

# 不規則吊材を有する吊橋の解法

後 藤 茂 夫 \*

## 1 序

不規則な斜吊材を有する吊橋に変形法を適用した解法で、変形法による撓度理論とも云うべきものである。本理論を垂直吊材のみの一般吊橋に適用し、その基本行列方程式より差分方程式を導き、これを微分方程式に変換すれば撓度理論におけるMelanの基礎微分方程式が得られる。

普通の滑節骨組構造に用いられている変形法は、いわゆる微小変形理論であり、節点の変位量の関数としての各部材力が変形前の材軸方向に作用するものとして、節点のまわりの力のつりあいより変位に関する連立方程式を導いている。本理論では部材力を変形後の材軸方向に作用させて節点に集る力のつりあいより連立方程式を求めてみた。

すなわち、変形後の材軸方向に働いている材端力を原材軸方向とその直角方向に分解した場合、原材軸方向の分力のうち、死荷重などによる変形前の軸力(初期軸力)に等しい分については、すでにつりあい条件を満足しているはずである。したがって、あらたにつりあいを保つべき力としては、原材軸方向は活荷重による軸力の増加分、原材軸直角方向は初期軸力を含めた合成軸力の分力を考えなければならぬ。

このようにして誘導された変位に関する連立方程式は、当然、線型とはならず係数行列に合成軸力の関数を含むことになる。したがって合成軸力の大きさを仮定して解さねばならない。これは微分方程式より出発した撓度理論が、主ケーブルの合成水平力を仮定して線型化しなければならないと同様である。

ここでは本理論に用いた、材軸の変位を考慮する変形法を仮りに第二変形法とよぶことにする。

## 2 軸力部材における第二変形法

図-1のように、部材*ij*の両端を*uv*座標で表わす。*N<sub>dij</sub>*は死荷重などによる初期張力で変形前の状態ではつりあっているものである。これに活荷重が加わり温度が*t*°C上昇して、*ij*は'*ij*'と変位し軸力が*N<sub>ij</sub>*だけ増加したとすれば、

$$N_{ij} = \frac{EA_{ij}}{\ell_{ij}} \left\{ \frac{u_i - u_j}{\ell_{ij}} (x_i - x_j) + \frac{v_i - v_j}{\ell_{ij}} (y_i - y_j) - \epsilon t \ell_{ij} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

が成立する。ここで、*x*, *y*は節点の変位、*E*は弾性係数、*A<sub>ij</sub>*は断面積、*ε*は線膨脹係数である。また合成軸力の直角方向の成分は

$$S_{ij} = \left\{ -\frac{v_i - v_j}{\ell_{ij}} (x_i - x_j) + \frac{u_i - u_j}{\ell_{ij}} (y_i - y_j) \right\} \frac{N_{dij} + N_{ij}}{\ell_{ij}} \dots\dots (2)$$

\* KK 宮地鉄工所

したがつて、i 端における材端力の u v 成分は、高次の微小項を省略して、

$$X_{ij} = (a_{ij} + k_{ij} b_{ij})(x_i - x_j) + C_{ij}(1 - k_{ij})(y_i - y_j) - EA_{ij} \alpha_{ij} \epsilon t \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$Y_{ij} = C_{ij}(1 - k_{ij})(x_i - x_j) + (b_{ij} + k_{ij} a_{ij})(y_i - y_j) - EA_{ij} \beta_{ij} \epsilon t \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\alpha_{ij} = \frac{u_i - u_j}{\ell_{ij}} \quad , \quad \beta_{ij} = \frac{v_i - v_j}{\ell_{ij}}$$

$$a_{ij} = \frac{EA_{ij}}{\ell_{ij}} \alpha_{ij} \quad , \quad b_{ij} = \frac{EA_{ij}}{\ell_{ij}} \beta_{ij}^2$$

$$C_{ij} = \frac{EA_{ij}}{\ell_{ij}} \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

$$k_{ij} = \frac{Nd_{ij} + N_{ij}}{EA_{ij}} \quad \text{である。}$$

この(3), (4)式は、第二変形法による軸力部材の材端分力を表わす一般式である。もちろん  $k_{ij} = 0$  とすれば一般変形法の式に一致する。

### 3 吊橋への適用

ここで考える吊橋は、主ケーブルと曲げ剛性をもつ補剛桁が任意の傾斜の吊材により連結された構造とする。そして第二変形法は主ケーブルについてのみ適用し、補剛桁節点間の水平相対変位は生じないものとする。

いま主ケーブル節点を  $i (0, 1, 2 \dots n)$   $i-1 \sim i$  区間の諸値に Suffix  $i$ 、補剛桁節点を  $j (0, 1, \dots m)$  とし、 $i j$  間に吊材があれば、その諸値を Suffix  $ij$  を付して

(3), (4)を適用すれば、水平力のつりあいより、

$$\begin{aligned} & -(a_i + k_i b_i) x_i + (a_i + a_{i+1} + k_i b_i + k_{i+1} b_{i+1} + \sum_j a_{ij}) x_i \\ & -(a_{i+1} + k_{i+1} b_{i+1}) x_{i+1} - C_i (1 - k_i) y_i + (C_i + C_{i+1} - k_i C_i - k_{i+1} C_{i+1}) \\ & + \sum_j (ij) y_i - C_{i+1} (1 - k_{i+1}) y_{i+1} - \sum_j C_{ij} y'_j - x'_i \sum_j a_{ij} \end{aligned}$$

$$= Ec \epsilon t (\alpha_i A_i + \alpha_{i+1} A_{i+1})$$

垂直力のつりあいより

$$\begin{aligned} & -c_i(1-k_i)x_{i-1} + (c_i + c_{i+1} - k_i c_i - k_{i+1} c_{i+1} + \sum_j c_{ij}) x_i - c_{i+1}(1-k_{i+1}) x_{i+1} \\ & - (b_i + k_i a_i) y_{i-1} + (b_i + b_{i+1} + k_i a_i + k_{i+1} a_{i+1} + \sum_j b_{ij}) y_i - (b_{i+1} + k_{i+1} a_{i+1}) y_{i+1} \\ & - \sum_j b_{ij} y'_j - x' \sum_j c_{ij} = Ec \epsilon t (\beta_i A_i + \beta_{i+1} A_{i+1}) \end{aligned}$$

これを主ケーブルの両端を固定とし、 $i = 1, 2, \dots, n-1$  として行列で表わせば、

$$(a + k_b) x + (c - k_c) y - c' y' - A x' = U_t \dots\dots\dots(5)$$

$$(c - k_c) x + (b + k_a) y - b' y' - C x' = V_t \dots\dots\dots(6)$$

ここで、

$$a = \left[ \begin{array}{c} \leftarrow \\ -a_i, a_i + a_{i+1} + \sum_j a_{ij}, -a_{i+1} \\ \rightarrow \end{array} \right]$$

$b, c$  も同様な行列

$$k_a = \left[ \begin{array}{c} \leftarrow \\ -k_i a_i, k_i a_i + k_{i+1} a_{i+1}, -k_{i+1} a_{i+1} \\ \rightarrow \end{array} \right]$$

$k_b, k_c$  も同様

$$A = \left[ \begin{array}{c} \sum_j a_{1j} \\ \sum_j a_{2j} \\ \dots \\ \sum_j a_{n-1,j} \end{array} \right] \quad C = \left[ \begin{array}{c} \sum_j c_{1j} \\ \sum_j c_{2j} \\ \dots \\ \sum_j a_{n-1,j} \end{array} \right]$$

また、 $c', b'$  は、その  $ij$  要素が  $c_{ij}, b_{ij}$  となる行列、 $x, y$  は主ケーブル節点の水平、垂直変位、 $y'$  は補剛桁節点のたわみを表わす列ベクトル、 $x'$  は補剛桁の水平移動量、 $U_t, V_t$  は水平、垂直の温度項による列ベクトルである。次に補剛桁節点  $j$  に集まる吊材について垂直成分の和を  $W_j$  とすれば、

$$-\sum_i c_{ji} x_i - \sum_i b_{ji} y_i + y'_j \sum_i b_{ji} = W_j$$

両端を単純支持として、 $j = 1, 2, \dots, m-1$ として行列表示すれば、

$$-c' * x - b' * y + By' + c' x' = W \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし \* は 行列の転置記号

$$B = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \sum_i b_{ji} & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} \sum_i c_{1i} \\ \sum_i c_{2i} \\ \dots\dots \\ \sum c_{m-1-i} \end{bmatrix}$$

また、補剛桁節点に作用する荷重列ベクトルを P とすれば、吊材による上揚力ベクトル W との間に次の関係がある。

$$W = P - hy' \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、h は補剛桁のたわみ影響線行列の逆行列である。(7), (8)より W を消去すれば、

$$-c' * x - b' * y + (B + h)y' + C' x' = P \quad \dots\dots\dots (9)$$

更に、補剛桁に作用する水平外力を P<sub>H</sub> とすれば、水平力のつりあいより

$$-\sum_i x_i \sum_j a_{ji} - \sum_i y_i \sum_j c_{ji} + \sum_j y'_j \sum_i c_{ji} + x' \sum_j a_{ji} = P_n$$

すなわち、

$$-A * x - C * y + C' * y' + ax' = P_H \quad \dots\dots\dots (10)$$

(5), (6), (9), (10) より吊橋の節点の変位に関する連立方程式として次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a + k_b & c - k_c & -c' & -A \\ c - k_c & b + k_a & -b' & -C \\ -c' * & -b' * & B + b & C' \\ -A * & -C * & C' * & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_t \\ V_t \\ P \\ P_H \end{bmatrix}$$

#### 4 地理論との関連、および特徴

いま主ケーブル、補剛桁の断面は一様、吊材は垂直でその伸びを無視すれば、(10)式は次のように簡単になる。

$$(a + k_b)x + (c - k_c) = D \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$(c - k_c)x + (b + k_a + h)y = P \quad \dots\dots\dots (12)$$

(12) を変形して

$$(cx + by) + (-k_c x + k_a y) + hy = P$$

ここで左辺第1項の第*i*行要素は

$$\begin{aligned} [cx + by]_i &= -c_i x_{i-1} + (c_i + c_{i+1})x_i - c_{i+1}x_{i+1} \\ &\quad - b_i y_{i-1} + (b_i + b_{i+1})y_i - b_{i+1}y_{i+1} \\ &= \beta_i N_i - \beta_{i+1} N_{i+1} \end{aligned}$$

$N_i$  の水平分力は各区间で一定となり、これをHとすれば

$$[cx + by]_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i} H - \frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}} H = \frac{-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}}{d} H \quad \dots\dots (13)$$

第2項は

$$\begin{aligned} [-k_c x + k_a y] &= k_i c_i x_{i-1} - (k_i c_i + k_{i+1} c_{i+1})x_i + k_{i+1} c_{i+1} x_{i+1} \\ &\quad - k_i a_i y_{i-1} + (k_i a_i + k_{i+1} a_{i+1})y_i - k_{i+1} a_{i+1} y_{i+1} \\ &= \frac{Hd + H}{d} \{ \alpha_i \beta_i x_{i-1} - (\alpha_i \beta_i + \alpha_{i+1} \beta_{i+1})x_i + \alpha_{i+1} \beta_{i+1} x_{i+1} \\ &\quad - \alpha_i^2 y_{i-1} + (\alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2)y_i - \alpha_{i+1}^2 y_{i+1} \} \quad \dots\dots (14) \end{aligned}$$

一方、(11) 式は近似的に次のようにかける。

$$\begin{aligned} cx + cy &= 0 \quad \text{すなわち} \\ -\frac{\alpha_i^2}{l_i} x_{i-1} + \left( \frac{\alpha_i^2}{l_i} + \frac{\alpha_{i+1}^2}{l_{i+1}} \right) x_i - \frac{\alpha_{i+1}^2}{l_{i+1}} x_{i+1} \\ -\frac{\alpha_i \beta_i}{l_i} y_i + \left( \frac{\alpha_i \beta_i}{l_i} + \frac{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}}{l_{i+1}} \right) y_i - \frac{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}}{l_{i+1}} y_{i+1} &= 0 \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

吊材間隔が充分密であるとすれば、

$$\alpha_i \doteq \alpha_{i+1} \quad , \quad \beta_i \doteq \beta_{i+1} \quad , \quad l_i \doteq l_{i+1}$$

したがって、(15) に  $\beta_i l_i / \alpha_i$  を乗じ上の関係を用いれば、

$$\begin{aligned} -\alpha_i \beta_i x_{i-1} + (\alpha_i \beta_i + \alpha_{i+1} \beta_{i+1})x_i - \alpha_{i+1} \beta_{i+1} x_{i+1} \\ - \beta_i^2 y_{i-1} + (\beta_i^2 + \beta_{i+1}^2)y_i - \beta_{i+1}^2 y_{i+1} = 0 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

これを(14) に代入しxを消去すれば

$$[-k_c x + k_a y]_i = \frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{d} (H_a + H) \quad \dots\dots\dots (17)$$

さらに第3項の第*i*行は

$$[hy]_i = [rM]_i$$

ここでMは補剛桁節点の曲げモーメントを表わす列ベクトル、

$$r = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 2, & -1 \\ & & & & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

したがって

$$[hy]_i = \frac{-M_{i-1} + 2M_i - M_{i+1}}{d} \dots\dots\dots (18)$$

以上より*i*点の垂直活荷重を*P<sub>i</sub>* とすれば

$$\frac{-M_{i-1} + 2M_i - M_{i+1}}{d} + \frac{-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}}{d} H + \frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{d} (H_d + H) = P_i \dots\dots\dots (19)$$

両辺を*d*で割れば左辺は二次の差分形式となり、*d*→0として微分方程式に変換すれば、

$$-\frac{d^2M}{dx^2} - H \frac{dv^2}{dx^2} - (H_d + H) \frac{d^2y}{dx^2} = P(x)$$

すなわち、

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} - H \frac{d^2v}{dx^2} - (H_d + H) \frac{d^2y}{dx^2} = P(x) \dots\dots\dots (20)$$

となり、Melan の基本微分方程式を得る。

次に本理論の特徴を列記すれば、

1. 不規則な斜吊材を有する吊橋の解析
2. 主ケーブル、補剛桁が断面変化する場合の解析
3. 任意のケーブル形状
4. 小吊橋のように、吊材が密に存在しない場合の正確な解析
5. 斜吊材を有する場合に補剛桁を水平可動とした場合、固定とした場合、あるいは支間中央などで主ケーブルを補剛桁に緊結した場合などの解析が正確にできる。

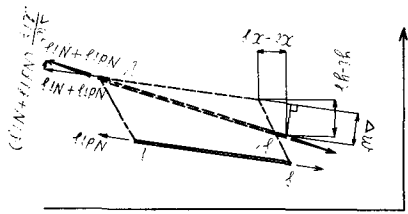


図-1

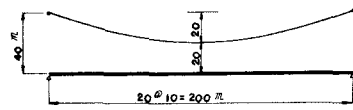


図-4

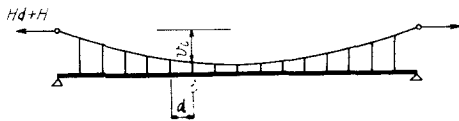
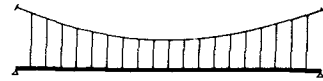


図-2



最大曲げモーメント図

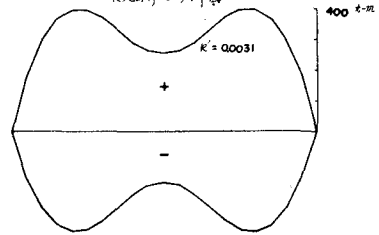


図-5

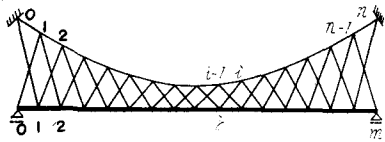


図-3

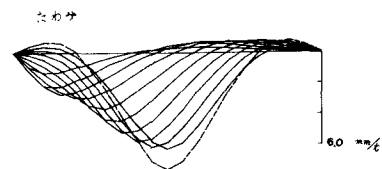
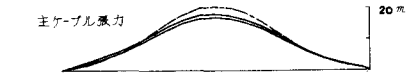
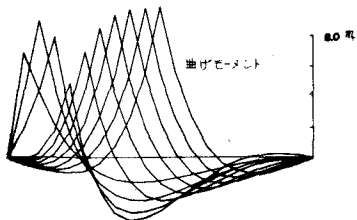
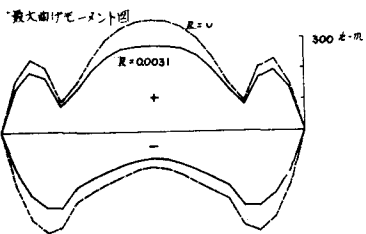
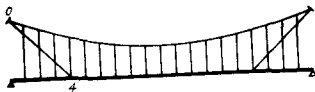


図-6

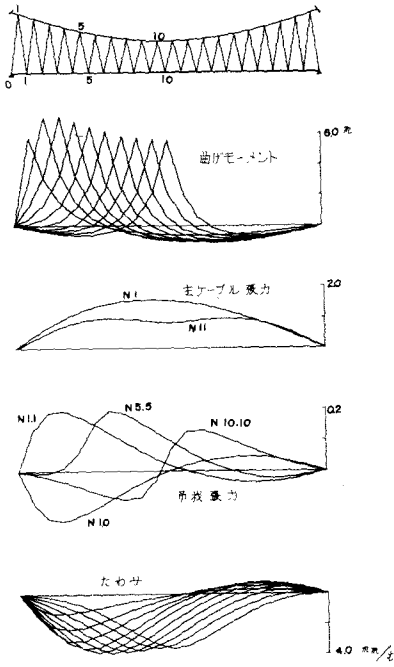


図-7

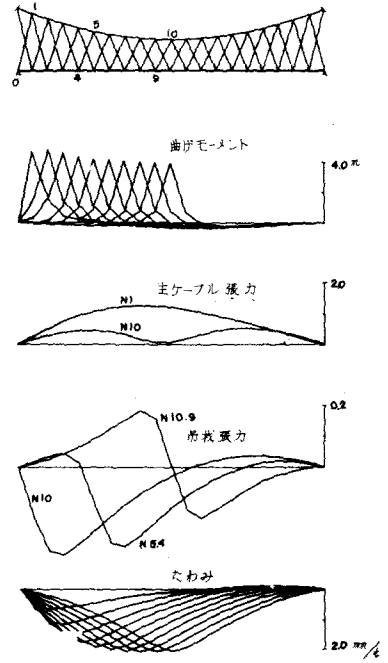


図-8

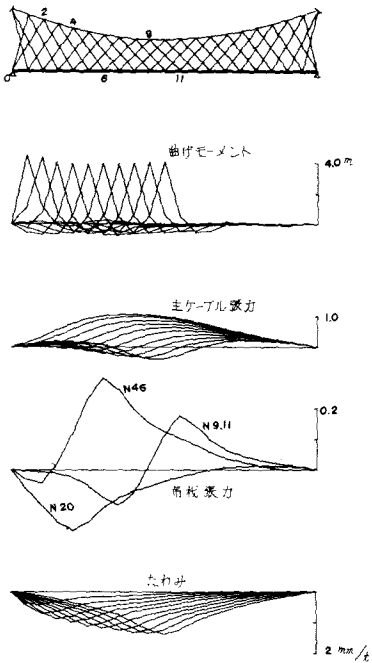


図-9

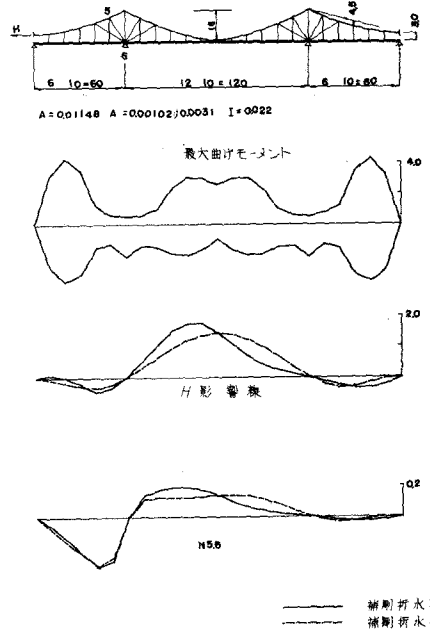


図-10

## 5 数種の形式の計算例

本理論を用い、CDC-G20 のためのプログラムが完成されている。インプットデータとして、主ケーブル、補剛桁節点の位置、吊材の連結表、同断面積、主ケーブル断面積、補剛桁断面二次モーメント、主ケーブルの水平張力係数、影響線または固定荷重および温度変化のいずれかの指定、それに伴うデータ、節点の拘束条件などを与えれば、主ケーブル張力、吊材張力、補剛桁曲げモーメント、たわみ、補剛桁節点の水平力が影響線その他の形式で算出される。以下に次に示すような吊橋の電算結果をグラフにより表わすことにする。

### 参考文献

- 平井 敦 : 鋼橋Ⅲ  
倉西 茂 : 行列による吊橋の解析  
(土木学会論文集第81号)
- 児嶋, 成岡 : Nielsen system 橋  
(土木学会誌 1964年4月号)