれぞれ R_0 及び R_s とすると

$$x = \zeta, y = R_0 - \rho, z = R_0 \theta \quad \dots\dots\dots(1)$$

なお、曲線材の中立点 O 及びせん断中心 S については文献¹⁾²⁾³⁾を参照されたい。

さて、任意断面 (θ) における薄肉中心線上の任意点 (x, y) の母線方向の垂直歪 ϵ_θ はせん断中心軸の変形を用いて表わすと

$$\epsilon_\theta = \frac{R_s}{\rho} [\epsilon_z^* - (y - y_s) \kappa_x^* - (x - x_s) \kappa_y^* - \omega \vartheta_\omega^*] \quad \dots\dots\dots(2)$$

と書ける³⁾。ここに、 ω^* はせん断中心に関する曲線材の断面のそり函数²⁾³⁾を表わし、 $\epsilon_z^*, \kappa_x^*, \kappa_y^*$ 及び ϑ_ω^* はそれぞれ同断面におけるせん断中心軸の、伸び率、 x 軸まわりの曲率の変化、 y 軸まわりの曲率の変化及び曲げねじれ率を意味し、せん断中心点 S の x, y, z 方向への変位をそれぞれ u^*, v^*, w^* 、断面のねじれ回転角を φ と書くと、これらは次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{1}{R_s} \left(\frac{dw^*}{d\theta} - v^* \right), \quad \kappa_x^* = \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 v^*}{d\theta^2} + \frac{dw^*}{d\theta} \right) \\ \kappa_y^* &= \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 v^*}{d\theta^2} + R_s \varphi \right), \quad \vartheta_\omega^* = \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} - \frac{1}{R_s} \frac{d^2 v^*}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3)_{1-4}$$

なお、中立軸の垂直歪 ϵ_z とせん断中心軸の伸び率 ϵ_z^* との間には

$$\epsilon_z = \frac{R_s}{R_0} (\epsilon_z^* + y_s \kappa_x^* + x_s \kappa_y^*) \quad \dots\dots\dots(4)$$

なる関係があるので式(2)は次のようにも書ける³⁾

$$\epsilon_\theta = \frac{R_0}{\rho} \epsilon_z - \frac{R_s}{\rho} (y \kappa_x^* + x \kappa_y^* + \omega^* \vartheta_\omega^*) \quad \dots\dots\dots(5)$$

次に断面力と変形量との関係を求める。まず垂直応力に関する断面力は横断面積を F として次式で定義することができる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_F \sigma_\theta dF, & M_x &= \int_F \sigma_\theta y dF \\ M_y &= \int_F \sigma_\theta x dF, & M_\omega &= \int_F \sigma_\theta \omega^* dF \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)_{1-4}$$

したがって、式(5)、(6)及び $\sigma_\theta = E \epsilon_\theta$ から

$$\left. \begin{aligned} N_x &= E F \epsilon_z \\ M_x &= -\frac{R_s}{R_0} E (J_x \kappa_x^* + J_{xy} \kappa_y^*) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)_{1-4}$$

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -\frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} \kappa_x^* + J_y \kappa_y^*) \\ M_\omega^* &= -E C_\omega^* \vartheta_\omega^* \end{aligned} \right\}$$

を得ることができる。ここに、 $J_x, J_{xy}, J_y, C_\omega^*$ は曲線材の断面定数を表わし、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_F \frac{R_0}{\rho} y^2 dF, & J_{xy} &= \int_F \frac{R_0}{\rho} xy dF \\ J_y &= \int_F \frac{R_0}{\rho} x^2 dF, & C_\omega^* &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \omega^{*2} dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)_{1-4}$$

ねじりモーメント T_z^* については、St.Venant の単純ねじりモーメント T_s^* と反り拘束に随伴する2次ねじりモーメント T_ω^* との和で与えることができる。³⁾すなわち

$$\left. \begin{aligned} T_s^* &= G J_T^* \psi_z^*, & T_\omega^* &= -\frac{E C_\omega^*}{R_s} \cdot \frac{d \vartheta_\omega^*}{d \theta} \\ T_z^* &= T_s^* + T_\omega^* = G J_T^* - \frac{E C_\omega^*}{R_s} \cdot \frac{d \vartheta_\omega^*}{d \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)_{1-3}$$

ここに $G J_T^*$ は曲線材の単純ねじり剛性を表わす。³⁾また ψ_z^* はせん断中心軸のねじり率を意味し

$$\psi_z^* = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d \varphi}{d \theta} - \frac{1}{R_s} \frac{d v^*}{d \theta} \right) \dots\dots\dots (10)$$

特に、曲率面に垂直に作用する荷重のみを受け (Fig.5 参照)、また軸力の生じないような支点構造の曲線桁の場合だけを考えて

$$N_z = 0, \quad M_x = 0 \dots\dots\dots (11)_{1,2}$$

が成り立つので、これと式(7)_{2,3}より

$$M_y = -\frac{R_s}{R} E \bar{J}_y \kappa_y^* \dots\dots\dots (12)$$

を得る。ここに、

$$\bar{J}_y = J_y - \frac{J_{xy}^2}{J_x} \dots\dots\dots (13)$$

本文では曲線橋の主桁としての曲線桁の解析に主眼を置く意味で、式(11)、(12)が成立する場合にその対象を限定することにする。そこで、Fig.5 に示すような微小角 $d\theta$ に狭まれている曲線材の素片に作用する全ての力の平衡方程式を立てると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d Q_x^*}{d \theta} + R_s q_x^* &= 0 \\ \frac{d M_y}{d \theta} - T_z^* - R_s Q_x^* &= 0 \\ \frac{d T_z^*}{d \theta} + M_y + R_s m_z^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)_{1-3}$$

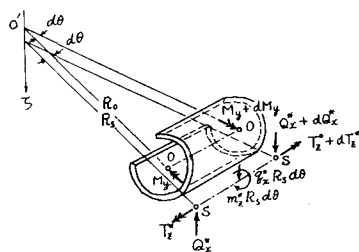


Fig.5

ここに、 Q_x^* は x 軸方向のせん断力を表わし、 q_x^*, m_z^* はそれぞれせん断中心軸の単位長さなりに作用する x 軸方向の荷重及びせん断中心軸のまわりのねじりモーメント荷重である。反モーメント M_ω^* はそれ自身でつり合っている力系であるから平衡方程式には現われない。

ここで、式(14)_{1,2}からせん断力 Q_x^* を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M_y}{d\theta^2} - \frac{dT_z^*}{d\theta} + R_z^2 q_z^* &= 0 \\ \frac{dT_z^*}{d\theta} + M_y + R_z m_z^* &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)_{1,2}$$

さらに、式(15)_{1,2}に式(12)、(9)₃、(3)_{3,4}、(10)を代入して、次のような曲線桁の曲率面外への変形に関する基礎微分方程式が得られる、

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{R_s}{R_0} E \bar{J}_y + \frac{E C_\omega^*}{R_s^2} \right) u^{*IV} - G J_T^* u^{*''''} \\ & - \frac{E C_\omega^*}{R_s} \varphi^{IV} + \left(G J_T^* + \frac{R_s}{R_0} E \bar{J}_y \right) R_s \varphi = R_s^3 q_z^* \\ & - \frac{E C_\omega^*}{R_s^2} u^{*IV} + \left(G J_T^* + \frac{R_s}{R_0} E \bar{J}_y \right) u^{*''} \\ & + \frac{E C_\omega^*}{R_s} \varphi^{IV} - G \bar{J}_T^* R_s \varphi'' + \frac{R_s}{R_0} E \bar{J}_y R_s \varphi = R_s^3 m_z^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)_{1,2}$$

式中の dash は θ に関する微分を意味する。

3 曲線桁の Field Matrix

一般に Field Matrix ははりの2断面間の基本状態量の関係を表わすものであるから、はりの基本微分方程式を知れば、その一般解の積分定数をはりの基本状態量の境界値で表わすことによって容易に求めることができる。したがって、それにはラプラス変換を用いて解くのが最も好都合である。

まず曲線桁の弾性方程式(16)_{1,2}を2つの無次元パラメータ

$$\alpha = \frac{R_0}{R_s} \cdot \frac{G J_T^*}{E \bar{J}_y} \quad , \quad \beta = \frac{R_0}{R_s} \cdot \frac{C_\omega^*}{R_s \bar{J}_y} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を導入して書きかえると

$$\left. \begin{aligned} (1+\beta) u^{*IV} - \alpha u^{*''''} - \beta R_s \varphi^{IV} + (1+\alpha) R_s \varphi'' &= \frac{R_0 R_s^3}{E \bar{J}_y} q_z^* \\ -\beta u^{*IV} + (1+\alpha) u^{*''} + \beta R_s \varphi^{IV} - \alpha R_s \varphi'' + R_s \varphi &= \frac{R_0 R_s^2}{E \bar{J}_y} m_z^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)_{1,2}$$

ここで、ラプラス変換のパラメータを p として、 $u^*(\theta)$ 及び $\varphi(\theta)$ のラプラス変換をそれぞれ $\bar{u}^*(p)$ 及び $\bar{\varphi}(p)$ と書き、すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}^*(p) &= \int_0^\infty e^{-p\theta} u^*(\theta) d\theta \\ \bar{\varphi}(p) &= \int_0^\infty e^{-p\theta} \varphi(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

として、式(18)_{1,2}の両辺にラプラス変換を施し、整理すると、 $\bar{u}^*(p)$ 、 $\bar{\varphi}(p)$ が次のように一次の連立式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} & [(1+\beta)p^2 - \alpha] p^2 \bar{u}^*(p) \\ & - [\beta p^2 - (1+\alpha)] p^2 R_s \bar{\varphi}(p) \\ & = [(1+\beta) u^*(0) - \beta R_s \varphi(0)] p^3 \\ & + [(1+\beta) u^{*'}(0) - \beta R_s \varphi'(0)] p^2 \\ & + [(1+\beta) u^{*''}(0) - \alpha u^*(0)] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta R_s \varphi''(0) + (1+\alpha) R_s \varphi(0) \} p \\
& + \{ (1+\beta) u^{*'''}(0) - \alpha u^{*'}(0) \\
& -\beta R_s \varphi'''(0) + (1+\alpha) R_s \varphi'(0) \} \\
& + \frac{R_0 R_s^3}{E \bar{J}_y} q_x^*(p) \\
& - \{ (\beta p^2 - (1+\alpha)) p^2 \bar{u}^*(p) \\
& + (\beta p^4 - \alpha p^2 + 1) R_s \bar{\varphi}(p) \\
& = - \{ \beta u^*(0) - \beta R_s \varphi(0) \} p^3 \\
& - \{ \beta u^{*'}(0) - \beta R_s \varphi'(0) \} p^2 - \{ \beta u^{*''}(0) - (1+\alpha) u^*(0) \\
& -\beta R_s \varphi''(0) + \alpha R_s \varphi(0) \} p \\
& - \{ \beta u^{*'''}(0) - (1+\alpha) u^{*'}(0) \\
& -\beta R_s \varphi'''(0) + \alpha R_s \varphi'(0) \} \\
& + \frac{R_0 R_s^2}{E \bar{J}_y} \bar{m}_z^*(p)
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $\bar{q}_x^*(p)$ 、 $\bar{m}_z^*(p)$ はそれぞれ $q_x^*(\theta)$ 、 $m_z^*(\theta)$ のラプラス変換を表わす。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_x^*(p) &= \int_0^\infty e^{-p\theta} q_x^*(\theta) d\theta \\ \bar{m}_z^*(p) &= \int_0^\infty e^{-p\theta} m_z^*(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

一方、曲線桁の面外変形に対する独立した8個の基本状態量として次のものを選ぶことにする；

$$\left. \begin{aligned}
& ① \quad u^*(\theta) \\
& ② \quad \varphi(\theta) \\
& ③ \quad \phi_y^*(\theta) = \frac{1}{R_s} u^{*'} \\
& ④ \quad \psi_z^*(\theta) = \frac{1}{R_s} \left(\varphi' - \frac{1}{R_s} u^{*'} \right) \\
& ⑤ \quad M_\omega^*(\theta) = -\frac{E C_\omega^*}{R_s} \left(\varphi'' - \frac{1}{R_s} u^{*''} \right) \\
& ⑥ \quad M_y(\theta) = -\frac{E \bar{J}_y}{R_0 R_s} (u^{*''} + R_s \varphi) \\
& ⑦ \quad T_z^* = \frac{G J_T^*}{R_s} \left(\varphi' - \frac{1}{R_s} u^{*'} \right) - \frac{E C_\omega^*}{R^3} \left(\varphi''' - \frac{1}{R_s} u^{*'''} \right) \\
& ⑧ \quad Q_z^* = \frac{1}{R_s} \left(\frac{dM_y}{d\theta} - T_z^* \right) \\
& \quad = -\frac{E \bar{J}_y}{R_0 R_s^2} (u^{*''} + R_s \varphi) - \frac{G J_T^*}{R_s^2} \left(\varphi' - \frac{1}{R_s} u^{*'} \right) \\
& \quad + \frac{E C_\omega^*}{R_s^3} \left(\varphi''' - \frac{1}{R_s} u^{*'''} \right)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)_{1-8}$$

ここに、 ϕ_y^* は $x-z$ 面に平行な面内におけるせん断中心軸の回転角を表わし、また式(22)₈は式(14)₂より得られたものである。

式(22)₁₋₈で示される基本状態量の境界値、すなわち $\theta=0$ における値で式(20)_{1,2}の右辺を表わすことを考

える。その結果は

$$\left. \begin{aligned}
 & [(1+\beta) p^2 - \alpha] p^2 \bar{u}^*(p) \\
 & - [\beta p^2 - (1+\alpha)] p^2 R_s \bar{\varphi}(p) \\
 & = [(1+\beta) p^2 - \alpha] p u^*(0) \\
 & - (\beta p^2 - \alpha) p R_s \varphi(0) \\
 & + p^2 R_s \phi_y^*(0) - \beta p^2 R_s^2 \psi_z^*(0) \\
 & + [(p M_\omega^*(0) - p R_s M_y(0) \\
 & - R_s^2 Q_x^*(0) + R_s^3 \bar{q}_x^*(p))] \frac{R_0}{E \bar{J}_y} \\
 & - [\beta p^2 - (1+\alpha)] p^2 \bar{u}^*(p) \\
 & + [\beta p^2 - \alpha p^2 + 1] R_s \bar{\varphi}(p) \\
 & = - [\beta p^2 - (1+\alpha)] p u^*(0) \\
 & + (\beta p^2 - \alpha) p R_s \varphi(0) \\
 & + R_s \phi_y^*(0) + \beta p^2 R_s^2 \psi_z^*(0) \\
 & - [p M_\omega^*(0) + R_s T_z^*(0) \\
 & - R_s^2 \bar{m}_z^*(p)] \frac{R_0}{E \bar{J}_y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)_{1,2}$$

これを解き、 $\bar{u}^*(p)$ 及び $\bar{\varphi}(p)$ を求めると

$$\left. \begin{aligned}
 u^*(p) &= \frac{1}{p} u^*(0) - \frac{1}{p(p^2+1)} R_s \varphi(0) + \frac{1}{p^2+1} R_s \phi_y^*(0) \\
 &- \frac{1}{(p^2+1)(p^2-\mu^2)} R_s^2 \psi_z^*(0) + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{p(p^2+1)(p^2-\mu^2)} \cdot \frac{R_0}{E \bar{J}_y} M_\omega^*(0) \\
 &- [\frac{p}{(1+p^2)^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{p(p^2+1)^2(p^2-\mu^2)}] \frac{R_0 R_s}{E \bar{J}_y} M_y(0) \\
 &- [\frac{1}{(1+p^2)^2} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-\mu^2)}] [T_z^*(0) - R_s m_z^*(p)] \frac{R_0 R_s}{E \bar{J}_y} \\
 &- [\frac{1}{(1+p^2)^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{p^2(p^2+1)^2(p^2-\mu^2)}] [Q_x^*(0) - R_s \bar{q}_x^*(p)] \frac{R_0 R_s^2}{E \bar{J}_y} \\
 R_s \bar{\varphi}(p) &= \frac{p}{p^2+1} R_s \varphi(0) + \frac{1}{p^2+1} R_s \phi_y^*(0) \\
 &+ \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-\mu^2)} R_s^2 \psi_z^*(0) - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{p}{(p^2+1)(p^2-\mu^2)} \cdot \frac{R_0}{E \bar{J}_y} M_\omega^*(0) \\
 &- [\frac{p}{(1+p^2)^2} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{p}{(p^2+1)^2(p^2-\mu^2)}] \frac{R_0 R_s}{E \bar{J}_y} M_y(0) \\
 &- [\frac{1}{(p^2+1)^2} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{p^2}{(p^2+1)^2(p^2-\mu^2)}] [T_z^*(0) - R_s \bar{m}_z^*(p)] \frac{R_0 R_s}{E \bar{J}_y} \\
 &- [\frac{1}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-\mu^2)}] [Q_x^*(0) - R_s \bar{q}_x^*(p)] \frac{R_0 R_s^2}{E \bar{J}_y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)_{1,2}$$

$$\text{ここに、} \quad \mu^2 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{G J_T^* R_s^2}{E C \phi^*} \dots\dots\dots (25)$$

さて、式 (24)_{1,2} にラプラスの逆変換を施すと、基本状態量の境界値を積分定数とした式 (18)_{1,2} の一般解

が得られ、その結果は次のように書ける、⁴⁾

$$\left. \begin{aligned}
 u^*(\theta) &= K_{uu}(\theta) u^*(0) + K_{u\varphi}(\theta) R_s \varphi(0) + K_{u\phi} R_s \phi_y^*(0) \\
 &\quad + K_{u\psi}(\theta) R_s^2 \psi_x^*(0) + [K_{u\omega}(\theta) M_\omega^*(0) + K_{uM}(\theta) R_s M_y(0) \\
 &\quad + K_{uT}(\theta) R_s T_x^*(0) + K_{uQ}(\theta) R_s^2 Q_x^*(0) + K_{u0}(\theta) R_s^2] \frac{R_0}{E J_y} \\
 R_s \varphi(\theta) &= K_{\varphi u}(\theta) u^*(0) + K_{\varphi\varphi}(\theta) R_s \varphi(0) + K_{\varphi\phi} R_s \phi_y^*(0) \\
 &\quad + K_{\varphi\psi}(\theta) R_s^2 \psi_x^*(0) + [K_{\varphi\omega}(\theta) M_\omega^*(0) + K_{\varphi M}(\theta) R_s M_y(0) \\
 &\quad + K_{\varphi T}(\theta) R_s T_x^*(0) + K_{\varphi Q}(\theta) R_s^2 Q_x^*(0) + K_{\varphi 0}(\theta) R_s^2] \frac{R_0}{E J_y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $K_{uj}(\theta)$, $K_{\varphi j}(\theta)$ ($j = u, \varphi, \phi, \psi, \omega, M, T, Q, 0$) は無次元量で次式で与えられる、

$$\left. \begin{aligned}
 K_{uu}(\theta) &= 1, K_{u\varphi}(\theta) = \cos \theta, K_{u\phi}(\theta) = \sin \theta \\
 K_{u\psi}(\theta) &= \frac{1}{1+\mu^2} (\sin \theta - \frac{1}{\mu} \sinh \mu \theta) \\
 K_{u\omega}(\theta) &= -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\mu^2 (1+\mu^2)} [(1+\mu^2) - \mu^2 \cos \theta - \cosh \mu \theta] \\
 K_{uM}(\theta) &= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2}) \theta \sin \theta \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\mu^2 (1+\mu^2)^2} [(1+\mu^2)^2 - \mu^2 (2+\mu^2) \cos \theta - \cosh \mu \theta] \\
 K_{uT}(\theta) &= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2}) (\sin \theta - \theta \cos \theta) \\
 &\quad - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(1+\mu^2)^2} (\sin \theta - \frac{1}{\mu} \sinh \mu \theta) \\
 K_{uQ}(\theta) &= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2}) (\sin \theta - \theta \cos \theta) \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\mu^2 (1+\mu^2)^2} [(1+\mu^2)^2 \theta - \mu^2 (2+\mu^2) \sin \theta \\
 &\quad - \frac{1}{\mu} \sinh \mu \theta]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_{\varphi u}(\theta) &= 0, K_{\varphi\varphi}(\theta) = \cos \theta, K_{\varphi\phi}(\theta) = \sin \theta \\
 K_{\varphi\psi}(\theta) &= \frac{1}{1+\mu^2} (\sin \theta + \mu \sinh \mu \theta) \\
 K_{\varphi M}(\theta) &= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2}) \theta \sin \theta \\
 &\quad - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(1+\mu^2)^2} (\cos \theta - \cosh \mu \theta) \\
 K_{\varphi T}(\theta) &= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2}) (\sin \theta - \theta \cos \theta) \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\mu^2}{(1+\mu^2)^2} (\sin \theta - \frac{1}{\mu} \sinh \mu \theta) \\
 K_{\varphi Q}(\theta) &= K_{uT}(\theta)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

特に、 $K_{u0}(\theta)$ 及び $K_{\varphi 0}(\theta)$ は $0 \sim \theta$ 間に作用する荷重に関する項で次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} K_{u0}(\theta) &= - \int_0^\theta K_{uQ}(\theta - \xi) q_z^*(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{R_s} \int_0^\theta K_{uT}(\theta - \xi) m_z^*(\xi) d\xi \\ K_{\varphi 0}(\theta) &= - \int_0^\theta K_{\varphi Q}(\theta - \xi) q_z^*(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{R_s} \int_0^\theta K_{\varphi T}(\theta - \xi) m_z^*(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

u^*, φ を知れば、他の基本状態量 $\phi_y^*, \psi_z^*, M_\omega^*, M_y^*, T_z^*, Q_z^*$ 等は式 (22)₃₋₈ により容易に求まる。その結果を、曲線桁の面外変形に関する Field Matrix を F として、マトリックス表示すれば

$$U(\theta) = F(\theta) U(0) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ただし、

$$F(\theta) = C^{-1} K(\theta) C \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} u^*(\theta) \\ \varphi(\theta) \\ \phi_y^*(\theta) \\ \psi_z^*(\theta) \\ M_\omega^*(\theta) \\ M_y(\theta) \\ T_z^*(\theta) \\ Q_z^*(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad U(0) = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ \varphi(0) \\ \phi_y^*(0) \\ \psi_z^*(0) \\ M_\omega^*(0) \\ M_y(0) \\ T_z^*(0) \\ Q_z^*(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & R_s & & & & & & & \\ & & R_s & & & & & & \\ & & & R_s^2 & & & & & \\ & & & & \frac{R_0}{E \bar{J}_y} & & & & \\ & & & & & \frac{R_0 R_s}{E \bar{J}_y} & & & \\ & & & & & & \frac{R_0 R_s}{E \bar{J}_y} & & \\ & & & & & & & \frac{R_0 R_s^2}{E \bar{J}_y} & \\ & & & & & & & & \frac{R_0 R_s^3}{E \bar{J}_y} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$K(\theta) = \begin{bmatrix} K_{uu}(\theta) & K_{u\varphi}(\theta) & K_{u\phi}(\theta) & K_{u\psi}(\theta) & K_{u\omega}(\theta) & K_{uM}(\theta) & K_{uT}(\theta) & K_{uQ}(\theta) & K_{u0}(\theta) \\ K_{\varphi u}(\theta) & K_{\varphi\varphi}(\theta) & K_{\varphi\phi}(\theta) & K_{\varphi\psi}(\theta) & K_{\varphi\omega}(\theta) & K_{\varphi M}(\theta) & K_{\varphi T}(\theta) & K_{\varphi Q}(\theta) & K_{\varphi 0}(\theta) \\ K_{\phi u}(\theta) & K_{\phi\varphi}(\theta) & K_{\phi\phi}(\theta) & K_{\phi\psi}(\theta) & K_{\phi\omega}(\theta) & K_{\phi M}(\theta) & K_{\phi T}(\theta) & K_{\phi Q}(\theta) & K_{\phi 0}(\theta) \\ K_{\psi u}(\theta) & K_{\psi\varphi}(\theta) & K_{\psi\phi}(\theta) & K_{\psi\psi}(\theta) & K_{\psi\omega}(\theta) & K_{\psi M}(\theta) & K_{\psi T}(\theta) & K_{\psi Q}(\theta) & K_{\psi 0}(\theta) \\ K_{\omega u}(\theta) & K_{\omega\varphi}(\theta) & K_{\omega\phi}(\theta) & K_{\omega\psi}(\theta) & K_{\omega\omega}(\theta) & K_{\omega M}(\theta) & K_{\omega T}(\theta) & K_{\omega Q}(\theta) & K_{\omega 0}(\theta) \\ K_{Mu}(\theta) & K_{M\varphi}(\theta) & K_{M\phi}(\theta) & K_{M\psi}(\theta) & K_{M\omega}(\theta) & K_{MM}(\theta) & K_{MT}(\theta) & K_{MQ}(\theta) & K_{M0}(\theta) \\ K_{Tu}(\theta) & K_{T\varphi}(\theta) & K_{T\phi}(\theta) & K_{T\psi}(\theta) & K_{T\omega}(\theta) & K_{TM}(\theta) & K_{TT}(\theta) & K_{TQ}(\theta) & K_{T0}(\theta) \\ K_{Qu}(\theta) & K_{Q\varphi}(\theta) & K_{Q\phi}(\theta) & K_{Q\psi}(\theta) & K_{Q\omega}(\theta) & K_{QM}(\theta) & K_{QT}(\theta) & K_{QQ}(\theta) & K_{Q0}(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

さらに、 K の要素のうち、 $K_{uj}(\theta)$ 、 $K_{\varphi j}(\theta)$ を除いた要素の値は式(22)₃₋₈ から得られる次の関係式に式(27)、(28)、(29)で与えられている諸式を代入して求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} K_{\phi j}(\theta) &= K'_{uj}(\theta) \\ K_{\phi j}(\theta) &= K'_{\varphi j}(\theta) - K'_{uj}(\theta) = K'_{\varphi j}(\theta) - K_{\phi j}(\theta) \\ K_{\omega j}(\theta) &= -\beta [K''_{\varphi j}(\theta) - K''_{uj}(\theta)] = -\beta K''_{\phi j}(\theta) \\ K_{Mj}(\theta) &= -[K''_{uj}(\theta) + K_{\varphi j}(\theta)] = -K'_{\phi j}(\theta) - K_{\varphi j}(\theta) \\ K_{Tj}(\theta) &= \alpha [K'_{\varphi j}(\theta) - K'_{uj}(\theta)] - \beta [K'''_{\varphi j}(\theta) - K'''_{uj}(\theta)] \\ &= \beta [\mu^2 K_{\phi j}(\theta) + K'_{\omega j}(\theta)] \\ K_{Qj} &= -(K'''_{uj}(\theta) + K'_{\varphi j}(\theta)) - \alpha [K'_{\varphi j}(\theta) - K_{uj}(\theta)] \\ &\quad + \beta [K'''_{\varphi j}(\theta) - K'''_{uj}(\theta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

すなわち、⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} K_{\phi u}(\theta) &= 0, K_{\phi\varphi}(\theta) = -\sin\theta, K_{\phi\phi} = \cos\theta \\ K_{\phi\phi}(\theta) &= \frac{1}{1+\mu^2} (\cos\theta - \cosh\mu\theta) \\ K_{\phi\omega}(\theta) &= -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2} (\sin\theta - \frac{1}{\mu} \sinh\mu\theta) \\ K_{\phi M}(\theta) &= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1+\mu^2}) (\sin\theta + \theta \cos\theta) \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(1+\mu^2)^2} [(2+\mu^2) \sin\theta - \frac{1}{\mu} \sinh\mu\theta] \\ K_{\phi T}(\theta) &= K_{\varphi M}(\theta), K_{\phi Q}(\theta) = K_{uM}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{\phi u}(\theta) &= K_{\phi\varphi}(\theta) = K_{\phi\phi}(\theta) = 0 \\ K_{\phi\phi}(\theta) &= \cosh\mu\theta, K_{\phi\omega}(\theta) = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\mu} \sinh\mu\theta \\ K_{\phi M}(\theta) &= K_{\phi\omega}(\theta), K_{\phi T}(\theta) = K_{\varphi\omega}(\theta) \\ K_{\phi Q}(\theta) &= K_{u\omega}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{\omega u}(\theta) &= K_{\omega \varphi}(\theta) = K_{\omega \phi}(\theta) = 0 \\ K_{\omega \phi}(\theta) &= -\beta \mu \sinh \mu \theta, \quad K_{\omega \omega}(\theta) = K_{\phi \phi}(\theta) \\ K_{\omega M}(\theta) &= K_{\phi \phi}(\theta), \quad K_{\omega T}(\theta) = K_{\varphi \phi}(\theta) \\ K_{\omega Q}(\theta) &= K_{u \phi}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{Mu}(\theta) &= K_{M \varphi}(\theta) = K_{M \phi}(\theta) \\ &= K_{M \phi}(\theta) = K_{M \omega}(\theta) = 0 \\ K_{MM}(\theta) &= K_{\phi \phi}(\theta), \quad K_{MT}(\theta) = K_{\varphi \phi}(\theta) \\ K_{MQ}(\theta) &= K_{u \phi}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{Tu}(\theta) &= K_{T \varphi}(\theta) = K_{T \phi}(\theta) \\ &= K_{T \phi}(\theta) = K_{T \omega}(\theta) = 0 \\ K_{TM}(\theta) &= K_{\phi \varphi}(\theta), \quad K_{TT}(\theta) = K_{\varphi \varphi}(\theta) \\ K_{TQ}(\theta) &= K_{u \varphi}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{Qu}(\theta) &= K_{Q \varphi}(\theta) = K_{Q \phi}(\theta) = K_{Q \phi}(\theta) \\ &= K_{Q \omega}(\theta) = K_{QM}(\theta) = K_{QT}(\theta) = 0 \\ K_{QQ}(\theta) &= K_{uu}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

さらに、荷重に関する要素 $K_{i0}(\theta)$ は式 (29) と同形の表式となり、

$$\begin{aligned} K_{i0}(\theta) &= -\int_0^\theta K_{iQ}(\theta - \xi) q_z^*(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{R_s} \int_0^\theta K_{iT}(\theta - \xi) m_z^*(\xi) d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots (42)$$

ただし、 $i = \phi, \psi, \omega, M, T, Q$

以上で曲線桁の曲率面外への変形に関する Field Matrix は得られたわけであるが、Fig.3 と逆方向の曲率を有する場合には式 (31) の右辺の各要素において、 R_0, R_s 及び θ の符号をかえればよい。

なお、式 (34) で与えられたマトリックス K は、式 (36) ~ (41) を考慮すると結局次のように表わすことができる。

$$K(\theta) = \left[\begin{array}{cccccccc|cccc} K_{uu}(\theta) & K_{u\varphi}(\theta) & K_{u\phi}(\theta) & K_{u\phi}(\theta) & K_{u\omega}(\theta) & K_{uM}(\theta) & K_{uT}(\theta) & K_{uQ}(\theta) & K_{u0}(\theta) & & & \\ 0 & K_{\varphi\varphi}(\theta) & K_{\varphi\phi}(\theta) & K_{\varphi\phi}(\theta) & K_{\varphi\omega}(\theta) & K_{\varphi M}(\theta) & K_{\varphi T}(\theta) & & K_{\varphi0}(\theta) & & & \\ 0 & K_{\phi\phi}(\theta) & K_{\phi\phi}(\theta) & K_{\phi\phi}(\theta) & K_{\phi\omega}(\theta) & K_{\phi M}(\theta) & & & K_{\phi0}(\theta) & & & \\ 0 & 0 & 0 & K_{\phi\phi}(\theta) & K_{\phi\omega}(\theta) & & & & K_{\phi0}(\theta) & & & \\ 0 & 0 & 0 & K_{\omega\phi}(\theta) & & & & & K_{\omega0}(\theta) & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & K_{M0}(\theta) & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & K_{T0}(\theta) & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & K_{Q0}(\theta) & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & \end{array} \right] \dots\dots\dots (34)'$$

4 曲線桁の Point Matrix

先ず断面の急変部すなわち左右両桁の接合部における変形の連続の条件を求める。任意に定めた定点 D を原点とし、 x 及び y 軸にそれぞれ平行な $\bar{x}$ 及び $\bar{y}$ 軸と D 点を通る母線と一致する $\bar{z}$ 軸を有する座標系 ($D-\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) における左右両桁のせん断中心 S_l 及び S_r の座標をそれぞれ $(\bar{x}_{sl}, \bar{y}_{sl})$ 及び $(\bar{x}_{sr}, \bar{y}_{sr})$ とする。同様に、両桁の接合部における左右両桁のそれぞれに属する状態量に対して、suffix l 及び r を付して両者を区別して表わすことにする。

接合断面上の任意点 $P(\bar{x}_p, \bar{y}_p)$ の $\bar{x}$ 軸方向への変位 u_p は

$$u_p = u_l^* - (\bar{y}_p - \bar{y}_{sl}) \phi_l \quad \dots \dots \dots (43)$$

或は $u_p = u_r^* - (\bar{y}_p - \bar{y}_{sr}) \phi_r \quad \dots \dots \dots (44)$

断面のねじれ回転角は両桁に共通であるから、これを ϕ とかくと

$$\phi = \phi_l = \phi_r \quad \dots \dots \dots (45)$$

したがって、式 (43)~(45) より

$$u_r^* = u_l^* - \Delta y_s \phi \quad \dots \dots \dots (46)$$

ここに、 $\Delta y_s = \bar{y}_{sr} - \bar{y}_{sl} \quad \dots \dots \dots (47)$

u_l^* と u_r^* との関係を知れば、左右両桁のせん断中心軸の曲率半径を R_{sl} 及び R_{sr} とし、式 (46) と $R_{sl} = R_{sr} + \Delta y_s$ とを考慮して、 ϕ_{yl}^* と ϕ_{yr}^* との関係が次のように求まる、

$$\begin{aligned} \phi_{yr}^* &= \frac{1}{R_{sr}} \cdot \frac{d u_r^*}{d \theta} \\ &= \frac{1}{R_{sr}} \cdot \frac{d}{d \theta} (u_l^* - \Delta y_s \phi) \\ &= \frac{R_{sr} + \Delta y_s}{R_{sr}} \cdot \frac{1}{R_{sl}} \frac{d u_l^*}{d \theta} - \frac{\Delta y_s}{R_{sr}} \cdot \frac{d \phi}{d \theta} \\ &= \frac{1}{R_{sl}} \cdot \frac{d u_l^*}{d \theta} - \frac{\Delta y_s}{R_{sr}} \left(\frac{d \phi}{d \theta} - \frac{1}{R_{sl}} \frac{d u_l^*}{d \theta} \right) \end{aligned}$$

故に、

$$\phi_{yr}^* = \phi_{yl}^* - \frac{R_{sl}}{R_{sr}} \Delta y_s \psi_{zl}^* \quad \dots \dots \dots (48)$$

また、 ψ_{zl}^* と ψ_{zr}^* との関係は

$$\begin{aligned} \psi_{zr}^* &= \frac{1}{R_{sr}} \left(\frac{d \phi}{d \theta} - \frac{1}{R_{sr}} \frac{d u_r^*}{d \theta} \right) \\ &= \frac{1}{R_{sr}} \left[\frac{d \phi}{d \theta} - \frac{1}{R_{sr}} \frac{d}{d \theta} (u_l^* - \Delta y_s \phi) \right] \\ &= \frac{1}{R_{sr}} \left[\left(1 + \frac{\Delta y_s}{R_{sr}} \right) \frac{d \phi}{d \theta} - \frac{1}{R_{sr}} \cdot \frac{d u_l^*}{d \theta} \right] \\ &= \frac{R_{sl}}{R_{sr}^2} \left(\frac{d \phi}{d \theta} - \frac{1}{R_{sl}} \frac{d u_l^*}{d \theta} \right) \end{aligned}$$

故に、

$$\psi_{zr}^* = \frac{R_{sl}^2}{R_{sr}^2} \psi_{zl}^* \quad \dots \dots \dots (49)$$

次に、左右両桁の接合部における断面力の連続条件を求める。Fig. 6 に示すように、両桁に作用する断面力

のつり合い条件より

$$\left. \begin{aligned} Q_{xr}^* &= Q_{xl}^* \\ T_{zr}^* &= T_{zl}^* + \Delta y_s Q_{xl}^* \\ M_{yr} &= M_{yl} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)_{1-3}$$

$M_{\omega l}^*$ と $M_{\omega r}^*$ との関係は仮想仕事の原理より求めることができる。⁵⁾ 仮想変形の系として、

$$u_l^* = \varphi_l = \phi_{xl}^* = 0 \quad , \quad \psi_{zl}^* = 1$$

なる系を選ぶと、式 (45), (46), (48), (49) より

$$u_r^* = \varphi_r = 0 \quad , \quad \phi_{yr}^* = -\frac{R_{sl}}{R_{sr}} \Delta y_s$$

$$\psi_{xr}^* = \frac{R_{sl}^2}{R_{sr}^2}$$

したがって、

$$1 \times M_{\omega l}^* - \frac{R_{sl}^2}{R_{sr}^2} \times M_{\omega r}^* - \left(-\frac{R_{sl}}{R_{sr}} \Delta y_s \right) \times M_{yr} = 0$$

すなわち

$$M_{\omega r}^* = \frac{R_{sl}^2}{R_{sr}^2} M_{\omega l}^* + \frac{R_{sr}}{R_{sl}} \Delta y_s M_{yl} \dots\dots\dots (51)$$

さて、一般に桁の接合部あるいは支承部においては、これまで求めてきた断面の変化に対する連続の条件の他に、更に次のような条件が考慮されなければならない。すなわち、これらの断面においては、基本状態量の一つあるいは数個に不連続的な変化が起る。したがって、通常考えられる全ての接合構造並びに支承構造の機能を同時に有しているような場合を対象にすると、その断面における左右両桁の基本状態量の連続の条件は

$$\left. \begin{aligned} u_r^* &= u_l^* + \Delta u^* & , & & \varphi &= \varphi_l + \Delta \varphi \\ \phi_{yr}^* &= \phi_{yl}^* + \Delta \phi_y^* & , & & \psi_{zr}^* &= \psi_{zl}^* + \Delta \psi_z^* \\ M_{\omega r}^* &= M_{\omega l}^* + \Delta M_{\omega}^* & , & & M_{yr} &= M_{yl} + \Delta M_y \\ T_{zr}^* &= T_{zl}^* + \Delta T_z^* & , & & Q_{xr}^* &= Q_{xl}^* + \Delta Q_x^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

ここに、 Δu^* , $\Delta \varphi$, $\Delta \phi_y^*$, $\Delta \psi_z^*$, ΔM_{ω}^* , ΔM_y , ΔT_z^* , ΔQ_x^* はそれぞれ対応する各基本状態量の不連続量を表わしている。なお、ここではばね支持構造の場合は煩雑を避けるために除外したが、そのような場合も容易に式 (52) の中に組み入れることができる。

結局、以上の二者すなわち、式 (45)～(51) と式 (52) とを重ね合せて、桁の接合部並びに支承部における基本状態量の連続条件式は、断面に変化のある場合も含めて、一般的に次のようにマトリックス表示することができる。

$$U_r = P U_l \dots\dots\dots (53)$$

ここに、

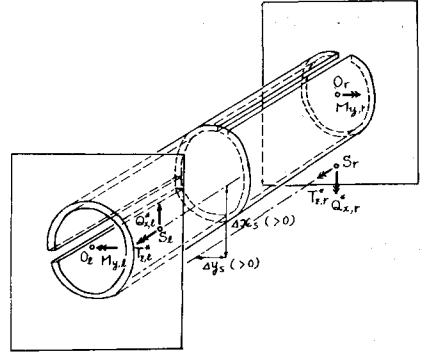


Fig. 6

$$U_r = \begin{bmatrix} u_r^* \\ \varphi_r \\ \phi_{yr}^* \\ \psi_{zr}^* \\ M_{\omega r}^* \\ M_{yr}^* \\ T_{zr}^* \\ Q_{xr}^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad U_l = \begin{bmatrix} u_l^* \\ \varphi_l \\ \phi_{yl}^* \\ \psi_{zl}^* \\ M_{\omega l}^* \\ M_{yl}^* \\ T_{zl}^* \\ Q_{xl}^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta y_s & & & & & & & \Delta u^* \\ & 1 & & & & 0 & & & \Delta \varphi \\ & & 1 & -(R_{sl}/R_{sr}) \Delta y_s & & & & & \Delta \phi_y^* \\ & & & R_{sl}^2/R_{sr}^2 & & & & & \Delta \psi_z^* \\ & & & & R_{sr}^2/R_{sl}^2 & (R_{sr}/R_{sl}) \Delta y_s & & & \Delta M_{\omega}^* \\ & & & & & 1 & & & \Delta M_y \\ & & 0 & & & & 1 & \Delta y_s & \Delta T_z^* \\ & & & & & & & 1 & \Delta Q_x^* \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (55)$$

このマトリックス P は、求めるべき曲線桁の面外変形に関する Point Matrix にほかならない。

5 変断面曲線桁構造の計算

3 及び 4 で得られた Field Matrix 及び Point Matrix を用い、所謂 Reduction Method を適用すると、曲率面に垂直な荷重及びねじりモーメント荷重を受ける変断面曲線桁構造は、これを容易に解くことができる。

例えば、Fig. 7 に示すように、変断面曲線桁が合計 $n+1$ ケの境界すなわち、断面急変部、ヒンジなどのような桁の接合部並びに支承部を有しており、これらの境界によって分割された n ケの分割桁から成っているとす。いま、第 k 番

目の分割桁の Field Matrix $F_k(\theta_k)$ を単に F_k 、第 k

番目の分割桁と第 $k+1$ 番目の分割桁との境界の右側断面の基本状態量 $U_{k,r}$ を単に U_k (ただし、 U_n のみ $U_{n,l}$ を表わす) とかくことにすると、式 (30) 及び式 (53) を参照して

$$U_{k,l} = F_k U_{k-1,r}$$

$$U_{k,r} = P_k U_{k,l} = P_k F_k U_{k-1,r}$$

すなわち、

$$U_k = P F U_{k-1} \quad \dots\dots\dots (56)$$

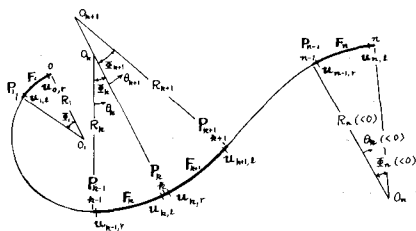


Fig. 7

したがって、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= P_1 F_1 u_0 = {}_1 T u_0 \\ u_2 &= P_2 F_2 u_1 \\ &= P_2 F_2 P_1 F_1 u_0 = {}_2 T u_0 \\ &\dots\dots\dots \\ u_{n-1} &= P_{n-1} F_{n-1} u_{n-2} \\ &= P_{n-1} F_{n-1} \dots\dots\dots P_2 F_2 P_1 F_1 u_0 = {}_{n-1} T u_0 \\ u_n &= F_n u_{n-1} \\ &= F_n P_{n-1} F_{n-1} \dots\dots\dots P_2 F_2 P_1 F_1 u_0 = {}_n T u_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

ここに、 ${}_k T$ ($k=1, 2, \dots, n$) は桁の左端から境界 k の右側断面までにかかる Transfer Matrix を表わしている。いま、 ${}_k T$ の要素を 0 要素を考慮して次のように書くことにする、

$${}_k T = \begin{pmatrix} {}_k T_{uu} & {}_k T_{u\varphi} & {}_k T_{u\phi} & {}_k T_{u\omega} & {}_k T_{uM} & {}_k T_{uT} & {}_k T_{uQ} & {}_k T_{u0} \\ {}_k T_{\varphi\varphi} & {}_k T_{\varphi\phi} & {}_k T_{\varphi\omega} & {}_k T_{\varphi M} & {}_k T_{\varphi T} & {}_k T_{\varphi Q} & {}_k T_{\varphi 0} \\ {}_k T_{\phi\varphi} & {}_k T_{\phi\phi} & {}_k T_{\phi\omega} & {}_k T_{\phi M} & {}_k T_{\phi T} & {}_k T_{\phi Q} & {}_k T_{\phi 0} \\ & {}_k T_{\phi\phi} & {}_k T_{\phi\omega} & {}_k T_{\phi M} & {}_k T_{\phi T} & {}_k T_{\phi Q} & {}_k T_{\phi 0} \\ & {}_k T_{\omega\phi} & {}_k T_{\omega\omega} & {}_k T_{\omega M} & {}_k T_{\omega T} & {}_k T_{\omega Q} & {}_k T_{\omega 0} \\ & 0 & & {}_k T_{MM} & {}_k T_{MT} & {}_k T_{MQ} & {}_k T_{M0} \\ & & & {}_k T_{TM} & {}_k T_{TT} & {}_k T_{TQ} & {}_k T_{T0} \\ & & & & & {}_k T_{QQ} & {}_k T_{Q0} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (58)$$

最終列の要素 ${}_k T_{u0}$, ${}_k T_{\varphi 0}$, $\dots$, ${}_k T_{Q0}$ は荷重に関係する量 (荷重項) である。

式 (57) の右辺に含まれる未知量すなわち、桁の左端断面の基本状態量 u_0 と Point Matrix P に含まれる中間境界断面における基本状態量の不連続値とは、桁の左右両端における境界条件と不連続値を生みだした中間境界断面における所謂中間条件とから決定することができる。これらの未知量を知れば、式 (57) の右辺は全て既知の量となり、したがって同式によって各分割桁の初期値 u_k が求まり、更に式 (30) によって各分割桁の任意断面の基本状態量が定まる。

なお、基本状態量の不連続値 Δu^* , $\Delta \varphi$, $\Delta \phi_y^*$, $\Delta \psi_z^*$, ΔM_ω^* , ΔM_y , ΔT_z^* , ΔQ_x^* が生ずるような中間境界断面における中間条件としては、それぞれ順序を対応させて書くと

$$\begin{aligned} Q_x^* &= T_z^* = M_y^* = M_\omega^* \\ -\psi_z^* &= \phi_y^* = \varphi = u^* = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (59)$$

が成り立つ。

以上は桁の断面が急変する場合の変断面桁を扱ってきたわけであるが、連続的に変化する変断面桁の場合には、桁を適当数の小桁に分割し、その分割桁をそれぞれの平均断面で代表させ、これまで述べた解法を適用すればよい。

次に、未知量の決定を変断面の単一桁構造を例にとって示そう。

例1. 単径間S字形変断面曲線桁 (Fig.1)

Fig. 8に示すように、8種の断面よりなる変断面桁とすると、式 (57)

より

$$\begin{aligned} u_8 &= F_3 P_7 F_7 \cdots P_2 F_2 P_1 F_1 u_0 \\ &= {}_s T u_0 \end{aligned} \quad \cdots \cdots (60)$$

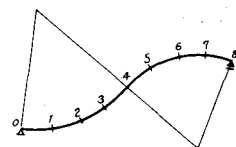


Fig. 8

この場合には、全ての中間境界断面において、基本状態量には未知量としての不連続値は生じないので、Point Matrix P_k ($k=1, 2, \dots, 7$) は Δu^* , $\Delta \varphi$, $\dots$, ΔQ_x^* 等はいっさい含まない。

左支点の境界条件は

$$u_0^* = \varphi_0 = M_{\omega,0}^* = M_{y,0} = 0 \quad \cdots \cdots (61)$$

したがって、この場合の未知量は左支点断面における残りの基本状態量すなわち $\phi_{y,0}^*$, $\psi_{z,0}^*$, $T_{z,0}^*$, $Q_{x,0}^*$ の4ヶである。これらの未知量は右支点の境界条件

$$u_8^* = \varphi_8 = M_{\omega,8}^* = M_{y,8} = 0 \quad \cdots \cdots (62)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_8 \\ \varphi_8 \\ M_{\omega,8}^* \\ M_{y,8} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_s T_{u\phi} & {}_s T_{u\psi} & {}_s T_{uT} & {}_s T_{uQ} & {}_s T_{u0} \\ {}_s T_{\phi\phi} & {}_s T_{\phi\psi} & {}_s T_{\phi T} & {}_s T_{\phi Q} & {}_s T_{\phi 0} \\ 0 & {}_s T_{\omega\phi} & {}_s T_{\omega T} & {}_s T_{\omega Q} & {}_s T_{\omega 0} \\ 0 & 0 & {}_s T_{MT} & {}_s T_{MQ} & {}_s T_{M0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{y,0}^* \\ \psi_{z,0}^* \\ T_{z,0}^* \\ Q_{x,0}^* \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots \cdots (63)$$

によって定まる。 ${}_s T_{u0}$, ${}_s T_{\phi 0}$, ${}_s T_{\omega 0}$, ${}_s T_{M0}$ は荷重項である。

例2. 3径間連続変断面曲線桁 (Fig.2)

Fig. 9に示すように、側径間が4種、主径間が6種、合計14種の断面からなる変断面桁とすると、式 (57) より

$$\left. \begin{aligned} u_4 &= F_4 P_3 F_3 P_2 F_2 P_1 F_1 u_0 = {}_4 T u_0 \\ u_{10} &= F_{10} P_9 F_9 \cdots P_1 F_1 u_0 = {}_{10} T u_0 \\ u_{14} &= F_{14} P_{13} F_{13} \cdots P_1 F_1 u_0 = {}_{14} T u_0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (64)$$

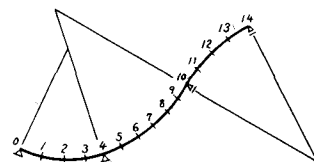


Fig. 9

この場合には、中間支点においてのみ基本状態量 T_z^* 及び Q_x^* に未知量として不連続値が生ずるので、Point Matrix P_k 及び P_{10} のみそれぞれ $\Delta T_{z,4}^*$, $\Delta Q_{x,4}^*$ 及び $\Delta T_{z,10}^*$, $\Delta Q_{x,10}^*$ を含む。

左端支点の境界条件は式 (61) と同一であるので、結局この場合の未知量は、左端支点断面における残りの基本状態量 $\phi_{y,0}^*$, $\psi_{z,0}^*$, $T_{z,0}^*$, $Q_{x,0}^*$ 並びに、中間支点断面における基本状態量の不連続値 $\Delta T_{z,4}^*$, $\Delta Q_{x,4}^*$, $\Delta T_{z,10}^*$, $\Delta Q_{x,10}^*$ の合計8ヶである。これらの未知量を定める条件式は、右端支点における境界線分

$$u_{14}^* = \varphi_{14} = M_{\omega,14}^* = M_{y,14} = 0 \quad \cdots \cdots (65)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_{14}^* \\ \varphi_{14} \\ M_{\omega,14}^* \\ M_{y,14} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_{14}T_{u\phi} & {}_{14}T_{u\phi} & {}_{14}T_{uT} & {}_{14}T_{uQ} & {}_{14}T_{u0} \\ {}_{14}T_{\phi\phi} & {}_{14}T_{\phi\phi} & {}_{14}T_{\phi T} & {}_{14}T_{\phi Q} & {}_{14}T_{\phi 0} \\ 0 & {}_{14}T_{\omega\phi} & {}_{14}T_{\omega T} & {}_{14}T_{\omega Q} & {}_{14}T_{\omega 0} \\ 0 & 0 & {}_{14}T_{MT} & {}_{14}T_{MQ} & {}_{14}T_{M0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{y,0}^* \\ \psi_{z,0}^* \\ T_{z,0}^* \\ Q_{x,0}^* \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (66)$$

並びに、中間支点における中間条件

$$u_4^* = \varphi_4 = u_{10}^* = \varphi_{10} = 0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} u_4^* \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_4T_{u\phi} & {}_4T_{u\phi} & {}_4T_{uT} & {}_4T_{uQ} & {}_4T_{u0} \\ {}_4T_{\phi\phi} & {}_4T_{\phi\phi} & {}_4T_{\phi T} & {}_4T_{\phi Q} & {}_4T_{\phi 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{y,0}^* \\ \psi_{z,0}^* \\ T_{z,0}^* \\ Q_{x,0}^* \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$\begin{pmatrix} u_{10}^* \\ \varphi_{10}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_{10}T_{u\phi} & {}_{10}T_{u\phi} & {}_{10}T_{uT} & {}_{10}T_{uQ} & {}_{10}T_{u0} \\ {}_{10}T_{\phi\phi} & {}_{10}T_{\phi\phi} & {}_{10}T_{\phi T} & {}_{10}T_{\phi Q} & {}_{10}T_{\phi 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{y,0}^* \\ \psi_{z,0}^* \\ T_{z,0}^* \\ Q_{x,0}^* \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (69)$$

以上の合計 8 ケの連立式によって定まる。なお、 ${}_{14}T_{u,0}$ 、 ${}_{14}T_{\phi 0}$ 、 ${}_{14}T_{\omega,0}$ 、 ${}_{14}T_{M0}$ は $\Delta T_{z,4}^*$ 、 $\Delta Q_{x,4}^*$ 、 $\Delta T_{z,10}^*$ 、 $\Delta Q_{x,10}^*$ を含む項と荷重項との和であり、 ${}_{10}T_{u0}$ 、 ${}_{10}T_{\phi 0}$ は $\Delta T_{z,4}^*$ 、 $\Delta Q_{x,4}^*$ を含む項と荷重項との和であり、 ${}_4T_{u0}$ 、 ${}_4T_{\phi 0}$ は荷重項のみからなる。

以上 2 例の数値計算例は紙数の制限上割愛するが、発表会の席上で報告できると思う。

参 考 文 献

- 1) 小西・小松：薄肉曲線桁の基礎理論、土木学会論文集、第 87 号、昭和 37. 11.
- 2) 倉西茂：一般薄肉曲りばりの解析、土木学会論文集、第 108 号、昭和 39. 8.
- 3) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論、土木学会論文集、第 110 号、昭和 39. 10.
- 4) 深沢泰晴：並列主桁曲線橋の解析 (2)、土木技術、第 20 巻第 1 号、昭和 40. 1.
- 5) G.Becker：Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe ……，Stahlbau, Vol. 34, Heft 11, '65 11.
- 6) R.Kersten：Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Springer-Verlag, 1962.