

電子計算機による吊橋計算の問題点とその一解決法

*
大 地 羊 三

1. ま え が き

吊橋の計算法については、今まで数多くの論文が発表されている。又吊橋の計算に電子計算機を利用するところも各所でなされており、手元にある文献をひろっても、吊橋のたわみをFourier級数に展開しその係数を求める方法、影響線を計算させる方法、行列を利用する方法等がある。著者は吊橋計算のためのプログラムを作成しなければならない立場に立たされ、この問題について検討して来たので、今までにまとめた著者の見解を述べ、皆様の御批判を頂きたいと思う。

電子計算機を利用する場合、まず考えなければならない事は、

- 1) 出来るだけ広い構造に適用出来る事
- 2) プログラミングが容易な事
- 3) 計算時間が少ない事

等である。

Steinmann, Perry, Timoshenko等の理論を用いて微分方程式を解き、その結果をプログラムする一連の方法は、補剛桁の形式が変わると、その都度殆んど全部のプログラムを書きかえなければならない。又プログラムすべき式がかなり複雑になり、構造力学に精通しないプログラマーには難解なものとなるおそれがある。しかし上手に計画すれば、計算時間は次に述べる行列を利用する方法よりかなり少なくする事が出来るであろう。

一方行列を利用する方法は、補剛桁の形式にとらわれる部分が比較的少なく、一つのプログラムでCover出来る範囲が大きい。しかも行列の係数の計算さえ出来れば、あとは行列の間の演算であり、プログラムが容易である。ただし長大橋になると取扱わなければならない行列が、 200×200 以上の元数を持つ事になり、短い計算時間で解を得る事が出来るかどうか問題がある。

著者は計算時間は多少犠牲にしても、少ない労力で多くの仕事出来るプログラムを作る事を念頭において、行列を利用する方法に着目し、計算式の誘導其他について精細な検討をしている。

2. 鉛直荷重をうける吊橋の計算

衆知の如く、変断面補剛桁をもつ吊橋の問題は、次の微分方程式を解く事に帰一する。

* 国鉄鉄道技術研究所

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 w}{dx^2} - (H+h) \frac{d^2 w}{dx^2} = P + h \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \dots\dots\dots 2-1$$

$$\frac{L_3}{EcAc} h \pm atL_2 - \int \frac{dw}{dx} \frac{dy}{dx} dx = \xi_n - \xi_o \dots\dots\dots 2-2$$

但し x = 左支点からの距離

w = 活荷重による補剛桁のたわみ

y = ケーブルのサグ

H = 死荷重によるケーブルの水平力

h = 活荷重によるケーブルの水平力

p = 活荷重

α = ケーブルの線膨脹係数

t = 温度変化

Ac = ケーブルの断面積

Ec = ケーブルのヤング係数

EJ = 補剛桁の曲げ剛性

ξ_n, ξ_o = 塔頂の変位

$$L_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 \beta}, \quad L_3 = \int \frac{dx}{\cos^3 \beta}$$

2-1, 2-2 を行列の形で書くと次の如くなる。

$$\left[DK \tilde{D} \right] \{ w \} - (H+h) \left[D \right] \{ w \} = \{ P \} - \left[x \right] \{ w \} + h \left[D \right] \{ y \} \dots\dots\dots 2-3$$

$$\frac{L_3}{EcAc} h \pm atL_2 + \{ \tilde{y} \} \left[D \right] \{ w \} = \xi_n - \xi_o \dots\dots\dots 2-4$$

但し $\left[D \right] = \left[\delta \right] \left[\lambda \right]^{-1} \left[\delta' \right]$

$$(\delta) = \begin{bmatrix} -1, 1 \\ -1, 1 \\ -1, 1 \\ -1, 1 \end{bmatrix}, \quad (\delta') = \begin{bmatrix} 1 \\ -1, 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1, 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_i = \text{格点間の距離}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1^1 + \lambda_2^1), \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1, 2(\lambda_2^1 + \lambda_3^1), \lambda_3^1 \\ \lambda_{n-2}^1, 2(\lambda_{n-2}^1 + \lambda_{n-1}^1), \lambda_{n-1}^1 \\ \lambda_{n-1}^1, 2(\lambda_{n-1}^1 + \lambda_n^1) \end{bmatrix}, \quad \lambda_i^1 = \frac{\lambda_i}{6EJ_i}$$

$$\{w\} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-2} \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$$

又 $[X]$ は図 1 に示す如く、センター・ステー、タワー・ステーがあるときに附加される項で、タワー・ステーの場合は

$$[X] = \begin{bmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix}, \quad x_i = E_i A_i \cos^2 \theta_i$$

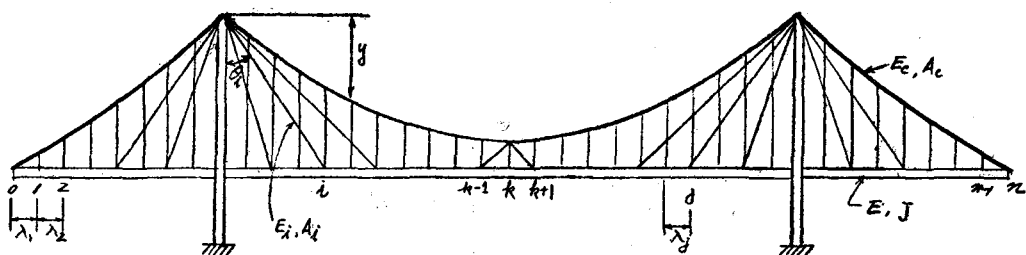


図-1

となり、センター・ステーの場合は

$$\{X\} = \begin{pmatrix} X_{h-1}, -X_{h-1} \\ -X_{h-1}, (X_{h-1} + X_{h+1}), -X_{h+1} \\ -X_{h+1}, X_{h+1} \end{pmatrix}$$

で表わされる。

2-3, 2-4より h および $\{w\}$ を求めれば、その他の諸量は、次の如く比較的容易に求める事が出来る。

$$\text{たわみ角} \quad \{\theta\} = -\{\lambda\}^{-1} \{\tilde{\delta}\} \{w\} \dots\dots\dots 2-5$$

$$\text{曲げモーメント} \quad \{M\} = -\{K\}^{-1} \{\tilde{D}\} \{w\} \dots\dots\dots 2-6$$

$$\text{せん断力} \quad \{Q\} = -\{\lambda\}^{-1} \{\delta'\} \{K\}^{-1} \{\tilde{D}\} \{w\} \dots\dots\dots 2-7$$

以上は補剛桁が連続する場合の式である。

補剛桁が他の形式の場合および補剛トラスの場合は、2-3のオ一項の係数行列 $\{DK^{-1}\tilde{D}\}$ を変えればよい。

3. 横荷重をうける吊橋の計算

吊橋が横荷重をうけ図2の如く変形するものとすると、図に示す諸量の間には、次の関係式が成立つ

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{\delta_s - (\delta_c + \delta_t)}{h} = \frac{z}{q_s} \dots\dots\dots 3-1$$

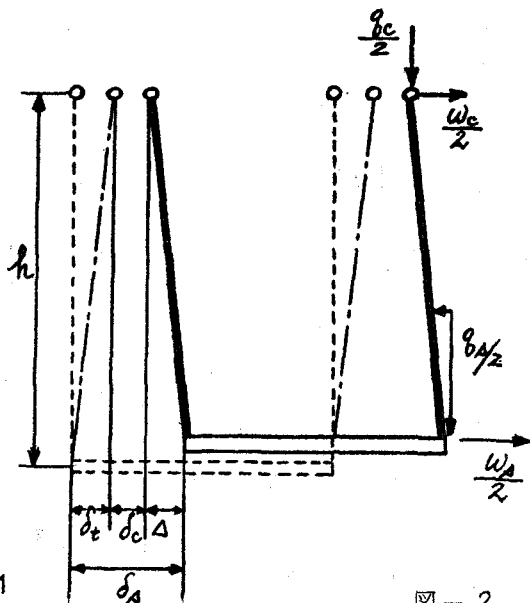


図-2

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ \frac{d^2 \delta_s}{dx^2} \right) = w_s - z \dots\dots\dots 3-2$$

$$-H \frac{d^2}{dx^2} \delta_c = w_c + z \dots\dots\dots 3-3$$

但し x は橋軸方向に取った横座標であり、 H はケーブルの水平力である。

2-1 ~ 2-3 を行列の形で表示すると、次の如くなる。

$$\{\delta_s\} - \{\delta_c\} - \{\delta_x\} = \{h/q_s\} \{z\} \dots\dots\dots 3-4$$

$$\{DK^{-1}\tilde{D}\} \{\delta_s\} = \{w_s\} - \{z\} \dots\dots\dots 3-5$$

$$-H \{D_c\} \{\delta_c\} = \{w_c\} + \{z\} \dots\dots\dots 3-6$$

但し h/q_s は、 h_i/q_{si} を対角線上に並べた対角行列。 $\{DK^{-1}\tilde{D}\}$ は前節参照。又、 $\{D_c\}$ は両端単純支持の桁と考えた場合の $\{D\}$ を示す。

Ellis の方法にしたがって 3-4 ~ 3-6 より $\{\delta_s\}$, $\{\delta_c\}$ を消却すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(\{DK^{-1}\tilde{D}\}^{-1} - \frac{1}{H} \{D_c\}^{-1} + \{h/q_s\} \right) \{x\} \\ & = \{h/q_s\} \{w_s\} - \frac{1}{H} \{D_c\}^{-1} \{w\} + \{\delta_x\} \dots\dots\dots 3-7 \end{aligned}$$

但し $\{w_s\} - \{z\} \equiv \{x\}$, $\{w_s\} + \{w_c\} \equiv \{w\}$ とした。

又 Erzen の方法にしたがい 3-4 ~ 3-6 より $\{z\}$ および $\{\delta_c\}$ を消却すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(\{DK^{-1}\tilde{D}\} + \{q_s/h\} - \frac{1}{H} \{q_s/h\} \{D_c\}^{-1} \{DK^{-1}\tilde{D}\} \right) \{\delta_s\} \\ & = \{w_s\} + \{q_s/h\} \left(\frac{1}{H} \{m_c\} + \{\delta_x\} \right) \dots\dots\dots 3-8 \end{aligned}$$

但し $\{m_c\} \equiv -\{D_c\}^{-1} \{w_s + w_c\}$

又動的現象を取扱う場合であれば、伊藤博士の方法にしたがい 3-4 ~ 3-6 より $\{z\}$ を消却し

$$\{w_s\} = -\{q_s/g\} \{\ddot{\delta}_s\}, \quad \{w_c\} = -\{q_c/g\} \{\ddot{\delta}_c\}$$

とおけばよい。結果は次の如くなる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} \frac{q_{\Delta}}{g}, 0 \\ 0, \frac{q_c}{g} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\delta}_{\Delta} \\ \ddot{\delta}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left[DK^{-1} \tilde{D} \right] + \left[\frac{q_{\Delta}}{h} \right], -\left[\frac{q_{\Delta}}{h} \right] \\ -\left[\frac{q_{\Delta}}{h} \right], -H[D_c] + \left[\frac{q_{\Delta}}{h} \right] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{\Delta} \\ \delta_c \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \frac{q_{\Delta}}{h}, 0 \\ 0, \frac{q_{\Delta}}{h} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{\Delta} \\ \delta_c \end{Bmatrix} \dots\dots\dots 3-9
 \end{aligned}$$

4. 塔の計算

塔を片持梁と考えると、図-3の载荷状態に対して、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \left([D_c K_c^{-1} \tilde{D}_c] + [\delta W' \tilde{\delta}_c] \right) \{y\} \\
 &= \{P\} + \{N'\} \dots\dots\dots 4-1
 \end{aligned}$$

但し $[D_c] = [\delta_c] [\lambda]^{-1} [\delta_c]$

$$[\delta_c] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1, 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1, 1 \end{bmatrix}$$

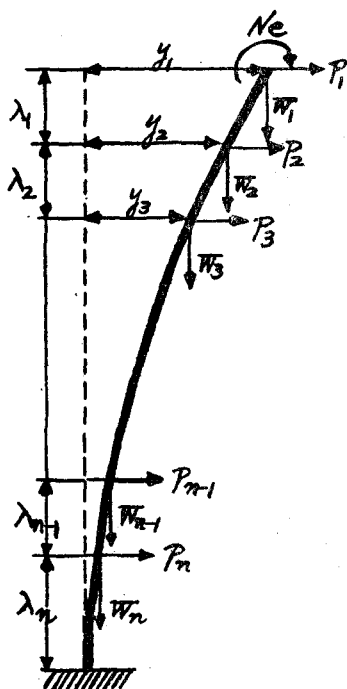


図-3

$$, \quad \{\lambda\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \{W\} = \begin{bmatrix} W_{11} & & & \\ & W_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_m \end{bmatrix}, \quad W_{ij} = \frac{\sum_{a=i}^j W_a}{\lambda_j}$$

$$\{K_c\} = \begin{bmatrix} 2(\lambda_1^1 + \lambda_2^1), \lambda_2^1 & & & \\ \lambda_2^1, 2(\lambda_2^1 + \lambda_3^1), \lambda_3^1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1}^1, 2(\lambda_{n-1}^1 + \lambda_n^1), \lambda_n^1 & \\ & & & \lambda_n^1 & 2\lambda_n^1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i^1 = \frac{\lambda_i}{6EJ_i}$$

$$\{y\} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \{P\} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{pmatrix}, \quad \{N\} = \begin{pmatrix} N_a/\lambda_1 \\ -N_a/\lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

塔の微小変形のみを考える場合は $W\alpha=0$ としてもよい。又塔が骨組構造で出来ている場合は、4-1の左辺の第一項および右辺の第一項を夫々次の如く変形しなければならない。

$$\{D_c K_c D_c\} \approx \{a_{131}\} - \{a_{132}\} \{a_{232}\}^{-1} \{a_{231}\} \dots\dots\dots 4-2$$

$$\{P\} \approx \{P\} - \{a_{132}\} \{a_{232}\}^{-1} \{W\} \\ - \left\{ a_{13} - a_{132} a_{232}^{-1} a_{23} \right\} \left\{ a_{33} \right\}^{-1} \{m\} \dots\dots\dots 4-3$$

但し $\{a_{131}\} = \{a_{11}\} - \{a_{13} a_{33}^{-1} a_{31}\}$, $\{a_{132}\} = \{a_{12}\} - \{a_{13} a_{33}^{-1} a_{32}\}$

$$\{a_{232}\} = \{a_{22}\} - \{a_{23} a_{33}^{-1} a_{32}\}, \quad \{a_{231}\} = \{\tilde{a}_{132}\}$$

$$\{a_{11}\} = \{\delta_z\} \left[\frac{EF}{L^3} X^2 + \frac{12EJ}{L^5} Y^2 \right] \{\tilde{\delta}_y\}, \quad \{a_{12}\} = \{\delta_z\} \left[\frac{EF}{L^3} XY - \frac{12EJ}{L^5} XY \right] \{\tilde{\delta}_y\}$$

$$\{a_{22}\} = \{\delta_y\} \left[\frac{EF}{L^3} Y^2 + \frac{12EJ}{L^5} X^2 \right] \{\tilde{\delta}_y\}, \quad \{a_{13}\} = \{\delta_z\} \left[-\frac{6EJ}{L^3} Y \right] \{\tilde{\mu}_z\}$$

$$\{a_{23}\} = \{\delta_y\} \left[\frac{6EJ}{L^3} X \right] \{\tilde{\mu}_z\}, \quad \{a_{33}\} = \{\mu_z\} \left[\frac{3EJ}{L} \right] \{\tilde{\mu}_z\} + \{\delta_z\} \left[\frac{EJ}{L} \right] \{\tilde{\delta}_z\}$$

$$\{a_{21}\} = \{\tilde{a}_{12}\}, \{a_{31}\} = \{\tilde{a}_{13}\}, \{a_{32}\} = \{\tilde{a}_{33}\}$$

上式の $[\delta_x], [\delta_y], [\delta_z], [\mu_z]$ 等は、桁の場合に表われる行列 $[\delta]$ とよく似た形の行列であり、これらには含まれた真中の行列は、骨組構造物の各部材に關係する量を対角線上に並べた対角行列である。くわしい事は先に発表した著者の論文を参照されたい。

5. 元数の多い行列の取扱い

以上述べた各節特に2節で述べた式では、非常に大きな行列を取扱わなければならない。この場合問題となる事は、計算時間が長くなる事と計算精度が悪くなる事である。

まず計算時間の問題であるが、行列算を電気計算機の内部記憶装置だけで処理しようとする、少なくとも2〜3ヶの行列をstoreしなければならない。200×200の如く大型の行列2〜3ヶを全部storeする事の出来る内部記憶装置を持った電子計算機をさがす事は困難である。そこでどうしても外部記憶装置(例えば磁気テープ)にたよらなければならなくなる。所が外部記憶装置は、その操作が機械的であるため、これを利用した計算は、計算速度が非常に悪くなる。速度を少しでも早める方法として、行列を数ヶのブロックに分割し、2〜3ヶの磁気テープに記憶させ、必要の都度内部記憶装置にうつす様にする事が考えられる。この場合小行列に分割する方法に、図4に示す二つの方法が考えられる。図中(1)の方法について検討済みなので、現在(2)の方法についてその得失を検討中である。

A_{11}	A_{12}	A_{13}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{31}	A_{32}	A_{33}

(1)

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6

(2)

次に計算精度について述べる。行列は元数が多くなると、その逆行列を求める場合に、計算精度が非常に悪くなると云われている。これは大きな数から大きな数を引く演算が表われるためである。しかしこの様な事が起るのは、特に都合の悪い行列の場合の事であって、構造力学で取扱い様な対角線にそった元素が大きき、それからなれるにしたがって元素が小さくなる行列では、その精度の落ち方は、数学的に考えられる最大の誤差よりかなり少ないものと思われる。実際に計算した事がないので、これ以上の事はいえませんが、近くこの検算をしたいと思っている。

若し精度のおち方が期待するものより大きくなる場合は、大きな数から大きな数を引く従来の計算法からはなれ、例えば Monte Carlo 法を採用すれば、この問題は解決されるであろう。

6. あとがき

以上要するに行列を利用して吊橋の計算をさせようとする、形式の変化には順応性があるが、長大橋の場合計算がおそくなるきらいがある。現在計算速度を早める方法について検討しているが成案を得次プログラム化を進めるつもりでいる。

本文を完成するためには、非線形となる方程式 2-3、2-4 をどの様に取扱うかについてふれなければならないが、紙数の関係で割愛する。

参 考 文 献

- 1) 大地“行列による骨組構造物の解法”土木学会論文集 87号(S.37. 11)
- 2) 大地“構造計算への行列の利用”第9回橋梁・構造工学研究発表会(S.37. 10)
- 3) 倉西“行列による吊橋の解析”土木学会論文集 81号(S.37. 5)
- 4) E. Egerváry “Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung” TABSE XVII (1956)