

パイプビームが局部荷重をうけた場合の ダイヤフラムの補強効果について

奥 村 敏 恵*
秋 山 成 興**
樊 豊 美***

1 はじめに

空間曲率を持つ曲面は種々の荷重に対して平板構造より力学的に有利である事は可成り以前から知られていたが、本格的に利用され始めたのはごく最近の事である。

この理由は色々あるが、最も重要なものの一つに曲面構造（以下シェル構造という。）が局部荷重を受ける場合（支点反力も含める。）その作用点近傍で補強する為に生ずる攪乱応力状態の解析が非常に困難である点である。

構造物の応力状態は局部荷重及び補強等構造自体の不連続性により乱され応力集中の現象が生ずるが、実用的設計の面からいってもこの値が構造物の強度を左右する。

しかしこの方面における研究は未だ非常に限られたものであり、決め手となる設計手法が未確立であるので本論文では表題に示すテーマを取り上げ、一提案を試みるものである。

先ず問題を次のように単純化する。図示のように、ダイヤフラムによって補強された円筒シェルが、シャイブを通して分布荷重を受ける場合を取り上げる。

解析手法としては、このような構造系をダイヤフラム、円筒シェル、シャイブの各々に分割して、問題に適する解を別個に求めて、最後にこれら3要素の接合線上の応力、歪の連続条件より、完全な解を求めようとするものである。

この解析に当っては次のような仮定を設けた。

- 1) 変形は微小である。
- 2) 3要素はすべて薄肉であり、2次元応力状態である。
- 3) 材料は均質、等方性であり、フックの法則に従う。

以下3要素に対する解を求めよう。

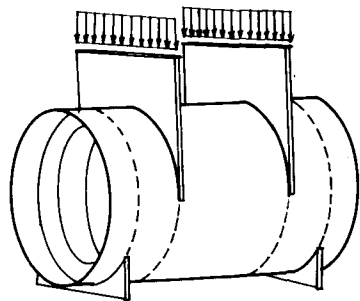


図 - 1

2 円筒シェルの解

円筒の母線方向に x 座標、同方向に θ 座標、内向き法線方向に n 座標を選ぶとシェルの基本方程式は次のように表わされる。

$$\text{ただし} \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

*東京大学教授 **埼玉大学講師 ***東京大学生

$$D^8 = (D^2)^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^4$$

(i) 法線方向荷重 qr が作用する場合

$$D^8 w + \frac{12(1-\mu^2)}{a^2 \delta^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{D} D^4 qr = 0 \quad (2.1)$$

a : シェルの半径

δ : シェルの板厚

E : ヤング係数

各座標方向の変位を u, v, w , とすれば

(ii) 接線方向荷重 $q\theta$ が作用する場合

$$D^8 w + \frac{12(1-\mu^2)}{a^2 \delta^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2 D} \left[(2+\mu) \frac{\partial^3 q_\theta}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 q_\theta}{\partial \theta^3} \right] = 0^*$$

* 文献 1) 参照

従って解は今の場合次の3つから成り立っている。

(i) $q_r = q_\theta = 0$ の場合、境界攪乱応力に相当するもの。

(ii) q_r に対応する特解

(iii) q_θ に対応する特解

各々の場合に対する解は次のようになる。

(i) 今、 u, v, w を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) \cos m\theta \\ v_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) \sin m\theta \\ w_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x) \cos m\theta \end{aligned}$$

ただし

$$u_m(x) = A e^{Bx/a}$$

$$v_m(x) = B e^{Bx/a}$$

$$w_m(x) = C e^{Bx/a}$$

さてこれを基本方程式に代入すれば β に関する次の8次方程式が得られる。

$$\beta^8 - 4m^2 \beta^6 + \left[12(1-\mu^2) \cdot \frac{a^2}{\delta^2} + 6m^4 \right] \beta^4 - 4m^6 \beta^2 + m^8 = 0$$

従ってこの8次方程式の根を夫々 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8$ とすれば

$$w_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{\beta_i x/a} \cdot \cos m\theta$$

更に A, B, C の間には次の関係が成立する。*

$$A = \frac{\mu\beta^3 + m^2\beta}{(\beta^2 - m^2)^2} c$$

$$B = \frac{-(2+\mu)\beta^2 m + m^3}{(\beta^2 - m^2)^2} c^*$$

* 文献 2) P.220(16a), (16b) 参照

従ってこれらの関係を使って、応力及び歪は次のように表わされる。

$$T_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 \frac{E \delta}{a(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{(\beta_i^2 - m^2)^2} [\mu \{ (\beta_i^2 - m^2)^2 + \beta_i^2 m^2 (1-\mu^2) - (\beta_i^2 - m^2)^2 \}] c e^{\beta_i x/a} \cos m\theta$$

$$T_{x\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 \frac{E \delta}{a(1+\mu)} \cdot \frac{-1}{(\beta_i^2 - m^2)^2} (1+\mu) \beta_i^3 m c e^{\beta_i x/a}$$

$$T_{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 \frac{E \delta}{a(1-\mu^2)} \cdot \frac{\beta_i^4}{(\beta_i^2 - m^2)^2} [u^2 - 1] \cdot c e^{\beta_i x/a} \cos m\theta$$

$$M_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2) a^2} \cdot \frac{-1}{(\beta_i^2 - m^2)^2} [(\beta_i^2 - m^2)^2 \cdot (\beta_i^2 - m^2 u) + \mu m^2 \{ m^2 - (2+\mu) \beta_i^2 \}] \cdot c e^{\beta_i x/a} \cos m\theta$$

$$M_{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2) a^2} \cdot \frac{-1}{(\beta_i^2 - m^2)^2} [(\beta_i^2 - m^2)^2 \cdot (-m^2 + \mu \beta_i^2) + m^2 \{ m^2 - (2+\mu) \beta_i^2 \}] \cdot c e^{\beta_i x/a} \cos m\theta$$

$$K_{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 \frac{-m^2}{a^2 (\beta_i^2 - m^2)^2} \{ (\beta_i^2 - m^2)^2 + (2+\mu) \beta_i^2 - m^2 \} \cdot c e^{\beta_i x/a} \cos m\theta$$

$$\varepsilon_{\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^8 -\frac{1}{a} \frac{\beta_i^2 (\beta_i^2 + \mu m^2)}{(\beta_i^2 - m^2)^2} c e^{\beta_i x/a} \cos m\theta$$

ただし

T_x 中央面内軸方向応力

$T_{x\theta}$ 中央面内せん断力

T_{θ} 中央面内周方向応力

M_x 軸方向曲げモーメント

M_{θ} 周方向曲げモーメント

K_{θ} 周方向曲率変化

ε_{θ} 周方向伸び歪

$$(ii) \text{ 今 } w_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$q_r = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

とおく。

$$\text{ただし } \lambda_n = \frac{n\pi a}{\ell} \quad \ell \text{ はパイプの長さ。}$$

これを (2.1) に代入すれば W_{mn} と Z_{mn} の関係は次のようになる。

$$W_{mn} = \psi_{mn} (\lambda_n^2 + m^2) Z_{mn}$$

$$\text{ただし } \psi_{mn} = \frac{a^4}{D[(m^2 + \lambda_n^2)^4 + 12(1-\mu^2)\lambda_n^4 a^2/\delta^2]}$$

$$\begin{aligned} \therefore w &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} (\lambda_n^2 + m^2) Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \\ u &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn} \lambda_n (m^2 - \mu \lambda_n^2) Z_{mn} \cos m\theta \cos \frac{\lambda_n}{a} x \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{mn} m [(2+\mu)\lambda_n^2 + m^2] Z_{mn} \sin m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \end{aligned}$$

よって応力および歪は次のようになる。

$$T_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{E\delta}{a(1+\mu)} \lambda_n^2 m^2 \psi_{mn} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$T_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{E\delta}{a} \lambda_n^4 \psi_{mn} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D}{a^2} [(\lambda_n^2 + m^2)^2 \lambda_n^2 - \mu m^2 \{ (2+\mu)\lambda_n^2 + m^2 - (\lambda_n^2 + m^2)^2 \}] \\ &\quad \psi_{mn} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D}{a^2} [\mu (\lambda_n^2 + m^2) \lambda_n^2 - m^2 \{ (2+\mu)\lambda_n^2 + m^2 - (\lambda_n^2 + m^2)^2 \}] \\ &\quad \psi_{mn} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \end{aligned}$$

$$K_\theta = + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2}{a^2} [(2+\mu)\lambda_n^2 + m^2 - (\lambda_n^2 + m^2)^2] \cdot \psi_{mn} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$\epsilon_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{a} [\mu m^2 - \lambda_n^2] \psi_{mn} Z_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$(iii) \text{ 今 } w_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn,3} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$q_\theta = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

とすると、 $W_{mn,3}$ と Y_{mn} の間の関係式は次のようになる。

$$W_{mn,3} = \psi_{mn} m [m^2 + (2+\mu)\lambda_n^2] Y_{mn}$$

$$\therefore w_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{mn} m [m^2 + (2+\mu)\lambda_n^2] Y_{mn} \cdot \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$u_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

$$v_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[m^2 + 2(1+\mu) \lambda_n^2 \right] \psi_{mn} Y_{mn} \cdot \sin m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x$$

これより応力と歪は次のようになる。

$$\begin{aligned} T_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E \delta \frac{1+\mu^2}{1-\mu^2} \frac{m \lambda_n^2}{a} \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \\ T_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E \delta \frac{\mu}{1-\mu^2} \cdot \frac{m \lambda_n^2}{\alpha a} \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \\ M_x &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mD}{a^2} \left[\{m^2 + (2+\mu) \lambda_n^2\} \{ \lambda_n^2 + \mu(m^2-1) \} - \mu^2 \lambda_n^2 \right] \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \\ M_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mD}{a^2} \left[\{m^2 + (2+\mu) \lambda_n^2\} \{ \mu m^2 + (m^2-1) \} - \mu \lambda_n^2 \right] \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \\ \epsilon_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu \lambda_n^2 m}{a^2} \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \\ K_\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} \left[-m^5 - m^3 \{ (2+\mu) \lambda_n^2 - 1 \} + 2m(1-\mu) \cdot \lambda_n^2 \right] \cdot \psi_{mn} Y_{mn} \cos m\theta \sin \frac{\lambda_n}{a} x \end{aligned}$$

3 シャイベの解

シャイベとシェルの接合線は半径 a の円弧となるので、シャイベは極座標を用いて解く事にする。荷重から考えるとこの中に生ずる応力状態は r_0 軸に関して対称であるのでこの場合に適する解は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_r^S &= P_0 \cos^2 \theta + \sigma_{r1} \\ \sigma_\theta^S &= P_0 \sin^2 \theta + \sigma_{\theta1} \\ \tau_{r\theta}^S &= P_0 \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta1} \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{a_0}{r} + \left[\frac{1}{r} (a_1 + b_1') - \frac{2a_1'}{r^3} \right] \cos \theta \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a_i' r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1) b_i' r^{-i} \right] \cos i\theta \\ \sigma_{\theta1} &= \frac{a_0}{r^2} + \left[\frac{b_1'}{r} + \frac{2a_1'}{r^3} \right] \cos \theta \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a_i' r^{-(i+2)} - (i-2)(i-1) b_i' r^{-i} \right] \cos i\theta \\ \tau_{r\theta1} &= \frac{a_0}{r^2} + \left[\frac{b_1'}{r} - \frac{2a_1'}{r^3} \right] \sin \theta \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a_i' r^{-(i+2)} - (i-1)i b_i' r^{-i} \right] \sin i\theta^* \end{aligned}$$

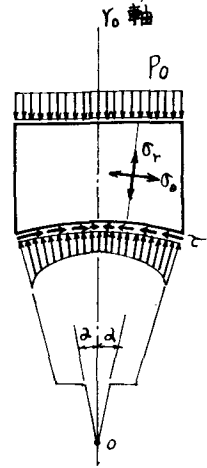


図 - 2

P_0 は一様荷重。

* 文献 3) P.44 参照

又、 ϵ_θ と測地曲率変化 K_{tn} は次のようになる。

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta - \mu \sigma_r \} = \frac{1}{E} \{ P_0 \{ \sin^2 \theta - \mu \cos^2 \theta \} - \frac{a_0}{r^2} (1+\mu) + \frac{b_1'}{r} \cos (1-\mu) \}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2a'_1}{r^3} (1+\mu) \cos \theta - \frac{a_1}{r} \mu \cos \theta \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \left[i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} (1+\mu) + (i-1) b'_i r^{-i} \{ i-2+\mu(i+2) \} \right] \cos i \theta \\
K_{in} &= \frac{\partial \varepsilon_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\
&= \frac{1}{E} \left\{ -\frac{2a_0}{r^3} (1+\mu) + \left[2 \frac{b'_1}{r^2} + \frac{4a'_1}{r^4} (1+\mu) - \frac{a_1}{r^2} \mu \right] \cdot \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left[2i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} (1+\mu) + 2i(i-1) b'_i r^{-(i+1)} (1-\mu) \right] \cos i \theta \right\}
\end{aligned}$$

4 ダイヤフラムの解

ダイヤフラムもシャイブ同様、2次元応力状態と考えると解けば次の解が得られる。

$$\begin{aligned}
\sigma_r^R &= \frac{a_0^R}{r^2} + 2b_0^R + c_0^R (1+2 \log r) + \left\{ \frac{1}{r} (a_1^R + b_1'^R) - 2b_1^R r - 2a_1'^R r^{-3} \right\} \cos \theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -m(m-1) a_m^R r^{m-2} - m(m+1) a_m'^R r^{-(m+2)} \right. \\
&\quad \left. - (m-2)(m+1) b_m^R r^m - (m+2)(m-1) b_m'^R r^{-m} \right\} \cdot \cos m \theta \\
\sigma_{\theta}^R &= \frac{a_0^R}{r^2} + 2b_0^R + c_0^R (3+2 \log r) + \left(6b_1^R r + 2a_1'^R r^{-3} - \frac{b_1'^R}{r} \right) \cos \theta \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m(m-1) a_m^R r^{m-2} + m(m+1) a_m'^R r^{-(m+2)} \right. \\
&\quad \left. + (m+2)(m+1) b_m^R r^m + (m-2)(m-1) b_m'^R r^{-m} \right\} \cos m \theta \\
\tau_{r\theta}^R &= \frac{a_0^R}{r^2} + \left(2b_1^R r - 2a_1'^R r^{-3} + \frac{b_1'^R}{r} \right) \sin \theta + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m(m-1) (a_m^R r^{m-2} - b_m'^R r^{-m}) \right. \\
&\quad \left. - m(m+1) (a_m'^R r^{-(m+2)} - b_m^R r^m) \right\} \sin m \theta^*
\end{aligned}$$

* 文献 3) P.44 参照

ダイヤフラムの内径を r_i とすれば

$$\sigma_r^R \Big|_{r=r_i} = 0 \qquad \tau_{r\theta}^R \Big|_{r=r_i} = 0$$

となる。

さて、ダイヤフラムの歪 ε_{θ}^R と曲率変化 K_{in}^R は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta}^R &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{\theta}^R - \mu \sigma_r^R \right\} \\
&= \frac{1}{E} \left\{ -\frac{a_0^R}{r^2} (1+\mu) + \left(2b_0^R + 2c_0^R \log r \right) (1-\mu) + c_0^R (3-\mu) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{b_1'^R}{r} (1-\mu) - \frac{a_1^R}{r} \mu + \frac{2a_1'^R}{r^3} (1+\mu) + 2b_1^R r (3+\mu) \right] \cos \theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m^R r^{m-2} (1+\mu) + m(m+1) a_m'^R r^{-(m+2)} (1+\mu) \\
& + (m+1) [m+2+\mu(m-2)] b_m^R r^m + (m-1) [m-2+\mu(m+2)] b_m'^R r^{-m} \cos m\theta \} \\
K_{tn}^R = & - \frac{\partial \varepsilon_{\theta}^R}{\partial r} + \frac{1}{2r} \frac{2w^R}{2\theta} \\
= & - \frac{\partial \varepsilon_{\theta}^R}{\partial r} + \frac{(1+\mu)}{E} \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \\
= & \frac{1}{E} \left\{ - \frac{2a_0^R}{r^3} (1+\mu) - \frac{2c_0^R}{r} (1-\mu) + \left[\frac{2b_1'^R}{r^2} - \frac{a_1^R}{r^2} \mu + \frac{4a_1'^R}{r^4} (1+\mu) - 4b_1^R \right] \cos \theta \right. \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left[a_m^R \cdot 2m(m-1) (1+\mu) r^{m-3} + b_m'^R 2m(m-1) (1-\mu) r^{-(m+1)} \right. \\
& \left. \left. + a_m'^R \cdot 2m(m+1) (1+\mu) r^{-(m+3)} - b_m^R 2m(m+1) [m+1+\mu(m-1)] r^{m-1} \right] \cos m\theta \right\}
\end{aligned}$$

5 接 合 条 件

これまでの解析は構造系を各要素に分解し別個に問題に適する解を求めた。構造系として一体になって働く為にはこれらの間に接合条件、すなわち各部材の接合線上で、各々の応力と変形が連続であるという条件が成立しなければならない。以下これについて述べる。

先ず応力連続の条件は次のように表わすことができる。

シェルに作用する法線方向荷重 q_r は

$$q_r = \sigma_r^S + \sigma_r^R$$

又、接線方向荷重 q_{θ} は

$$q_{\theta} = \tau_{r\theta}^S + \tau_{r\theta}^R$$

である。

しかしながら σ_r^S , $\tau_{r\theta}^S$ は $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ の領域内でのみ作用するので、これらの量をフーリエ展開すると次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\sigma_r^S = & \frac{R_0}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \left\{ \sin \alpha + \frac{1}{2} \left(\sin \alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} \right) \right\} \cos \theta \right. \\
& + \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\sin 4\alpha}{4} \right) \right\} \cos 2\theta \\
& + \sum_{m=3}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \sin m\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-2)\alpha}{m-2} + \frac{\sin(m+2)\alpha}{m+2} \right) \right\} \cos m\theta \} \\
& + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{a_0}{r^2} \alpha + \left[\frac{1}{r} (a_1 + b_1') - 2a_1' r^{-3} \right] \sin \alpha \right. \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a_i r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1) b_i' r^{-i} \right] \frac{1}{i} \sin i\alpha \} \\
& + \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{2a_0}{r^2} \sin \alpha + \left[\frac{1}{r} (a_1 + b_1') - 2a_1' r^{-3} \right] \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right\} \cos \theta \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{2}{m} \frac{a_0}{r^2} \sin m\alpha + \left[\frac{1}{r} (a_1 + b_1') - 2a_1' r^{-3} \right] \right. \\
& \cdot \left. \left[\frac{1}{m+1} \sin(m+1)\alpha + \frac{1}{m-1} \sin(m-1)\alpha \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1) b'_i r^{-i} \right] \\
& \cdot \left[\frac{1}{m+i} \sin(m+i)\alpha + \frac{1}{m-i} \sin(m-i)\alpha \right] \cos m\theta \\
\tau_{r\theta}^S = & \frac{P_0}{2\pi} \left[\left(\sin\alpha - \frac{1}{3} \sin 3\alpha \right) \sin\theta + \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \sin 2\theta \right. \\
& + \sum_{m=3}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(m-2)\alpha}{m-2} - \frac{\sin(m+2)\alpha}{m+2} \right\} \sin m\theta \left. \right] \\
& + \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{a_0}{r^2} \cos\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{b'_1}{r} - \frac{2a_1}{r^3} \right) \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \right] \sin\theta \right. \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left[-\frac{a_0}{r^2} \frac{1}{m} \cos m\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{b'_i}{r} - \frac{2a'_i}{r^3} \right) \cdot \left[\frac{1}{m+1} \sin(m+1)\alpha - \frac{\sin(m-1)\alpha}{m-1} \right] \right] \sin m\theta \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} - (i-1)i b'_i r^{-i} \right] \\
& \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-i)\alpha}{m-i} - \frac{\sin(m+i)\alpha}{m+i} \right] \sin m\theta \left. \right\}
\end{aligned}$$

次に x 軸方向にもフーリエ展開すれば、結局荷重係数 Z_{mn} Y_{mn} は次のように得られる。

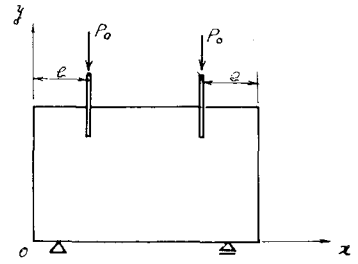


図 - 3

$$\begin{aligned}
Z_{0n} = & \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{P_0}{2} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) + \frac{a_0}{r^2} \alpha \right. \\
& + \left[\frac{1}{r} (a_1 + a'_1) - 2a'_1 r^{-3} \right] \sin\alpha \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1) b'_i r^{-i} \right] \frac{1}{i} \sin i\alpha \left. \right\} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell} \\
Z_{1n} = & \frac{4}{\pi^2} \left\{ P_0 \left(\frac{3}{2} \sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{6} \right) + \frac{2a_0}{r^2} \sin\alpha + \left[\frac{1}{r} (a_1 + b'_1) - 2a'_1 r^{-3} \right] \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} + \alpha \right) \right. \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1) b'_i r^{-i} \right] \cdot \left[\frac{\sin(i+1)\alpha}{i+1} + \frac{\sin(i-1)\alpha}{i-1} \right] \\
& + \left[\frac{1}{r} (a_1^R + b_1^R) - 2b_1^R r - 2a_1^R r^{-3} \right] \left. \right\} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell} \\
Z_{2n} = & \frac{4}{\pi^2} \left\{ P_0 \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\sin 4\alpha}{4} \right) \right] + \frac{a_0}{r^2} \sin 2\alpha \right. \\
& + \left[\frac{1}{r} (a_1 + b'_1) - 2a'_1 r^{-3} \right] \cdot \left(\frac{\sin 3\alpha}{3} + \sin\alpha \right) - (2a_2^R + 6a_2^R r^{-4} + 4b_2^R r^{-2}) \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} \left[-i(i+1) a'_i r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1) b'_i r^{-i} \right] \\
& \cdot \left[\frac{\sin(i+2)\alpha}{i+2} + \frac{\sin(i-2)\alpha}{i-2} \right] \left. \right\} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell}
\end{aligned}$$

$m = 3, 4, \dots$

$$\begin{aligned}
Z_{mn} = & \frac{4}{\pi^2} \left\{ P_0 \left[\frac{\sin m\alpha}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(m-2)\alpha}{m-2} + \frac{\sin(m+2)\alpha}{m+2} \right) \right] + \frac{2}{m} \frac{a_0}{r^2} \sin m\alpha \right. \\
& + \left[\frac{a_1 + b'_1}{r} - 2a'_1 r^{-3} \right] \left[\frac{\sin(m+1)\alpha}{m+1} + \frac{\sin(m-1)\alpha}{m-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[m(m-1)a_m^R r^{m-2} + m(m+1)a_m'^R r^{-(m+2)} + (m-2)(m+1)b_m^R r^m + (m+2)(m-1)b_m'^R r^{-m}] \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} [-i(i+1)a_i' r^{-(i+2)} - (i+2)(i-1)b_i' r^{-i}] \cdot \left[\frac{\sin(m+i)\alpha}{m+i} + \alpha \right] \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell} \\
Y_{0n} &= \frac{a_0'^R}{r^2} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell} \\
Y_{1n} &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ P_0 \left(\sin \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{3} \right) \right. \\
& + 4 \left[-\frac{a_0}{r^2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1'}{r} - \frac{2a_1'}{r^3} \right) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha \right) \right] \\
& + \sum_{i=2}^{\infty} [-i(i+1)a_i' r^{-(i+2)} - (i-1)i b_i' r^{-i}] \times \frac{1}{2} \times \left[\frac{\sin(i-1)\alpha}{i-1} - \frac{\sin(i+1)\alpha}{i+1} \right] \\
& \times 2 \left[2b_1^R r - 2a_1'^R r^{-3} + \frac{b_1'^R}{r} \right] \left. \right\} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell} \\
Y_{2n} &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ P_0 \left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right) + 4 \left[-\frac{a_0}{r^2} \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1'}{r} - \frac{2a_1'}{r^3} \right) \left(\frac{\sin 3\alpha}{3} - 2 \right) \right] \right. \\
& + \sum_{i=3}^{\infty} 2[-i(i+1)a_i' r^{-(i+2)} - (i-1)i b_i' r^{-i}] \times \left[\frac{\sin(i-2)\alpha}{i-2} - \frac{\sin(i+2)\alpha}{i+2} \right] \\
& + (-12a_2' r^{-4} - 4b_2' r^{-2}) \left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right) \\
& + \left. \left[2(a_2^R - b_2'^R r^{-2}) - 6(a_2'^R r^{-4} - b_2^R r^2) \right] \right\} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell}
\end{aligned}$$

$m=3, 4, \dots$

$$\begin{aligned}
Y_{mn} &= \frac{2}{\pi^2} \left\{ P_0 \left[\frac{\sin(m-2)\alpha}{m-2} - \frac{\sin(m+2)\alpha}{m+2} \right] \right. \\
& - 4 \frac{a_0}{r^2} \frac{\cos m\alpha}{m} - 2 \left(\frac{b_1'}{r} - \frac{2a_1'}{r^3} \right) \left[\frac{\sin(m+1)\alpha}{m+1} - \frac{\sin(m-1)\alpha}{m-1} \right] \\
& + 2 \sum_{i=2}^{\infty} [-i(i+1)a_i' r^{-(i+2)} - (i-1)i b_i' r^{-i}] \left[\alpha - \frac{\sin(m+i)\alpha}{m+i} \right] \\
& + \left. \left[m(m-1)(a_m^R r^{m-2} - b_m'^R r^{-m}) - m(m+1)(a_m'^R r^{-(m+1)} - b_m^R r^m) \right] \right\} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b}{\ell}
\end{aligned}$$

又、変形の連続条件は次のようになる。

接合線上で

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta}^S &= \varepsilon_{\theta} \quad r_i \quad r_e = \varepsilon_{\theta}^R \\
K_{in}^S &= K_{\theta} \quad r_i \quad r_e = K_{in}^R
\end{aligned}$$

これより4個の独立な条件が得られる。

すでに求めた各変形の式で置き換えると、各係数が満足すべき条件が得られるが、ここでは煩雑であるので記さない。

6 数 値 計 算

さて、4で求めた4個の変形連続条件が恒等的に満足されるように各係数を求めればよいが、これには二重フーリエ級数の同次の各係数が等しくなればよい。従ってこれより求める係数に関する連立方程式が得られ、これを解けばよい。ここで更にダイヤフラムの内縁に関する境界条件がつけ加わる。すなわち

$r = r_i$ において

$$\sigma_r^R = 0 \qquad \tau_{r\theta}^R = 0$$

元数を多くすればする程、解の精度がよくなる事は当然だが、本論文では 66 元連立方程式を解いた。これには東京大学大型計算センターの H I T A C 5090 を用いた。

この結果を理論値として図-5，図-6に示している。

7 実験の概要

前述の解析の検証として実験を行なった。

試験体は全部で 6 個で次にその仕様を示す。

表 - 1

		外 径	シェルの板厚	シャイベの板厚	ダイヤフラム	
					板 厚	高 さ
A	1	720	6	9	/	/
	2				9	150 80
B	1	720	9	13	/	/
	2				9	150 80
C	1	720	13	19	/	/
	2				9	150 80

ゲージは PR-10，PL-10（東京測器KK製）を用い、その貼付位置は図の通りである。

実験は東大工学部大型構造物試験室の試験台で行なった。（写真 1）

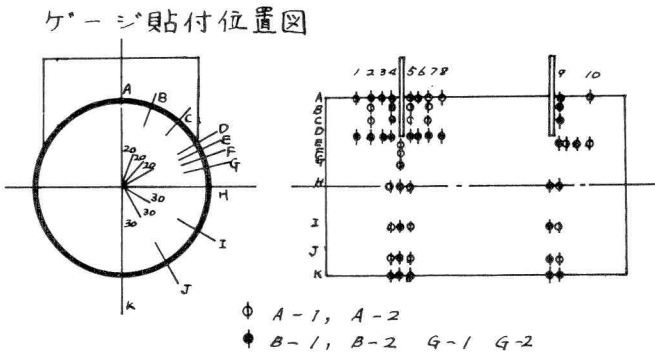


図 - 4

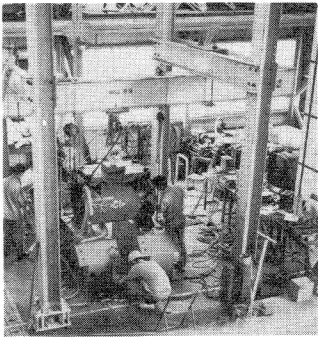


写真 - 1

次にその実測値を理値と共に図-5，図-6，図-7に示す。

ただし最も興味ある D-線方向及び荷重位置における周方向の応力分布を示す。

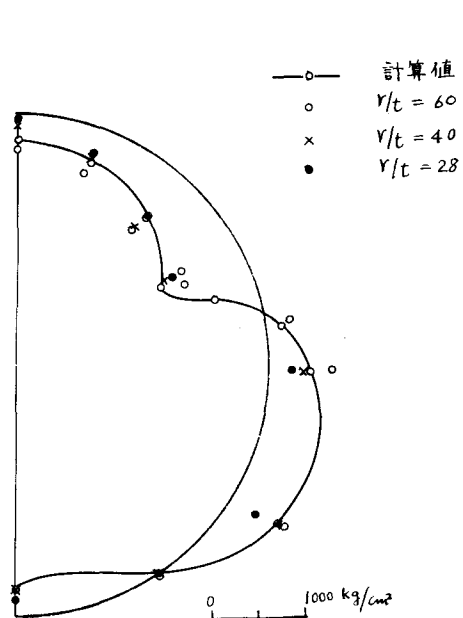


図-5-1 シャイベ取り付け位置における周方向応力分布図
(ダイヤフラムつき)

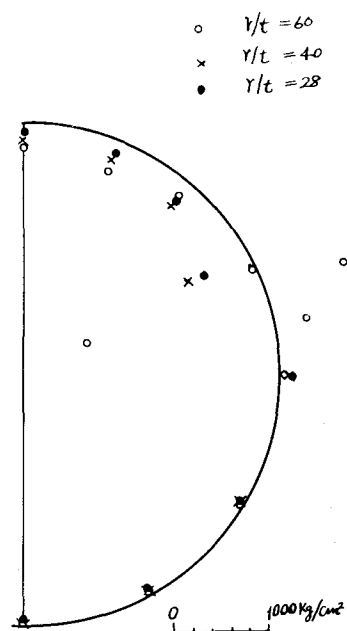


図-5-2 シャイベ取り付け位置における周方向応力分布図
(ダイヤフラムなし)

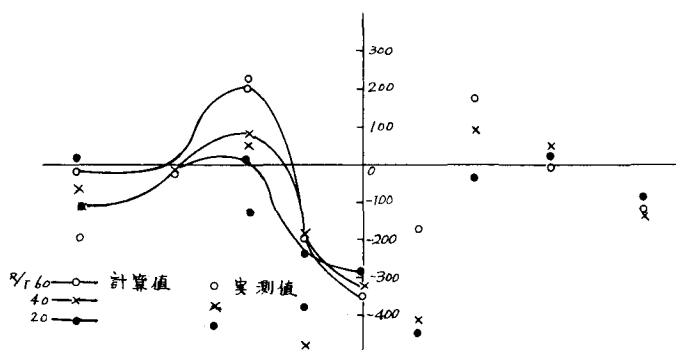


図-6-1 ダイヤフラム(80%)のついたシェルのD線における軸方向応力分布図 (荷重 100 t)

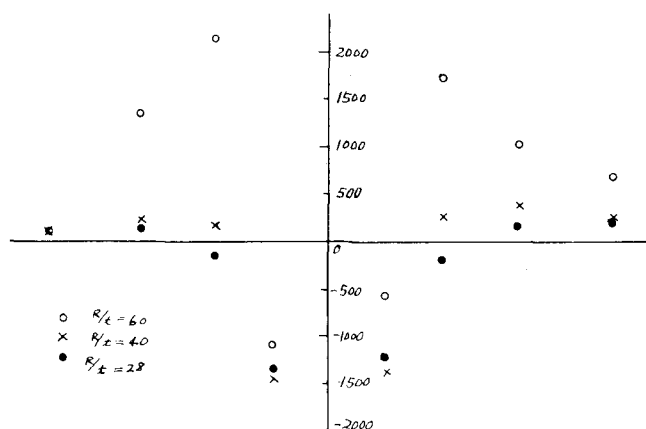


図-6-2 ダイアフラムのないシェルのD線における軸方向応力分布図
(荷重 100 t)

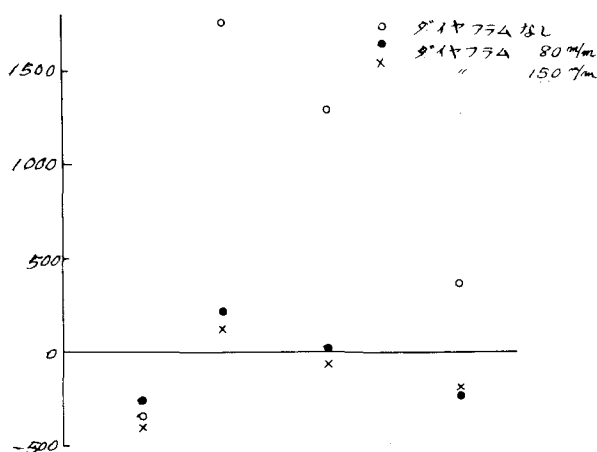


図-7 D線における軸方向応力分布図
荷重 100 t $r/t = 60$

8 結 論

本実験では前述のように6個の試験体を用いたが、その実測値より次のような結果が得られた。

r/t の値により、最大応力の遞減率は次の通りである。(ダイアフラムのない場合を 100 % とする。)

r/t	主応力	周応力	軸応力
60	10 (%)	9	5
40	28	26	33
28	36	31	37

数多いデータから断定的な結論を下すのは早計かと思われるが、上記の結果より r/t の値が 50 付近でダイヤ

フラムの管胴に対する補強効果が変化していると考えられる。従ってこの付近の値を将来重点的に研究していく予定である。

9 おわりに

本論文は樊 豊美が修士論文として提出したものの一部を抜萃要約したものである。

試験体を提供して下さいました宮地鉄工KKおよび実験の際色々と協力下さった奥村研究室の方々に感謝致します。

文 献

- 1) Bijlard "Stress from Local Loadings in Cylindrical Pressvre Vessels"
- 2) Fliigge "Stresses in Shells"
- 3) 岡本舜三 "応用力学" 技報堂