

周辺自由 4 点支持の Hyperbolic-Paraboloidal Shell の応力解析

坪 井 善 勝*
平 田 捷 夫**

序

偏平殻の基礎微分方程式は W. S. WL'ASSOW によって与えられているが(文献*1) $z = cxy$ で中央面が与えられる偏平 H.P. シェルの応力解析は、専ら差分法により行なわれてきた。

この微分方程式の Fourier 級数による一般解は、角野晃二博士により与えられているが(文献*2) 点支持問題としては、更に幾つかの工夫が必要である。

Fourier 解析をおこなう際 常に重要なことは Dirichlet 条件の満足である。境界条件が、要求される総ての物理条件を満足せねばならないのは当然であるが、Fourier 展開を矛盾なくおこなうためには、物理的意味を何らもたない数学的条件をも満足せねばならない場合がある。点支持問題では、隅点で条件が与えられる関係上、それが特に明確に現れる。本論は、必要且つ十分な総ての条件を満足する解を与えている。

又、微分方程式の境界値問題を、2重 Fourier 展開を用い、無限連立 1 次方程式に変換した場合、当然 Digital computer の使用を前提とするが、この場合、未知定数の変換をおこなわないと、展開項の増加に伴い、係数が急激に増大し、計算精度の下降をきたすばかりか、時には 計算不能にさえ陥いる。本論では、未知定数を変換して、それらの問題を解決した。

1.1 偏平 H.P. シェルの基礎微分方程式の解

基礎微分方程式の一般解としては、角野博士の級数解の他に、代数解を採用する。角野論文の概略は次の通りである。

直交座標系について、 $z = cxy$ で中央面が与えられる。厚さ一様 (h) の偏平 H.P. シェルの基礎微分方程式は、変位 $W(x, y)$ と応力函数 $\Phi(x, y)$ に関する連立偏微分方程式で与えられる。(WLASSOW 式)

$$D \Delta \Delta W(x, y) + 2c \Phi, xy(x, y) = P \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \Phi(x, y) - 2c W, xy(x, y) = 0 \quad (1.2)$$

$$\left(\quad \right), x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\quad \right)$$

$$\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{曲げ剛性})$$

E : ヤング係数 ν : ポアソン比 ($\nu = 0$)

P : 単位面積当りの法線方向荷重 (偏平だから鉛直とみなす)

*東京大学教授 **同 大学院生

$x = \pm a$, $y = \pm a$ を境界とする正方形プランの H. P. 曲面を扱う。方程式 (1.1), (1.2) の諸量を無次元化するため、 $x = a\xi$, $y = a\eta$ とおくと (1.1), (1.2) は

$$\Delta \Delta w(\xi, \eta) + \frac{1}{J_0} \Phi, \xi \eta(\xi, \eta) = \frac{Pa^3}{D} \quad (1.3)$$

$$\Delta \Delta \Phi(\xi, \eta) - 2ch w, \xi \eta(\xi, \eta) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{J_0} = 24(1-\nu^2)(ca)\left(\frac{a}{h}\right)^3$$

となる。(1.3), (1.4) の解は 一般解と特別解の和で与えられる。

1.2 一般解

級数による一般解 $w_{\pm}$, ϕ_1 は次式で与えられる。(文献*2 参照)

$$\begin{aligned} w_1 = & \sum_{n=1,3,5} \left[\begin{aligned} & A_n \cosh P_n \eta + B_n \cosh \sigma_n \eta + C_n \cosh \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta \\ & + C_n \sinh \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta \end{aligned} \right] \cos \alpha_n \xi \\ & + \sum_{n=1,3,5} \left[\begin{aligned} & \bar{A}_n \sinh h \rho_n \eta + \bar{B}_n \sinh h \sigma_n \eta + \bar{C}_n \sinh h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta \\ & + \bar{C}_n \cosh h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta \end{aligned} \right] \sin \alpha_n \xi \\ & + \sum_{m=1,3,5} \left[\begin{aligned} & A_m \cosh h \rho_m \xi + B_m \cosh h \sigma_m \xi + C_m \cosh h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi \\ & + C_m \sinh h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi \end{aligned} \right] \cos \alpha_m \eta \\ & + \sum_{m=1,3,5} \left[\begin{aligned} & \bar{A}_m \sinh h \rho_m \xi + \bar{B}_m \sinh h \sigma_m \xi + \bar{C}_m \sinh h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi \\ & + \bar{C}_m \cosh h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi \end{aligned} \right] \sin \alpha_m \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \sum_{n=1,3,5} (-) \left[\begin{aligned} & A_n K_1 \sinh h \rho_n \eta + B_n K_2 \sinh h \sigma_n \eta \\ & + C_n Q_1(\eta) + C_n Q_2(\eta) \end{aligned} \right] \sin \alpha_n \xi \\ & + \sum_{n=1,3,5} \left[\begin{aligned} & \bar{A}_n K_1 \cosh h \rho_n \eta + \bar{B}_n K_2 \cosh h \sigma_n \eta \\ & + \bar{C}_n Q_3(\eta) + \bar{C}_n Q_4(\eta) \end{aligned} \right] \cos \alpha_n \xi \\ & + \sum_{m=1,3,5} (-) \left[\begin{aligned} & A_m K_1 \sinh h \rho_m \xi + B_m K_2 \sinh h \sigma_m \xi \\ & + C_m Q_1(\xi) + C_m Q_2(\xi) \end{aligned} \right] \sin \alpha_m \eta \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1,3,5} \left\{ \begin{array}{l} \overline{A}_m K_1^m \cos h \rho_m \xi + \overline{B}_m K_2^m \cos h \sigma_m \xi \sin \alpha_m \eta \\ + \overline{C}_m Q_3^m(\xi) + C_m Q_4^m(\xi) \end{array} \right\} \cos \alpha_m \eta$$

$$Q_1(\eta) = L_1 \sin h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta - L_2 \cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta$$

$$Q_2(\eta) = L_1 \cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta + L_2 \sin h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta$$

$$Q_3(\eta) = L_1 \cos h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta - L_2 \sin h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta$$

$$Q_4(\eta) = L_1 \sin h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta + L_2 \cos h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta$$

($Q_m(\xi)$) についても同様)

(1.5), (1.6) における $\rho_n, \sigma_n, \lambda_n, \mu_n$ (m についても同様) は、特性方程式

$$(t^2 - \alpha_n^2)^4 - \frac{2ch}{J_0} \alpha_n^2 t^2 = 0 \quad (1.7)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

の根から得られる特性値である。すなわち、特性方程式 (1.7) の根は

$$t = \pm \rho_n, \pm \sigma_n, \pm (\lambda_n \pm i \mu_n) \quad (1.8)$$

$$\rho_n, \sigma_n, \lambda_n, \mu_n > 0, i^2 = -1$$

である。更に K_1, K_2, L_1, L_2 については、

$$\begin{aligned} K_1 &= J_0 \frac{(\rho_n^2 - \alpha_n^2)^2}{\rho_n \alpha_n}, & K_2 &= J_0 \frac{(\sigma_n^2 - \alpha_n^2)^2}{\sigma_n \alpha_n} \\ L_1 &= \frac{J_0}{\alpha_n} \left(\lambda_n^2 - 3 \lambda_n \mu_n^2 - 2 \alpha_n^2 \lambda_n + \alpha_n^4 \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + \mu_n^2} \right) \\ L_2 &= \frac{J_0}{\alpha_n} \left(3 \lambda_n \mu_n^2 - \mu_n^3 - 2 \alpha_n^2 \mu_n - \alpha_n^4 \frac{\mu_n}{\lambda_n^2 + \mu_n^2} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

を表す。(以上角野論文より引用)

本論では、一般解として、角野論文で得られた級数解の他に、代数解を併用する。これらは、基礎微分方程式 (1.3) ($P=0$), (1.4) を同時に満するものなら何でもよいが、対称条件及び境界条件を考慮して決定せねばならない。

1.3 特 別 解

連立偏微分方程式の特別解は、どのようなものでも支障はないが、本論では、2方向展開の級数解を用いる。

今

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} w_{mn} \cos \alpha_n \xi \cdot \cos \alpha_m \eta \\ \phi_0 &= \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \phi_{mn} \sin \alpha_n \xi \cdot \sin \alpha_m \eta \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

とおき、荷重 $P = P_0$ (const) を

$$P = \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} P_{mn} \cos \alpha_n \xi \cdot \cos \alpha_m \eta$$

$$P_{mn} = \frac{4 \sin \alpha_m \sin \alpha_n}{\alpha_m \alpha_n} P_0 \quad (1.11)$$

に 2 重 Fourier 級数に展開し (1.10), (1.11), を (13), (14) に代入すると m, n の各々に対して

$$w_{mn} (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 + \frac{1}{J_2} \alpha_m \alpha_n \phi_{mn} = \frac{P_{mn} a^3}{D}$$

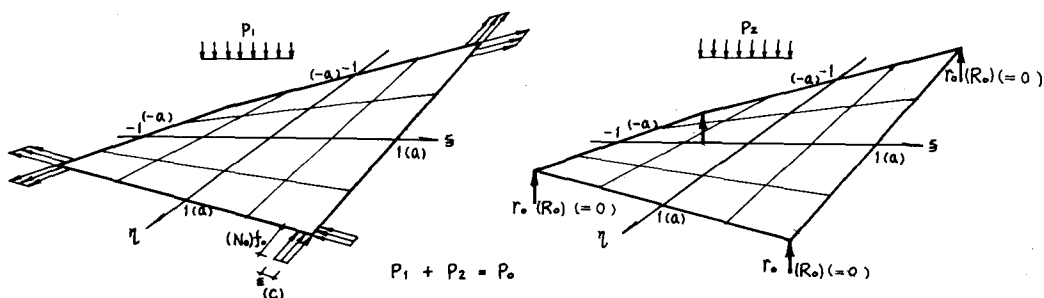
$$\phi_{mn} (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 - 2ch \alpha_m \alpha_n w_{mn} = 0$$

が成立する。これらを連立に解けば、 w_{mn}, ϕ_{mn} が次の如く決定する。

$$w_{mn} = \frac{4 (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 \sin \alpha_m \sin \alpha_n}{\{ (\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^4 + \frac{2ch}{j_0} \alpha_m^2 \alpha_n^2 \}} \frac{P_0 a^3}{D} \quad (1.12)$$

$$\phi_{mn} = \frac{8ch \sin \alpha_m \sin \alpha_n}{(\alpha_m^2 + \alpha_n^2)^2 + \frac{2ch}{J_c} \alpha_m^2 \alpha_n^2} - \frac{P_o a^3}{D} \quad (1.13)$$

2 隅点力と荷重による釣合系の解



4隅点で、微小巾 c に分布する面内軸方向力 N_0 と、集中反力 R_0 によって支持された、等分布荷重 P_0 を受ける偏平H. P. シエルを対象とする。

2.1 変位 w 及び応力函数 ϕ

変位 w は、Fourier-cosine 奇数項展開、応力函数 ϕ は Fourier-sine 奇数項展開となり、対称性を利用すると、(15), (16) の未知定数の数は減少する。

本論では、一般解 (15), (16) の未知定数を置換して用いる。例えば $A_n \rightarrow \frac{1}{a_n^2 \cos h \rho_n} A_n$ であるが、

$\frac{1}{\alpha_n^2}$ は変位及び応力函数の2次導函数、すなわち曲げモーメント及び面内軸方向力迄の収束を保証するためであ

り、 $\frac{1}{\cos h \rho_n}$ は、 A_n の係数の最大値を規制するためである。

又、 w_{II} は、要求される周辺条件、隅条件を矛盾なく満たすためのものであり、 w_{II} を(2.2)の如く採用すると、 ϕ_{II} は(2.5)の如く限定され、独立に決定できる未知定数は $K_0 \sim K_3$ の4個である。

$$w_I = \sum_{n=1.3.5} \frac{1}{\alpha_n^2} \left[A_n \frac{\cos h \rho_n \eta}{\cos h \rho_n} + B_n \frac{\cos h \sigma_n \eta}{\cos h \sigma_n} + C_n \frac{\cos h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta}{\cos h \lambda_n} + C_4 \frac{\sin h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta}{\cos h \lambda_n} \right] \cos \alpha_n \xi$$

$$+ \sum_{m=1.3.5} \frac{1}{\alpha_m^2} \left[A_m \frac{\cos h \rho_m \xi}{\cos h \rho_m} + B_m \frac{\cos h \sigma_m \xi}{\cos h \sigma_m} + C_m \frac{\cos h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi}{\cos h \lambda_m} + C_4 \frac{\sin h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi}{\cos h \lambda_m} \right] \cos \alpha_m \eta \quad (2.1)$$

$$w_{II} = K_0 + K_1 (\xi^2 + \eta^2) + K_2 (\xi^4 + \eta^4) + K_3 (\xi^6 + \eta^6) \quad (2.2)$$

$$w_o = \sum_{m=1.3.5} \sum_{n=1.3.5} w_{mn} \cos \alpha_n \xi \cos \alpha_m \eta \quad (2.3)$$

$$\phi_I = (-) \sum_{n=1.3.5} \frac{1}{\alpha_n^2} \left[A_n \frac{K_n \sin h \rho_n \eta}{\cos h \rho_n} + B_n \frac{K_n \sin h \sigma_n \eta}{\cos h \sigma_n} + C_n \frac{Q_n(\eta)}{\cos h \lambda_n} + C_4 \frac{Q_n(\eta)}{\cos h \lambda_n} \right] \sin \alpha_n \xi$$

$$(-) \sum_{m=1.3.5} \frac{1}{\alpha_m^2} \left[A_m \frac{K_m \sin h \rho_m \xi}{\cos h \rho_m} + B_m \frac{K_m \sin h \sigma_m \xi}{\cos h \sigma_m} + C_m \frac{Q_m(\xi)}{\cos h \lambda_m} + C_4 \frac{Q_m(\xi)}{\cos h \lambda_m} \right] \sin \alpha_m \eta \quad (2.4)$$

$$\phi_I = -48 J_o K_2 \xi \eta - 120 J_o K_3 (\xi^3 \eta + \xi \eta^3) \quad (2.5)$$

$$\phi_o = \sum_{m=1.3.5} \sum_{n=1.3.5} \phi_{mn} \sin \alpha_n \xi \cdot \sin \alpha_m \eta \quad (2.6)$$

2.2 未知定数

(2.1)～(2.6) で与えられる変位 w ($w = w_I + w_{II} + w_o$)

応力函数 ϕ ($\phi = \phi_I + \phi_{II} + \phi_o$) の中で、独立に決定できる未知定数は、 $K_0 \sim K_3$, N_0 (又は R_0) の5個及び、 A_n , B_n , C_n , C_4 ($n = 1.3.5. \dots$) である。

2.3 隅点力の処理

隅点において、面内軸方向 $N_0 = E a f_0$ ，面外集中力、 $R_0 = \frac{D}{a} \gamma_0$ とおき、無次元化する。釣合系において、面外力と面内力の比は任意に与えることができるから、その比を κ とすると $\kappa = \frac{\gamma_0}{f_0}$ となる。周辺での面内軸方向力の分布 $f(\eta)$ は、 $c = \varepsilon a$ とすると

$$f(\eta) = \begin{cases} 0 & 1 - \varepsilon > \eta \geq 0 \\ f_0 & 1 \geq \eta > 1 - \varepsilon \end{cases} \quad (2.7)$$

であるから、 $\nu = 0$ に対しては

$$\phi_{,\eta\eta}|_{\xi=1} = f(\eta), \quad 2w_{,\xi\eta}|_{\xi=\eta=1} = \kappa f_0 \quad (2.8)$$

により、 f_0 を未知量として、隅点力の処理が可能である。

2.4 周辺条件及び隅条件

2.4.1. 曲げモーメント：0 の条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = & - \sum_{n=1,3,5} \left[A_n \frac{\cos h \rho_n \eta}{\cos h \rho_n} + B_n \frac{\cos h \sigma_n \eta}{\cos h \sigma_n} \right. \\ & \left. + C_n \frac{\cos h \lambda_n \eta \cos h \mu_n \eta}{\cos h \lambda_n} + C_n \frac{\sinh \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta}{\cos h \lambda_n} \right] \cos \alpha_n \xi \\ & + \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{\alpha_m^2} \left[A_m \frac{\rho_m^2 \cos h \rho_m \xi}{\cos h \rho_m} + B_m \frac{\sigma_m^2 \cos h \sigma_m \xi}{\cos h \sigma_m} \right. \\ & \left. + C_m \frac{\{(\lambda_m^2 - \mu_m^2) \cos h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi - 2 \lambda_m \mu_m \cos h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi\}}{\cos h \lambda_m} \right. \\ & \left. + C_m \frac{\{(\lambda_m^2 - \mu_m^2) \sinh \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi + 2 \lambda_m \mu_m \cos h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi\}}{\cos h \lambda_m} \right] \cos \alpha_m \eta \\ & + 2 K_1 + 1.2 K_2 \xi^2 + 3.0 K_3 \xi^4 \\ & - \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \alpha_n^2 w_{mn} \cos \alpha_n \xi \cos \alpha_m \eta \end{aligned} \quad (2.9)$$

であるから

$$2 K_1 + 1.2 K_2 + 3.0 K_3 = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & A_m \rho_m^2 + B_m \sigma_m^2 \\ & + C_m \{(\lambda_m^2 - \mu_m^2) \cos \mu_m - 2 \lambda_m \mu_m \tanh \lambda_m \sin \mu_m\} \\ & + C_m \{(\lambda_m^2 - \mu_m^2) \tanh \lambda_m \sin \mu_m + 2 \lambda_m \mu_m \cos \mu_m\} \\ & = 0 \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.4.2. 換算剪断力：0 の条件

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \\
 &= \sum_{n=1,3,5} \left[A_n \left(\alpha_n - 2 \frac{\rho_n^2}{\alpha_n} \right) \frac{\cosh \rho_n \eta}{\cosh \rho_n} + B_n \left(\sigma_n - 2 \frac{\sigma_n^2}{\alpha_n} \right) \frac{\cosh \sigma_n \eta}{\cosh \sigma_n} \right. \\
 & \quad + \frac{C_n}{\cosh \lambda_n} \left(\alpha_n \cosh \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta - \frac{2}{\alpha_n} (\cosh \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta)'' \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{C_n}{\cosh \lambda_n} \left(\alpha_n \sinh \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta - \frac{2}{\alpha_n} (\sinh \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta)'' \right) \right] \sin \alpha_n \xi \right. \\
 & + \sum_{m=1,3,5} \left[A_m \left(\frac{\rho_m^3}{\alpha_m^2} - 2 \rho_m \right) \frac{\sinh \rho_m \xi}{\cosh \rho_m} + B_m \left(\frac{\sigma_m^3}{\alpha_m^2} - 2 \sigma_m \right) \frac{\sinh \sigma_m \xi}{\cosh \sigma_m} \right. \\
 & \quad + \frac{C_m}{\cosh \lambda_m} \frac{(\cosh \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi)'''}{\alpha_m^2} - 2 (\cosh \lambda_m \xi \cdot \cos \mu_m \xi)' \\
 & \quad \left. + \frac{C_m}{\cosh \lambda_m} \frac{(\sinh \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi)'''}{\alpha_m^2} - 2 (\sinh \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi)' \right] \cos \alpha_m \eta \\
 & + 2.4 K_2 \xi + 1.20 K_3 \xi^3 \\
 & + \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} (\alpha_n^3 + 2 \alpha_n \alpha_m^2) w_{mn} \sin \alpha_m \xi \cdot \cos \alpha_m \eta \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで } ()' = \frac{\partial}{\partial x} () , ()'' = \frac{\partial}{\partial \eta} ()$$

$\xi=1$ の周辺で、偶函数である V_x を Fourier-cosine 奇数項展開する。 $\eta=1$ で $V_x=0$ は物理的意味を何らもたないが、Fourier-cosine 奇数項展開をおこなうための Dirichlet 条件として $V_x=0$ が要求される。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1,3,5} \sin \alpha_n \left[A_n \left(\alpha_n - 2 \frac{\rho_n^2}{\alpha_n} \right) + B_n \left(\alpha_n - 2 \frac{\sigma_n^2}{\alpha_n} \right) \right. \\
 & \quad + C_n \left(\left(\alpha_n - 2 \frac{\lambda_n^2 - \mu_n^2}{\alpha_n} \right) \cos \mu_n + 4 \frac{\lambda_n \mu_n}{\alpha_n} \tanh \lambda_n \sin \mu_n \right) \\
 & \quad \left. + C_n \left(\alpha_n - 2 \frac{\lambda_n^2 - \mu_n^2}{\alpha_n} \right) \tanh \lambda_n \sin \mu_n - 4 \frac{\lambda_n \mu_n}{\alpha_n} \cos \mu_n \right] \\
 & + 2.4 K_2 + 1.20 K_3 \\
 & = 0 \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

(2.13) が成立するときは、次の Fourier 展開が可能である。

$$\cosh \rho_n \eta = \sum_{m=1,3,5} \frac{3}{R_{mn}} \cos \alpha_m \eta \quad \frac{3}{R_{mn}} = \frac{2 \alpha_m \sin \alpha_m \cosh \rho_n}{\rho_n^2 + \alpha_m^2}$$

$$\cos h \sigma_n \eta = \sum_{m=1,3,5}^3 \bar{S}_{mn} \cos \alpha_m \eta \quad \bar{S}_{mn} = \frac{2 \alpha_m \sin \alpha_m \cos h \sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_m^2}$$

$$\cos h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta = \sum_{m=1,3,5}^5 \bar{T}_{mn} \cos \alpha_m \eta$$

$$\bar{T}_{mn} = \sin \alpha_m \cos h \lambda_n \left[\frac{\mu_n + \alpha_m}{\lambda_n^2 + (\mu_n + \alpha_m)^2} + \frac{\mu_n - \alpha_m}{\lambda_n^2 + (\mu_n - \alpha_m)^2} \right]$$

$$\sinh \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta = \sum_{m=1,3,5}^6 \bar{T}_{mn} \cos \alpha_m \eta$$

$$\bar{T}_{mn} = \sin \alpha_m \cos h \lambda_n \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + (\mu_n + \alpha_m)^2} + \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + (\mu_n - \alpha_m)^2} \right]$$

$$1 = \sum_{m=1,3,5} \bar{Q}_m \cos \alpha_m \eta \quad \bar{Q}_m = \frac{2 \sin \alpha_m}{\alpha_m} \quad (2.14)$$

(2.14) で与えられる Fourier 展開を用いると、 $V_x = 0$ の周辺条件は次式で与えられる。

$$\sum_{n=1,3,5} \sin \alpha_n \left[A_n \frac{\bar{R}_{mn}}{\cos h \rho_n} \left(\alpha_n - 2 \frac{\rho_n^2}{\alpha_n} \right) + B_n \frac{\bar{S}_{mn}}{\cos h \sigma_n} \left(\alpha_n - 2 \frac{\sigma_n^2}{\alpha_n} \right) \right. \\ \left. + \frac{\bar{C}_n}{\cos h \lambda_n} \left(\alpha_n - 2 \frac{\lambda_n^2 - \mu_n^2}{\alpha_n} \right) \bar{T}_{mn} + 4 \frac{\lambda_n \mu_n}{\alpha_n} \bar{T}_{mn} \right. \\ \left. + \frac{\bar{C}_n}{\cos h \lambda_n} \left(\alpha_n - 2 \frac{\lambda_n^2 - \mu_n^2}{\alpha_n} \right) \bar{T}_{mn} - 4 \frac{\lambda_n \mu_n}{\alpha_n} \bar{T}_{mn} \right]$$

$$+ A_m \left(\frac{\rho_m^3}{\alpha_m^2} - 2 \rho_m \right) \tan h \rho_m + B_m \left(\frac{\sigma_m^3}{\alpha_m^2} - 2 \sigma_m \right) \tan h \sigma_m \\ + C_m \left(\left(\frac{\bar{V}_m}{\alpha_m^2} - 2 \lambda_m \right) \tan h \lambda_m \cos \mu_m + \left(\frac{\bar{V}_m}{\alpha_m^2} + 2 \mu_m \right) \sin \mu_m \right) \\ + C_m \left(\left(\frac{\bar{V}_m}{\alpha_m^2} - 2 \lambda_m \right) \sin \mu_m - \left(\frac{\bar{V}_m}{\alpha_m^2} + 2 \mu_m \right) \tan h \lambda_m \cos \mu_m \right) \\ + (24 K_2 + 120 K_3) \bar{Q}_m + \sum_{n=1,3,5} \alpha_n (\alpha_n^2 + 2 \alpha_m^2) \sin \alpha_n \cdot W_{mn} \\ = 0$$

$$m = 1, 3, 5, \dots \quad (2.15)$$

$$\bar{V}_m = \lambda_m^3 - 3 \lambda_m \mu_m^2, \quad \bar{V}_m = \mu_m^3 - 3 \lambda_m^2 \mu_m$$

2.4.3 面内剪断力：0 の条件

$$- \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{\alpha_n} \left[\begin{aligned} &A_n \frac{K_n \rho_n \cos h \rho_n \eta}{\cos h \rho_n} + B_n \frac{K_n \sigma_n \cos h \sigma_n \eta}{\cos h \sigma_n} \\ &+ \frac{C_n}{\cos h \lambda_n} (\dot{U}_n \cos \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta - \dot{U}_n \sin h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta) \\ &+ \frac{C_n}{\cos h \lambda_n} (\dot{U}_n \cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta + \dot{U}_n \cos h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta) \end{aligned} \right] \cos \alpha_n \xi \\
&+ \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{\alpha_m} \left[\begin{aligned} &A_m \frac{K_m \rho_m \cos h \rho_m \xi}{\cos h \rho_m} + B_m \frac{K_m \sigma_m \cos h \sigma_m \xi}{\cos h \sigma_m} \\ &+ \frac{C_m}{\cos h \lambda_m} (\dot{U}_m \cos h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi - \dot{U}_m \sin h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi) \\ &+ \frac{C_m}{\cos h \lambda_m} (\dot{U}_m \sin h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi + \dot{U}_m \cos h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi) \end{aligned} \right] \cos \alpha_m \eta \\
&+ 48 J_0 K_2 + 360 J_0 K_3 (\xi^2 + \eta^2) \\
&- \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \alpha_m \alpha_n \phi_{mn} \cos \alpha_n \xi \cos \alpha_m \eta \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\dot{U}_n = I_1 \lambda_n - I_2 \mu_n, \quad \dot{U}_n = I_1 \mu_n + I_2 \lambda_n \quad (m \text{ も同様})$$

N_{xy} は、単位巾あたりの応力であるから、隅点では物理的な応力ではない。しかし、 N_{xy} は周辺で偶関数であり、奇数項展開のための Dirichlet 条件の要求から、隅点で $N_{xy} = 0$ が成立せねばならない。よって次式を得る。

$$K_2 + 15 K_3 = 0 \quad (2.17)$$

(2.17) が成立するとき

$$\eta^2 = \sum_{m=1,3,5} \dot{Q}_m \cos \alpha_m \eta \quad \dot{Q}_m = 2 \sin \alpha_m \cdot \left(\frac{1}{\alpha_m} - \frac{1}{\alpha_m^2} \right)$$

なる Fourier 展開を用いて、周辺条件は次式となる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha_m} \left[\begin{aligned} &A_m K_m \rho_m + B_m K_m \sigma_m + C_m (\dot{U}_m \cos \mu_m + \dot{U}_m \tan h \lambda_m \sin \mu_m) \\ &+ C_m (\dot{U}_m \tan h \lambda_m \sin \mu_m + \dot{U}_m \cos \mu_m) \end{aligned} \right] \\
&+ 48 J_0 \dot{Q}_m K_2 + 360 J_0 (\dot{Q}_m + \dot{Q}_m) K_3 \\
&= 0 \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (2.18)
\end{aligned}$$

2.4.4 面内軸方向力と外力の釣合

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = (-) \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{\alpha_n^2} \left[\begin{aligned} &A_n \frac{K_n \sigma_n^2 \sin h \rho_n \eta}{\cos h \rho_n} + B_n \frac{K_n \sigma_n^2 \sin h \sigma_n \eta}{\cos h \sigma_n} \\ &+ \frac{C_n}{\cos h \lambda_n} (\dot{U}_n \sin h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta - \dot{U}_n \cos \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta) \\ &+ \frac{C_n}{\cos h \lambda_n} (\dot{U}_n \cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta + \dot{U}_n \sin \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta) \end{aligned} \right] \sin \alpha_n \xi$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1,3,5} \left[A_m \frac{K_m \sin h \rho_m \xi}{\cos h \rho_m} + B_m \frac{K_m \sin h \sigma_m \xi}{\cos h \sigma_m} \right. \\
& \quad \left. + C_m \frac{Q_m(\xi)}{\cos h \lambda_m} + G_m \frac{Q_m(\xi)}{\cos h \lambda_m} \right] \sin \alpha_m \eta \\
& - 720 J_0 \xi \eta K_3 - \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \alpha_m^2 \phi_{mn} \sin \alpha_n \xi \cdot \sin \alpha_m \eta \\
& \quad U_n = L_n (\lambda_n^2 - \mu_n^2) - L_n 2 \lambda_n \mu_n, \quad U_n = L_n (\lambda_n^2 - \mu_n^2) + L_n 2 \lambda_n \mu_n
\end{aligned} \tag{2.19}$$

周辺における面内軸方向の分布 $f(\eta)$ を Fourier-sine 奇数項展開する。

$$f(\eta) = \sum_{m=1,3,5} J_m \sin \alpha_m \eta \quad J_m = 2 \frac{\cos \alpha_m (1-\varepsilon)}{\alpha_m} f_0 \tag{2.20}$$

奇函数の Fourier-sine 奇数項展開に関しては、何ら制約がないから、次の展開をおこなう。

$$\begin{aligned}
\sin h \rho_n \eta &= \sum_{m=1,3,5} {}^4 R_{mn} \sin \alpha_m \eta & {}^4 R_{mn} &= \frac{2 \sin \alpha_m \cdot \rho_n \cos h \rho_n}{\rho_n^2 + \alpha_m^2} \\
\sin h \sigma_n \eta &= \sum_{m=1,3,5} {}^4 S_{mn} \sin \alpha_m \eta & {}^4 S_{mn} &= \frac{2 \sin \alpha_m \cdot \sigma_n \cos h \sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_m^2} \\
\sin h \lambda_n \eta \cdot \cos \mu_n \eta &= \sum_{m=1,3,5} {}^7 T_{mn} \sin \alpha_m \eta \\
{}^7 T_{mn} &= \sin \alpha_m \cdot \cos h \lambda_n \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + (\mu_n + \alpha_m)^2} - \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + (\mu_n - \alpha_m)^2} \right] \\
\cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta &= \sum_{m=1,3,5} {}^8 T_{mn} \sin \alpha_m \eta \\
{}^8 T_{mn} &= \sin \alpha_m \cdot \cos h \lambda_n \left[-\frac{\mu_n + \alpha_m}{\lambda_n^2 + (\mu_n + \alpha_m)^2} + \frac{\mu_n - \alpha_m}{\lambda_n^2 + (\mu_n - \alpha_m)^2} \right] \\
\eta &= \sum_{m=1,3,5} {}^3 Q_m \sin \alpha_m \eta & {}^3 Q_m &= \frac{2 \sin \alpha_m}{\alpha_m^2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

(2.21) の Fourier 展開を用いると、周辺条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1,3,5} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n^2} \left[A_n \frac{K_n \rho_n^2 {}^4 R_{nn}}{\cos h \rho_n} + B_n \frac{K_n \sigma_n^2 {}^4 S_{nn}}{\cos h \sigma_n} \right. \\
& \quad \left. + C_n \frac{{}^3 U_n {}^7 T_{nn} - {}^4 U_n {}^8 T_{nn}}{\cos h \lambda_n} + G_n \frac{{}^4 U_n {}^7 T_{nn} + {}^3 U_n {}^8 T_{nn}}{\cos h \lambda_n} \right] \\
& + \left[A_m K_m \tan h \rho_m + B_m K_m \tan h \sigma_m \right. \\
& \quad \left. + C_m (L_m \tan h \lambda_m \cos \mu_m - L_m \sin \mu_m) + G_m (L_m \sin \mu_m + L_m \tan h \lambda_m \cos \mu_m) \right] \\
& - 720 J_0 {}^3 Q_m K_3 - \sum_{n=1,3,5} \alpha_m^2 \phi_{mn} \sin \alpha_n \\
& = J_m \quad m=1, 3, 5, \dots
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.4.5 隅点力の条件

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \\
 &= (-) \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{\alpha_n} \left[A_1 \frac{\rho_n \sin h \rho_n \eta}{\cos h \rho_n} + B_1 \frac{\sigma_n \sin h \sigma_n \eta}{\cos h \sigma_n} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_n}{\cos h \lambda_n} (\lambda_n \sin h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta - \mu_n \cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_n}{\cos h \lambda_n} (\lambda_n \cos h \lambda_n \eta \sin \mu_n \eta + \mu_n \sin h \lambda_n \eta \cos \mu_n \eta) \right] \sin \alpha_n \xi \\
 & \quad (-) \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{\alpha_m} \left[A_1 \frac{\rho_m \sin h \rho_m \xi}{\cos h \rho_m} + B_1 \frac{\sigma_m \sin h \sigma_m \xi}{\cos h \sigma_m} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_m}{\cos h \lambda_m} (\lambda_m \sin h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi - \mu_m \cos h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_m}{\cos h \lambda_m} (\lambda_m \cos h \lambda_m \xi \sin \mu_m \xi + \mu_m \sin h \lambda_m \xi \cos \mu_m \xi) \right] \sin \alpha_m \eta \\
 & \quad + \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \alpha_m \alpha_n w_{mn} \sin \alpha_n \xi \sin \alpha_m \eta \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

隅点で $2 w_{,\xi\eta}(1,1) = \kappa f_0$ であり、対称条件により $m=n$ に対して $A_m = A_n$ ……が成立することを
を用いれば

$$\begin{aligned}
 & -2 \sum_{n=1,3,5} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} \left[A_1 \rho_n \tan h \rho_n + B_1 \sigma_n \tan h \sigma_n \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_n}{1} (\lambda_n \tan h \lambda_n \cos \mu_n - \mu_n \sin \mu_n) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_n}{4} (\lambda_n \sin h \mu_n + \mu_n \tan h \lambda_n \cos \mu_n) \right] \\
 & \quad + \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,3,5} \alpha_m \alpha_n w_{mn} \sin \alpha_m \sin \alpha_n \\
 &= \frac{1}{2} \kappa f_0 \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

を得る。

以上 (2.10) (2.11) (2.13) (2.15) (2.17) (2.18) (2.22) (2.24) より得られる無限連立1次方程式の解として、 A_n, B_n, C_n, C_n ($n=1,3,5, \dots$) および K_1, K_2, K_3, f_0 が決定し、曲面上の総ての位置の変位および応力が決定される。

数値計算に際しては、有限個で打ち切って近似解とするが、項数をふやせば、工学的に十分な精度の解を得ることができる。

参 考 文 献

*1) W.S.WLASSOW "Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik"
AKADEMIE-VERLAG · BERLIN 1958

*2) 坪井善勝 角野晃二

"偏平 Hyperbolic Paraboloidal Shell 応力の Fourier 解析(I), (II) "

日本建築学会論文報告集 第 98 号 昭和 39 年 5 月

同 第 100 号 昭和 39 年 7 月