

長径間吊橋の衝撃について

平 井 敦*
伊 藤 学*

1. まえがき

吊橋は他の種類の橋梁形式にくらべて比較的剛性が低く活荷重による変形が大きい上に、その振動性状も特異な問題を有している。これらが従来吊橋が鉄道橋としての安全性に疑問がもたれ、本格的に実現化されるに至らなかった大きな原因と考えられる。しかしながら支間が数百米を超えるような長大径間橋梁としては、構造上並びに経済上の見地から吊橋が最も適していることも既に広く認められている事実である。上述の鉄道橋としての吊橋の実用性に関しては筆者等が日本国有鉄道より委託を受けて研究を進めているが、本論文はこれに関連して活荷重が吊橋上を走行する場合の動的効果(衝撃)について検討したものである。

鉄道橋の活荷重強度は道路橋のそれに比して大であるが、その衝撃はまた遙かに大きい。橋梁上を走行する機関車および列車の橋梁に及ぼす動的効果としては次のものが考えられる。

- 1) 平滑走行荷重による動的効果
- 2) 車輪の過平衡重錘または偏心等による錐打作用
- 3) 車両のバネ作用
- 4) 軌条継目、不整による衝撃
- 5) 車両の横揺れ、蛇行
- 6) 車両進入時の振動

現行の橋梁設計示方書は道路橋も含めて支間150m以下のものに適用されており、またこのていどの支間の橋梁については衝撃に関する理論的並びに実験的な研究がかなり行われているが、長大支間橋梁とくに吊橋については設計に用いる衝撃係数もあらためて検討する必要がある。

記 号 (図-1参照)

- l, l_1 : 吊橋主経間、側経間の支間
 f, f_1 : 吊橋主経間、側経間のケーブル垂距
 H_w : 死荷重によるケーブル張力の水平成分(両側)
 $E I$: 補剛トラスの曲げ剛性(両側)
 $E_c A_0$: ケーブルの断面剛性(両側)

* 東京大学工学部土木工学教室

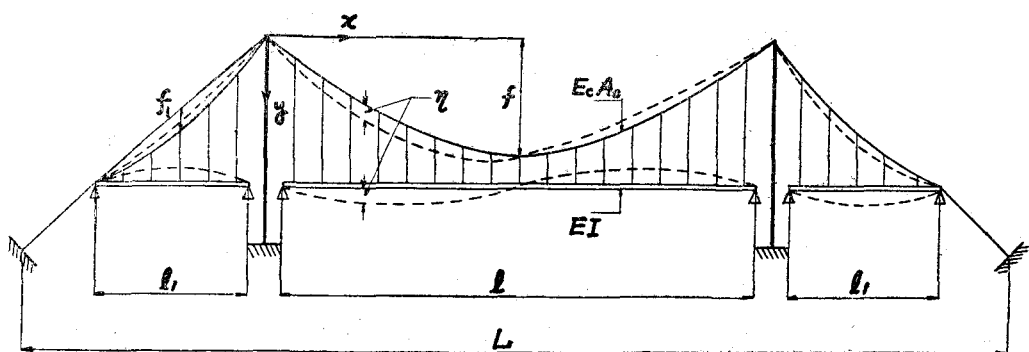


図-1 吊橋一般図

- m : 単位長さ当りの吊橋の質量 ($= w/g$)
 $L_E = \int_L \sec^3 \varphi \, dx$ (φ はケーブル傾斜角)
 P, p : 活荷重
 ω_r, N_r : 吊橋の r 次の撓み固有円振動数、固有振動数
 T_r : ω_r に対応する振動周期
 $\Phi(x)$: ω_r に対応する振動形
 $\eta(x, t)$: 吊橋の鉛直撓み
 $q_r(t)$: 時間の関数である一般座標
 $Q_r(t)$: 一般力 (外力)
 v : 荷重走行速度
 β, δ : 減衰常数、対数減衰率
 $\alpha, \sigma, \nu, \lambda$: 文中に定義せる無次元パラメータまたは係数

2. 吊橋の固有撓み振動

橋上を移動する各種外力による動的効果を検討する前に、まず解析の基礎となる吊橋の鉛直撓み振動の固有振動数並びにこれに対応する振動形について考察する。各種斜張索などを有する場合はまた事情が異なるが、ここでは標準的な吊橋構造を対象とする。

線形化された撓度理論のもとで吊橋の撓み変形に特有な二つの無次元パラメータ

$$\nu = \ell \sqrt{\frac{H_w}{EI}}, \quad \lambda = \frac{f^2}{H_w \ell} \frac{Ec Ac}{L_E} \dots\dots\dots (1)$$

を用いれば単経間吊橋の固有円振動数は次のような形に表わされる。

すなわち対称型振動形 ($n = \text{奇数}$) は逆対称型 ($n = \text{偶数}$) と異なりケーブルの伸びの影響を考慮しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= F_1(\nu) / \sqrt{f}; (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \omega_n &= F_2(\nu, \lambda) / \sqrt{f}; (n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

またこれらに対応する振動形は実用上次の表現を用いてさしつかえない(図-3 a 参照)。

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \sin \frac{\pi x}{\ell} - C \sin \frac{3\pi x}{\ell} \\ \Phi_3(x) &= \sin \frac{3\pi x}{\ell} + C \sin \frac{\pi x}{\ell} \dots\dots\dots (3) \\ \Phi_r(x) &= \sin \frac{r\pi x}{\ell}; (r \neq 1, 3) \end{aligned}$$

一般的傾向として ν および λ の値が大きいと $C (> 0)$ の値も大きくなる。また λ はほとんど

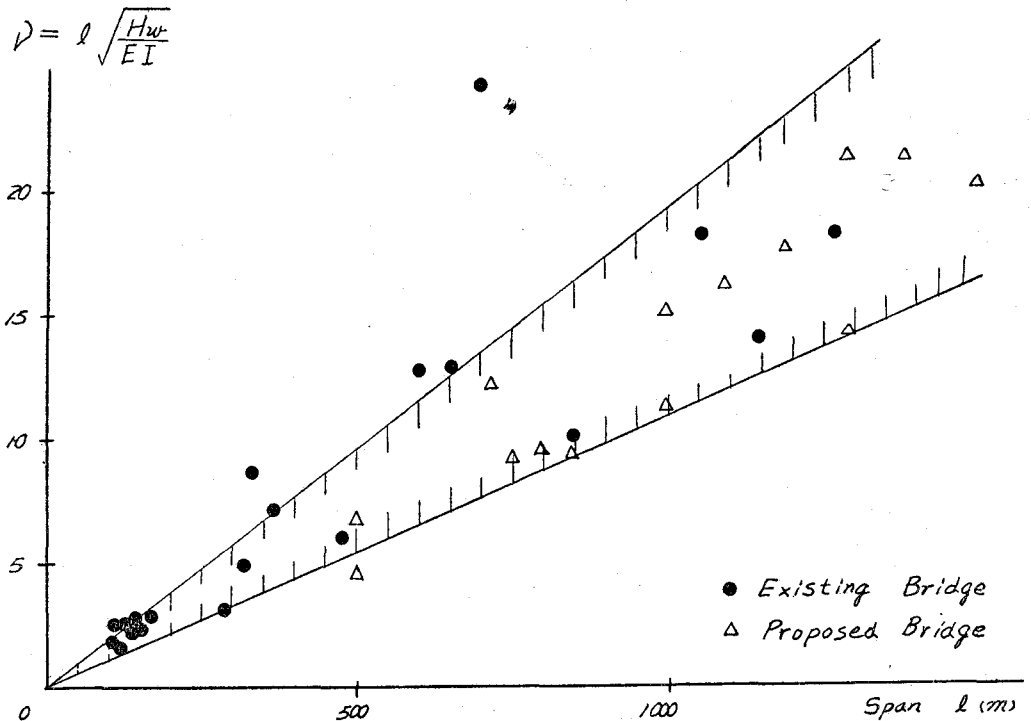
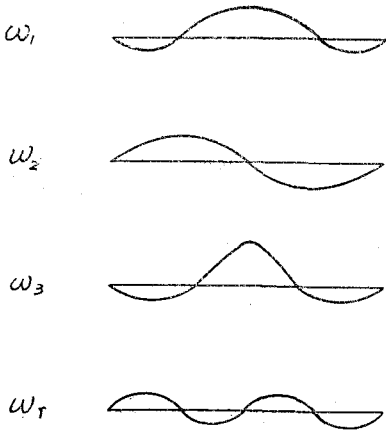


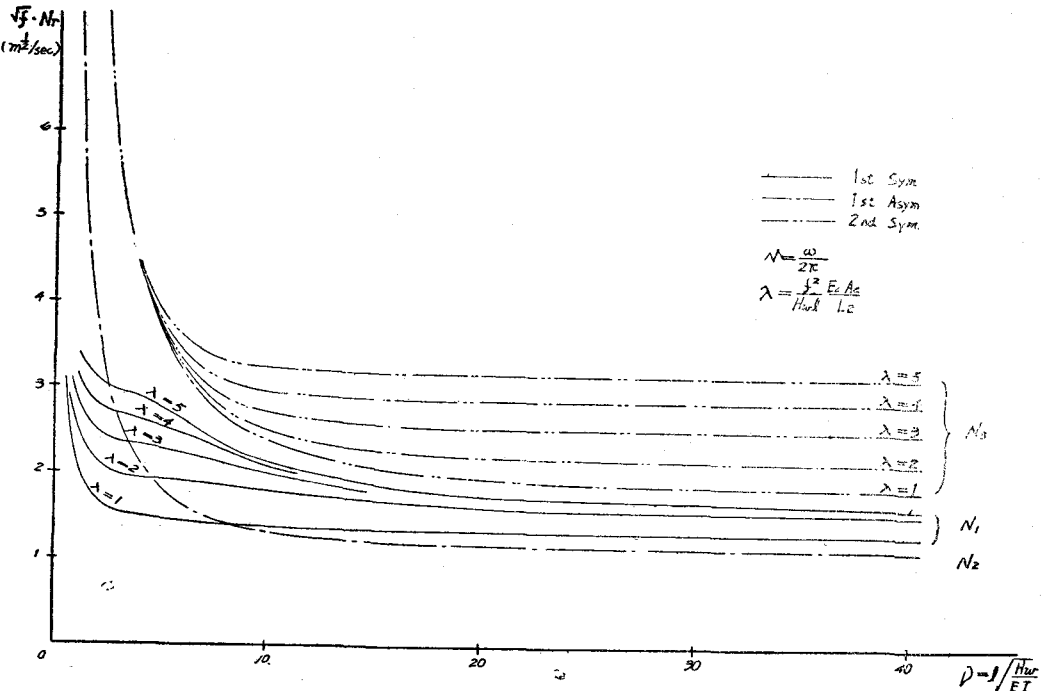
図-2 ℓ と ν の関係 (主径間)

の吊橋においてあまり差異はなく 1.5 ～ 3.5 の範囲にあるが、 ν の値は既存あるいは計画中の実例について図-2 に示すごとく、特殊な重橋床式吊橋を除いて支間にほぼ比例して増大することが経験的に知られる。

以上の考察にもとづき吊橋の固有振動数をまとめれば図-3 b のようになる。単純支持された側経間を有する場合、対称型振動形に限り支間の比、死荷重の比などが影響し、また連続補剛けたを用いた場合は、その固有振動数は一般に対称型振動形については単経間吊橋における値と三経間単純支持の場合の値との中間に、一方逆対称型振動形については単純支持の場合よりやや高くなるが、紙面の都合で図-3 c に単純支持した場合の結果を示すにとどめる。

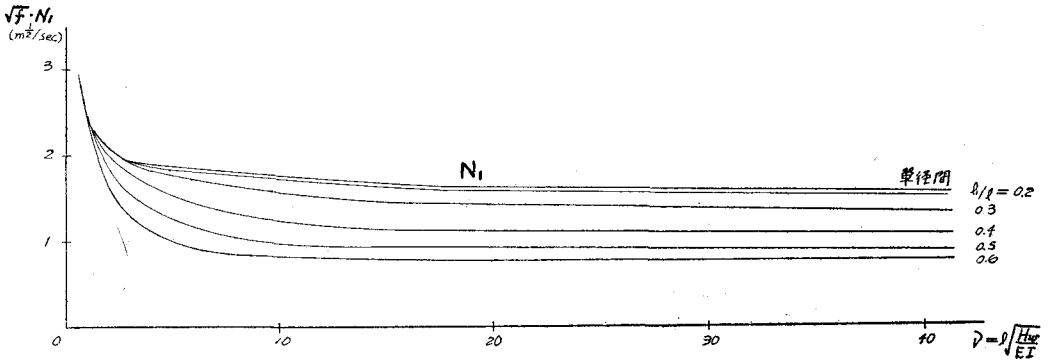


(a) 振動形



(b) 単経間吊橋の固有振動数

$$\lambda = \frac{1}{H \omega} \frac{E A_c}{L E} = 2.00$$



(c) 単純支持側径間を有する場合

図-3 吊橋の固有振動数

3. 解析の一般的方法

けたの撓みを

$$\eta(x, t) = \sum_r q_r(t) \cdot \Phi_r(x) \quad \dots\dots\dots (4)$$

とおけば、Lagrange の方程式から振動減衰を無視した場合次の運動方程式が導かれる ($r = 1, 2, 3, \dots$)。

$$(\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r) \int_L \Phi_r^2(x) dx = Q_r(t)/m \quad \dots\dots\dots (5)$$

これは構造物の Modal Analysis における一般式であり、 $Q_r(t)$ はたとえば集中荷重 P が一定速度 v で走行するときには

$$Q_r(t) = P \cdot \Phi_r(vt) \quad \dots\dots\dots (6)$$

で表わされる。構造減衰を考慮に入れるときは複素表示 $\bar{q}_r$, $\bar{Q}_r$ を用いて上の基本式は

$$\{ \bar{q}_r^2 + \omega_r^2 (1 + 2i\beta) \bar{q}_r \} \int_L \Phi_r^2(x) dx = \bar{Q}_r/m \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。減衰常数 β と対数減衰率 δ との間には $\delta = 2\pi\beta$ の関係があるが、通常長経間吊橋の低次振動において減衰の影響はきわめて小さいと考えられる。

上記の関係は構造物一般に共通な式であるが、吊橋においては固有振動性状に関連する諸数値が前節にのべたように特異であることに注目しなければならない。

4. 平滑走行荷重による動的作用

4.1 集中荷重走行の場合

式(4)、(5)、(6)より、この場合の吊橋の振動減衰性と走行荷重の質量の影響を無視したときの動的応答の解が得られる。計算の結果では撓みに関する限り項数は $r = 4$ くらいまでとれば実用上十分である。いわゆる衝撃係数に対応する動的増巾率は、動的最大値と静的最大値との差を後者で除した値として定義するが、この際点 ξ における集中荷重 P による点 x の静的撓みは次式で表わすことにする(撓みの影響線式と同等)。

$$\eta_s(x) = \frac{P}{m} \sum_r \frac{\phi_r(\xi) \cdot \phi_r(x)}{\omega_r^2 \int_L \phi_r^2(x) dx} \quad \dots\dots\dots (8)$$

基本的な問題として、まず支間の大きな単経間吊橋のスパン $1/4$ 点並びに $1/2$ 点(中央)における撓みの動的増巾率について検討する。図-4には一つの例について、一定速度で集中荷重が走行する場合の理論計算結果を示す。

スパン $1/4$ 点の撓み $\eta(\ell/4)$ については $r = 2$ の項が支配的と考えてよいので近似的にこの1項だけを取り上げる。図-2、3より $\nu > 10$ であるような長経間吊橋では一般に

$$\sqrt{f} \cdot N_r = \sqrt{f/T_r} \doteq \text{const.} \quad \dots\dots\dots (9)$$

とみなすことができる。以上の近似から $\eta(\ell/4)$ に関する動的増巾率 $i(\ell/4)$ はこの場合の速度パラメータ

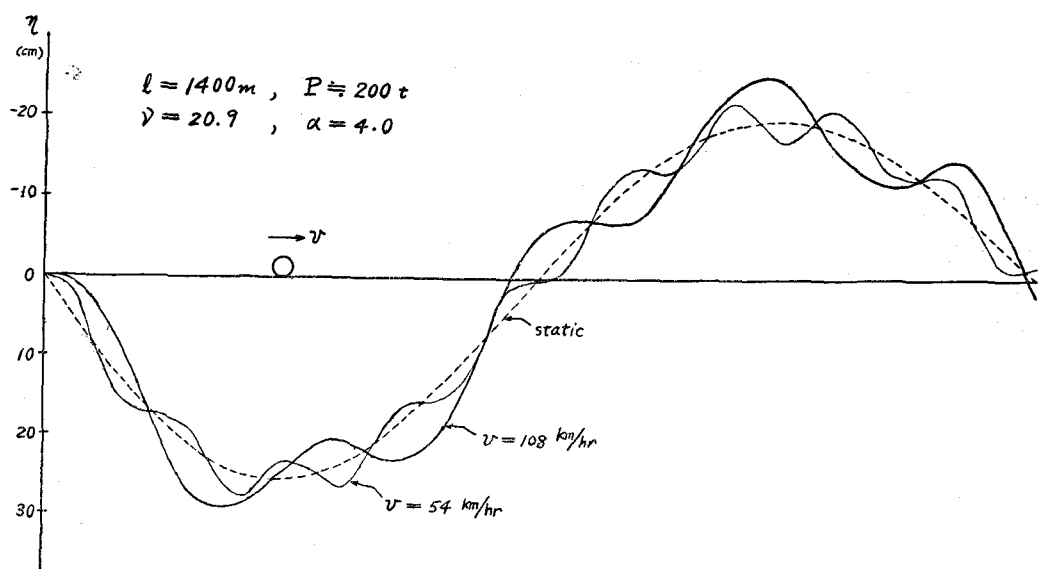
$$\alpha = \nu T_2/\ell \quad \dots\dots\dots (10)$$

を用いて、

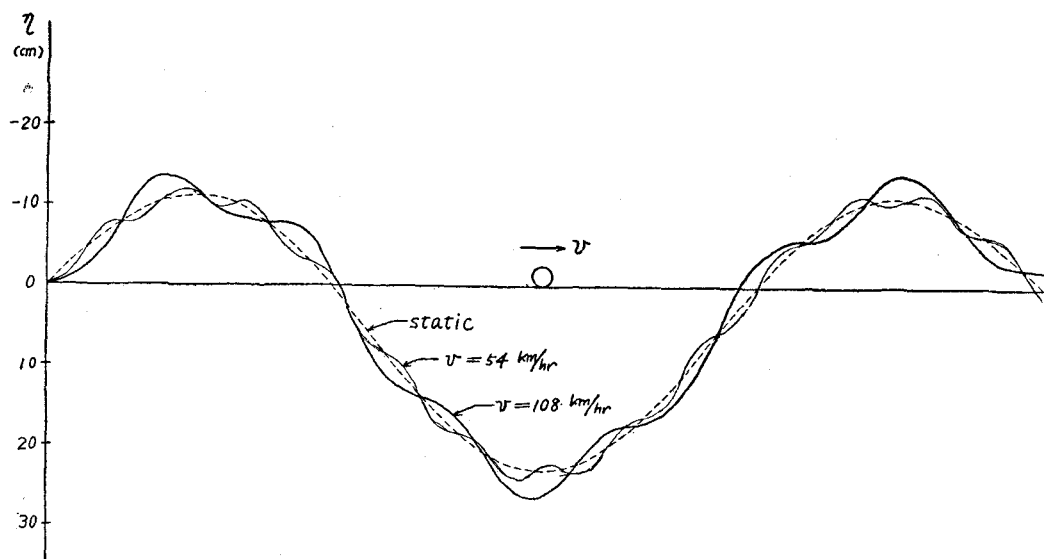
$$i(\ell/4) \doteq \frac{\alpha}{1-\alpha} \doteq \frac{1}{K(\sqrt{\ell/\nu})-1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

の形で表わされる。ここに K は式(9)の右辺の定数とケーブル衰距比 f/ℓ に関係する数であり、垂距比も吊橋においてはほとんど差異のないことを考えれば、 $i(\ell/4)$ はスパンと荷重速度が与えられればほぼ一定の値をもつことになる。たとえば $\ell = 1,200\text{ m}$ ていどの吊橋で荷重速度 $\nu = 110\text{ km/hr}$ 前後では $i(\ell/4)$ はおよそ0.3となる。この動的増巾率はスパンが小さくなるにつれて増大するが、 ν が小さく図-3の振動数曲線が急傾斜の所にかかるときは事情はまた異なる。要約すればスパンの割りに ν が大きいような吊橋は高速走行荷重による動的効果が大きいといえよう。

スパン中央($\ell/2$ 点)における動的撓みについても同様の解析ができるが、この場合は少くとも $r = 1, 3$ の2項をとらねばならない。しかし計算の結果ではこの点における動的増巾率



(a) Deflection at $l/4$



(b) Deflection at $l/2$

図-4 集中荷重走行時の吊橋の撓み (例)

$i(l/2)$ は一般に先の $i(l/4)$ の値より大きくなることはなく、また振動減衰の影響もより著るしい。ただし比較的大きい側経間を有する場合には $i(l/2)$ は多少大きくなると考えられ

る。

以上のべた速度パラメータと撓みの動的増巾率の関係について、計算結果の一例を図-5に示す。同図の点が単調な曲線上にのらないのは図-4から察しられるように動的撓みの最大値を生

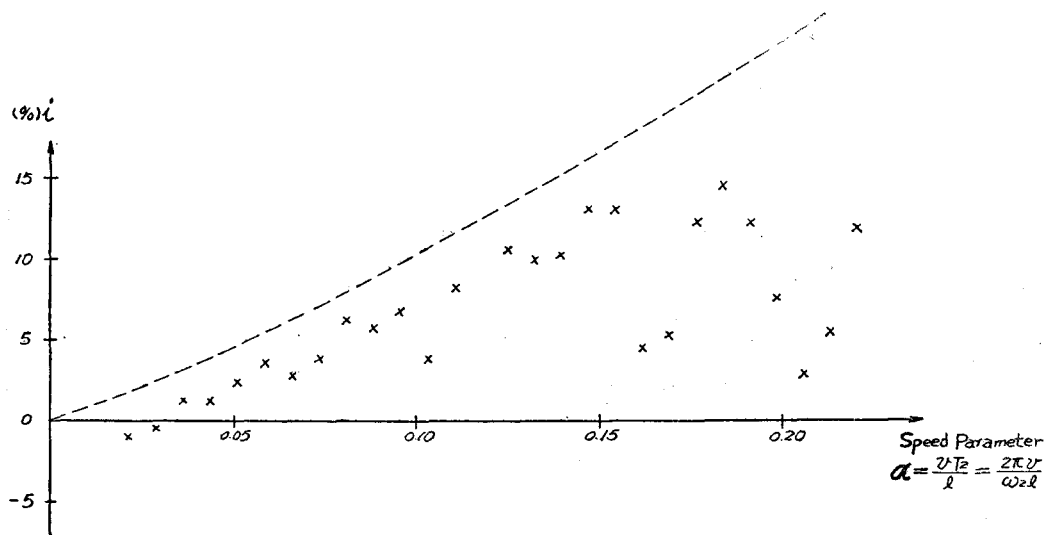


図-5 走行集中荷重による $l/4$ 点の撓量

じる点が必ずしも着目点と一致しないからである。また図-5に点線で示したのは式(11)の曲線であつて、これは実際は前記の計算値を連ねたものの包絡線としての性格をもっている。式(11)の曲線が大きめの値を示すのは、これが $r=2$ 以外の項を無視していることなどによる。

4.2 等分布荷重走行の場合

線形理論のもとで荷重長の制限を考えない場合、等分布活荷重 p が一定速度 v で進入する状態にあるときの動的撓みは、先の集中荷重に対して求めた結果を積分して得られる。この際 $\xi=0$ から $\xi=l$ まで等分布活荷重が載荷されたときの静的撓みは

$$\eta_s(x) = \frac{p}{m} \sum_r \frac{\int_0^l \phi_r(\xi) d\xi}{\omega_r^2 \int_L \phi_r^2(x) dx} \cdot \phi_r(x) \quad \dots\dots\dots (12)$$

前項と同じような考えのもとに、先の $i(l/4)$ は等分布活荷重に対しては減衰を無視した場合近似的に

$$i(l/4) \doteq \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられることになり、われわれの対象とする速度パラメータの範囲ではその値は集中荷重の場合の半分ていどに小さくなると考えてよからう。また減衰性を考慮することによる動的増巾率

の減少も集中荷重の場合よりは著しい。

4.3 荷重の慣性の影響

走行荷重の質量の影響（いわゆるZimmermanまたはStokes効果）は一般に長大支間になれば無視できるとされているが、構造物の剛性が低い場合には一応検討の必要があろう。この厳密な解析は複雑になるのでここでは省略して、撓み剛性 EJ なる単純支持桁上を集中荷重 P が速度 v で走行する場合のこの効果の近似式として次の結果を準用してみる。

$$i \doteq \frac{1}{\alpha_0 - 3} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし $\alpha_0 = \frac{3 EJ}{2 P \ell} \frac{g}{v^2}$

吊橋の一節点二波形撓み形に対応する換算撓み剛性

$$EJ = EI \left(1 + \frac{v^2}{4 \pi^2} \right) \quad \dots\dots\dots (15)$$

を式(15)における EJ とおけば、 $\ell > 500 \text{ m}$ の場合 i の値は 2% を超えないほどのものである。

5. 荷重の平滑走行以外の原因による動的効果

5.1 走行週期力

短中支間の鉄道橋において最も影響の大きいものとされていた蒸気機関車動輪の不均衡重錘による錘打力効果を取り上げる。

支間 ℓ がきわめて大きいとき橋梁の固有振動と錘打力が共振する条件は、動輪の半径を R として

$$\omega \doteq v/R \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。長経間吊橋において 5 次でいどまでの低次振動でこの条件が充されるのは時速 10 軒以下のきわめて遅い走行速度においてであり、錘打力自体は非常に小さい。ふつうの走行速度における支間 $1/4$ 点の撓みについて最も不利な条件の下におけるこの場合の動的撓み加算分は、機関車重量を P とし錘打力最大値はその 15% であることを考えれば近似的に

$$\triangle \eta_{\max} \doteq 0.6 (R/v_{\max})^2 \frac{P}{m \ell} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられるが、この値は実際には静的撓みに比して無視しうるほど小さい。

橋の高次固有振動との共振は考え得ることであるが、振動形を単純な正弦波形と仮定し式(16)の条件を考慮すれば、 ℓ が大なる場合

$$\Delta \eta_{\max} = \frac{0.3}{\beta} \left(\frac{R}{v_{\max}} \right)^2 \frac{P}{m\ell} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。吊橋の減衰常数は小さいとしても、たとえば $\beta = 0.008$ としてこれを計算してみると $\Delta \eta_{\max}$ はやはり静的最大撓みの 2% を超えることはないと考えられる。

5.2 車両のバネ作用

各種車両の上下振動周期は一般に 1 秒以下で長経間吊橋の基本固有振動周期に比してはるかに小さいので、車体のバネ作用が吊橋全体に及ぼす動的効果はほとんどないものと考えてよい。また車両バネにはある程度の摩擦力が存在し、これにうちかってバネ作用が発現するには車体に所要の上下加速度が与えられることを要する。しかし吊橋補剛桁全体としての荷重走行時における上下運動の加速度はかなり小であり、局部的または偶発的な原因、あるいは橋梁進入時の衝撃によってのみこれが生ずるものと考えられるが、これらは吊橋においてとくに問題とはならない。

5.3 軌条継目の衝撃、蛇行の影響等

軌条継目の衝撃および蛇行は共に長さの週期 20 ～ 30 m でいどであり、鉄道車両の高速走行時にはやはり長経間吊橋の基本固有週期に比してきわめて短い周期の外力となるので、短中支間の橋梁におけるより動的効果は小さいものと思われるが、これらについては今後更に研究の必要があろう。

道路橋においてはその他路面の不整等が衝撃の要因となるが、長経間の橋ではその影響は無視できよう。

6. む す び

設計に用いる衝撃係数の評価はあくまで設計活荷重のとり方とのかねあいの下に考慮されねばならない。長経間橋梁の場合には道路橋活荷重は常時存在する荷重状態とはやや異なる理想化された形のものであり、外国でも長大支間の道路橋には衝撃は考慮していないようである。一方鉄道橋においては設計活荷重はほとんど実際の荷重状態に近いものであり、しかもいかなる支間、形式についても衝撃は道路橋におけるより大きい。

本論文では一応各種の外力について長経間吊橋におよぼす動的効果を検討した概略の結果をのべたが、最も大きな要因は速度効果によるものと考えられる。設計に用いる衝撃係数としては、鉄道橋の場合たとえば集中荷重と分布荷重との中間の値をとり、これに他の要因による若干の余

裕を見込んで、1,000 mでいどの支間で0.25、1,500 mでいどで0.20という値も考えられるが、道路と併用橋の場合にはもう少し低目とすることも可能であろう。またこれらは撓みに関する結果であるが、曲げモーメントなどについても検討している。単純支持桁の場合のように簡単な比例関係はいえないとしても、上述の値はすべての量に対して共通の目安にしてよいと思われる。

鉄道橋としての吊橋の実用性については他に幾つかの問題点があるが別の機会に発表する予定である。本研究のうち理論的検討の部分は伊藤が主として担当したもので実験的研究の結果はここでは省いたが、本研究を通じて非常な尽力をされた工学修士 故松原駿士君の靈にこの小文を捧げるとともに、計算等に協力を得た東大大学院学生 片山恒雄君に厚く感謝する次第である。