補剛トラスアーチ橋について

平井　敦*
西脇威夫**

1. まえがき

長大スパン橋梁として従来から考えられている型式には、(a)吊橋、(b)キャンチレバートランス橋(c)アーチ橋、の三種類がある。長大スパンという語で定義されているスパン長がどの程度のものであるかはっきりしないが、* ここでは、鋼道路橋設計示方書の適用範囲より大きいものを長大スパン橋梁と考えることにする。

古くからアーチ橋は長大スパン橋梁として用いられて来た。而しアーチを補剛することは、アーチの歴史が古いのにもかかわらず、割合採上げられていないように思われる。アーチで補剛しても結果的にみれば同一であって、筆者たちがここに述べる構造物も、ある場合にはアーチで連続トラスを補剛したものであり、ある場合にはその逆になっているとも考えられる。ここで補剛するとかされるとか言うのは、どちらの構造部分がより多くの荷重を負担しているかというような観点から定性的に判断しているのである。

ベイヨン橋あるいはシドニー・ハーバー橋にしても、５００ *m* をこえるスパン長を持つアーチ橋も単一スパンから成立っている。筆者らの試算によると単一スパンのアーチ橋は、スプリンギング附近の部材の応力が比較的大となって、そのためにおのずから、部材断面の大きさから極限となるスパン長が定まっているように思われる。この附近の部材の負担する応力を減少せしめれば更に長大化をはかることが出来よう。スプリンギング附近の部材応力の減少を、単一スパンの、アーチ橋とせず、図－１のように、補剛トラスを側径間部に延すことによって解決することが出来る。この観点からも筆者らは、アーチを単一スパンで用いることなく、側径間をアーチスパンと連続にすることを提案する。

そのような点に立脚して図－１に示すような補剛アーチ橋について述べようと思う。

2. 補剛トラスアーチ橋の応力及びタワミ

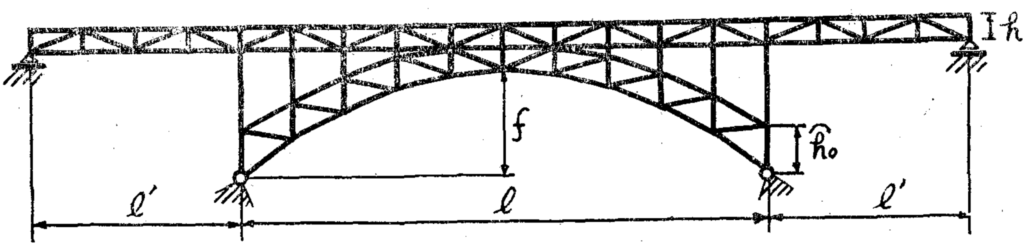
２－１　基本系の弾性方程式

図－１に示す補剛トラスアーチ橋の応力を求めるに当って、先づアーチ径間のみの構造物の応力

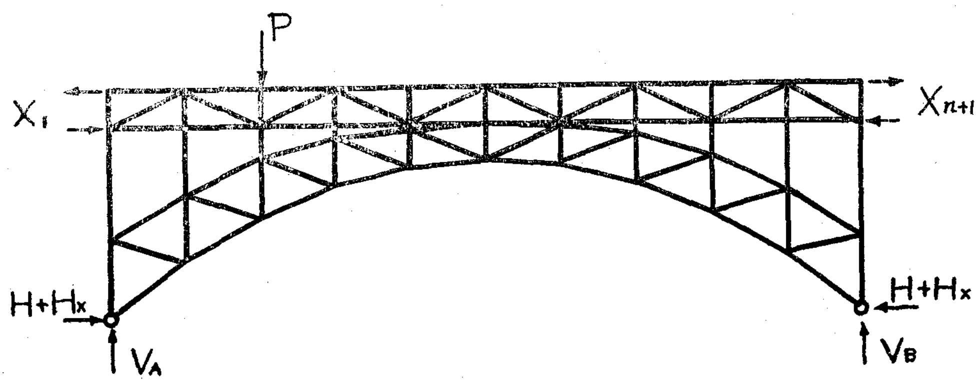
---

*数年前の英国の Maitland Lecture では、スパン長が５００ *m* 以上を、長大スパンと言っている。

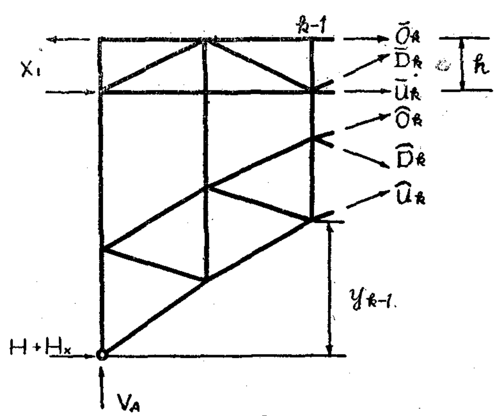
＊東京大学教授　　＊＊武蔵工業大学助教授



図－1　補剛トラスアーチ橋



図－2　基本系



図－3

を求める。この場合荷重は、構造物の面内のみであると考え、外力は図－２のようなものを対象とする。

図－２の基本系を図－３のように任意の格点の直ぐ右側で切断して、外力の釣合を考えると次式が成立つ。

$$\mathfrak{M} = \mathbb{M}^o + \mathbb{M}^u$$
$$= \mathcal{M} - (\mathbb{Y})\mathbb{H} + h(\mathbb{N})\mathbb{X} - (\mathbb{Y})\mathbb{H}_x \quad (1.1)$$

上式及び本文中に使用する、マトリックスは次のような意味又は構成を持つものである。

$\mathbb{M}^o$: 補剛トラス各格点の周りのモーメントを要素とする一列のマトリックス。

$\mathbb{M}^u$: アーチ下弦各格点の周りのモーメントを要素とする一列のマトリックス。

$\mathcal{M}$: 基本系と同じスパン長の単純梁が基本系と同じ鉛直荷重と受けた場合の各点のモーメントを要素とする一列のマトリックス

$[\mathbb{Y}]$：アーチの下弦格点の高さを対角要素とする正方マトリックス。

$\mathbb{X}$：補剛トラスの両端に図－２のように作用する水平力を要素とする一列のマトリックス。

$\mathbb{H}$：鉛直荷重によって生ずる水平反力を要素とする一列のマトリックス

$\mathcal{h}(\mathbb{N})$：$\mathbb{X}$を補剛トラスの各格点周りのモーメントに変換するマトリックス

$\bar{\mathbb{S}}^A$：図－２に示す基本系の補剛トラス部の部材応力を要素とする一列のマトリックス

$\hat{\mathbb{S}}^A$：図－２に示す基本系のアーチ部の部材応力を要素とする一列のマトリックス

$[\bar{\mathbb{C}}^A]$：$\mathbb{M}^o$を $\bar{\mathbb{S}}^A_o$ に変換するマトリックスで、トラスの形状組方によって定まる。

$[\hat{\mathbb{C}}^A]$：$[\hat{\mathbb{C}}^{A'}]$ ：$\mathbb{M}^u, \mathbb{H}+\mathbb{H}_x$ を $\hat{\mathbb{S}}^A$ に変換するマトリックスで、アーチの形及び組方によって定まる。

$[\mathcal{R}^A]$：部材の弾性的性質を示す対角マトリックス

$\mathbb{P}$：鉛直荷重による一列のマトリックス

（1.1）式の $\mathbb{M}^3, \mathbb{M}^u, \mathbb{H}$ 及び $\mathbb{H}_x$を用いると、図－２に示される構造物の部材応力は、(1.2)式で求められる。

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbb{S}}^A &= [\bar{\mathbb{C}}^A]\mathbb{M}^o \\ \hat{\mathbb{S}}^A &= [\hat{\mathbb{C}}^A]\mathbb{M}^u + [\hat{\mathbb{C}}^{A'}](\mathbb{H}+\mathbb{H}_x) \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

（1.2）式で定義されるマトリックスを、表現の簡素化のために

$$\mathbb{S}^A = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{S}}^A \\ \hat{\mathbb{S}}^A \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

と表わし、右肩に※印をつけて、転置することを表わすと、図－２の構造物の中に蓄えられる弾性変形のエネルギーは、

$$W = \frac{1}{2}\mathbb{S}^{A*}[\mathcal{R}^A]\mathbb{S}^A \qquad (1.4)$$

一応不静定量をアーチの下弦格点周りのモーメントに選び、それを $\mathbb{M}^u_x$ で表わせば、弾性方程式は、

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbb{M}^u_x} = 0 \qquad (1.5)$$

より求めることが出来る。（1.5）式を計算すると、

$$[\mathcal{L}]''\mathbb{M}^u_x = [\mathbb{D}]'\mathcal{M} - [\mathbb{U}']'(\mathbb{H}+\mathbb{H}_x) \qquad (1.6)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} [\mathcal{L}]'' &= [\mathbb{K}]^*\Big([\bar{\mathbb{C}}^A]^*[\bar{\mathcal{R}}^A][\bar{\mathbb{C}}^A] + [\hat{\mathbb{C}}^A]^*[\hat{\mathcal{R}}^A][\hat{\mathbb{C}}^A]\Big)[\mathbb{K}] \\ [\mathbb{D}]' &= [\mathbb{K}]^*[\bar{\mathbb{C}}^A][\bar{\mathcal{R}}^A][\bar{\mathbb{C}}^A] \\ [\mathbb{U}']' &= [\mathbb{K}]^*[\hat{\mathbb{C}}^A][\hat{\mathcal{R}}^A][\hat{\mathbb{C}}^A] \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

$$[\mathbb{K}] = \begin{bmatrix} 0 \cdots\cdots 0 \\ [\ \mathbb{E}\ ] \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

アーチ径間を（ｎ＋１）格間であるとすると、$[\mathcal{L}]'$はｎ×ｎの正方マトリックスであって、その逆マトリックスを求めることが出来る。$[\mathcal{L}]''^{-1}$を（１.６）式の各項の左からかけると不静定量 $\mathbb{M}_x^u$を求めることが次式により出来る。即ち

$$\mathbb{M}_x^u=[\mathcal{L}]''^{-1}[\mathbb{O}]'\mathfrak{M}-[\mathcal{L}]''^{-1}[\mathbb{U}']'(\mathbb{H}+\mathbb{H}_x) \tag{1.9}$$

（１.９）式の右辺の係数のマトリックスを使って、$[\mathbb{t}]$,$[\mathbb{t}_H]$ を（１.１０）式で定義すると、$\mathbb{M}^o$, $\mathbb{M}^u$は（１.１１）式で求まる。

$$\left.\begin{aligned}
[\mathbb{t}]&=[\mathbb{E}]-\begin{bmatrix}0\cdots\cdots 0\\ [\mathcal{L}]''^{-1}[\mathbb{O}]'\\ 0\cdots\cdots 0\end{bmatrix}\\
[\mathbb{t}_H]&=\begin{bmatrix}0\cdots\cdots 0\\ [\mathcal{L}]''^{-1}[\mathbb{U}']'\\ 0\cdots\cdots 0\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{M}^o&=[\mathbb{t}]\mathfrak{M}+[\mathbb{t}_H](\mathbb{H}+\mathbb{H}_x)\\
\mathbb{M}^u&=[1-\mathbb{t}]\mathfrak{M}-[\mathbb{t}_H](\mathbb{H}+\mathbb{H}_x)\\
[1-\mathbb{t}]&=[\mathbb{E}]-[\mathbb{t}]
\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

２－２　部材応力

水平反力のマトリックスは未知であるが、一応それを既知と仮定すると、部材応力は、（1.11）式を（１.２）式に代入すればよい。表現を簡単にするために次式を定義する。

$$[\mathbb{S}_A^A]=\begin{bmatrix}[\mathfrak{M}]\\ [\mathbb{H}]\end{bmatrix} \qquad [\mathbb{S}_A^x]=\begin{bmatrix}h[\mathbb{N}]\mathbb{X}\\ [\mathbb{H}_x]\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
[\mathbb{T}]&=\left[[\mathbb{T}^A],\ [\mathbb{T}_H^A]\right]\\
[\mathbb{T}^A]&=\begin{bmatrix}[\bar{\mathbb{C}}^A][\mathbb{t}]\\ [\hat{\mathbb{C}}^A][1-\mathbb{t}]\end{bmatrix}\\
[\mathbb{T}_H^A]&=\begin{bmatrix}[\bar{\mathbb{C}}^A]\left(-[\mathbb{t}][\mathbb{U}]+[\mathbb{t}_H]\right)\\ [\hat{\mathbb{C}}^A]\left(-[1-\mathbb{t}][\mathbb{U}]-[\mathbb{t}_H]\right)+[\hat{\mathbb{C}}^{A'}]\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

（２.１）式、（２.２）式を使うと部材応力（１.２）式は（１.３）式によって、

$$\mathbb{S}^A=(\mathbb{T})\mathbb{S}_A^A+(\mathbb{T})\mathbb{S}_A^X=\mathbb{S}_o^A+\mathbb{S}_X^A \tag{2.3}$$

2－3　水平反力

a)　鉛直荷重のみの場合．$\mathbb{H}$.

任意の載荷状態の水平反力をＨとすると

$$\mathbb{H}=H\cdot\mathbb{E} \tag{3.1}$$

但し　$\mathbb{E}=\begin{pmatrix}1,\\1,\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$

であるから、弾性変形のエネルギーＷをＨで微分すればＨを求めることが出来る。即ち

$$\frac{\partial W}{\partial H}=\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)\mathbb{S}^A=0 \tag{3.2}$$

$$D=\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)(\mathbb{T}_H^A)\mathbb{E} \tag{3.3}$$

を定義すると

$$H=-\frac{1}{D}\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)(\mathbb{T}^A)\mathfrak{m} \tag{3.4}$$

$$\mathfrak{m}=(\mathfrak{M})\mathbb{P} \tag{3.5}$$

であることを考え合わせれば、水平反力の影響線を $\mathbb{H}^{*}$で表わすと、

$$\mathbb{H}^{*}=-\frac{1}{D}\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)(\mathbb{T}^A)(\mathfrak{M}) \tag{3.6}$$

b)　$\mathbb{X}$ による水平反力 $\mathbb{H}_x$

a)の場合と全く同様にして求めることが出来る。即ち

$$H_x=-\frac{h}{D}\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)(\mathbb{T}^A)(\mathbb{N})\mathbb{X} \tag{3.7}$$

$\mathbb{X}$の要素は X_1 及び X_{n+1} であるので、ΔH_1、ΔH_2 を次のように定義する。

$$\left.\begin{array}{llll}\Delta H_1: & X_1=1, & X_{n+1}=0 & \text{のときの } H_x\\ \Delta H_2: & X_1=0, & X_{n+1}=1 & \text{のときの } H_x\end{array}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{array}{llll}\mathbb{e}_1: & X_1=1, & X_{n+1}=0 & \text{のときの } \mathbb{X}\\ \mathbb{e}_2: & X_1=0, & X_{n+1}=1 & \text{のときの } \mathbb{X}\end{array}\right\} \tag{3.9}$$

以上の式を使うと

$$\left.\begin{array}{l}\Delta H_1=-\frac{h}{D}\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)(\mathbb{T}^A)(\mathbb{N})\mathbb{e}_1\\ \Delta H_2=-\frac{h}{D}\mathbb{E}^{*}(\mathbb{T}_H^A)^{*}(\mathcal{R}^A)(\mathbb{T}^A)(\mathbb{N})\mathbb{e}_2\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

ΔH_1 とΔH_2 を要素とする二列のマトリックス〔$\Delta \mathbb{H}$〕を定義すると$\mathbb{H}_x$は次式で求められる。

$$\mathbb{H}_x = (\Delta \mathbb{H})\mathbb{X} \qquad (3.11)$$

2－4　側径間を連続とした場合の不静定力 $\mathbb{X}$

左側径間の部材応力を要素とする一列のマトリックスを $\mathbb{S}^{1S}$、アーチ径間の部材応力のマトリックスを $\mathbb{S}^{A}$、右側径間の部材応力のマトリックスを $\mathbb{S}^{2S}$とし、之らを要素とするマトリックスを$\mathbb{S}$とすると、

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}^{1S} \\ \mathbb{S}^{A} \\ \mathbb{S}^{2S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}^{1S} + \mathbb{S}_x^{1S} \\ \mathbb{S}_0^{A} + \mathbb{S}_x^{A} \\ \mathbb{S}_0^{2S} + \mathbb{S}_x^{2S} \end{pmatrix}$$

(4.1)式の右項の各要素は、(2.3)式及び(1. 2)式の表現法に準じてその中のマトリックスと同じ意味のマトリックスを定義すれば次式で示される。

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{S}_0^{1S} &= (\mathbb{C}^{1S})\mathfrak{M}^{1S} \\ \mathbb{S}^{2S} &= (\mathbb{C}^{2S})\mathfrak{M}^{2S} \\ \mathbb{S}_0^{A} &= (\mathbb{T})\,\mathbb{S}_A^{A} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{S}_x^{1S} &= h\,(\mathbb{C}^{1S})(\mathbb{N}^{1S})\,\mathbb{X} \\ \mathbb{S}_x^{2S} &= h\,(\mathbb{C}^{2S})(\mathbb{N}^{2S})\,\mathbb{X} \\ \mathbb{S}_x^{A} &= (\mathbb{T})\,\mathbb{S}_A^{x} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

(4.1)式に(4.2)、(4.3)式を代入して弾性変形のエネルギーを求め$\mathbb{X}$で微分すれば$\mathbb{X}$を求めることが出来る。$\mathbb{X}$を求める弾性方程式は、

$$(\mathbb{X}) = -\left\{(\mathbb{C}_x)^{*}(\mathcal{R})(\mathbb{C}_x)\right\}^{-1}(\mathbb{C}_x)^{*}(\mathcal{R})(\mathbb{C})(\mathbb{S}_0) \qquad (4.4)$$

(4.4)式中にあるマトリックスは今までに定義したマトリックスを使用して次のように構成する。

$$\left.\begin{aligned} (\mathcal{R}) &= \begin{pmatrix} (\mathcal{R}^{1S}) & & \\ & (\mathcal{R}^{A}) & \\ & & (\mathcal{R}^{2S}) \end{pmatrix} \qquad (\mathbb{S}_0) = \begin{pmatrix} (\mathfrak{M}^{1S}) & & \\ & (\mathbb{S}^{A}) & \\ & & (\mathfrak{M}^{2S}) \end{pmatrix} \\ (\mathbb{C}_x) &= \begin{pmatrix} h(\mathbb{C}^{1S})(\mathbb{N}^{1S}) \\ (\mathbb{T})\begin{pmatrix} (\mathbb{N})h \\ (\Delta \mathbb{H}) \end{pmatrix} \\ h(\mathbb{C}^{2S})(\mathbb{N}^{2S}) \end{pmatrix} \qquad (\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} (\mathbb{C}^{1S}) & & \\ & (\mathbb{T}) & \\ & & (\mathbb{C}^{2S}) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

2－5　部材応力とタワミ

〔$\mathbb{X}$〕を(4.3)式に代入すれば、側径間のある場合の部材応力は次式によって求めることが出来る。

$$\mathbb{S} = [\mathbb{C}]\mathbb{S}_0 + [\mathbb{C}_x]\mathbb{X} \quad (5.1)$$

弾性変形のエネルギーを荷重で微分すれば，その荷重状態のタワミを求めることが出来る。
(5.1)式を使えばタワミは次式で求めることが出来る。

$$\eta = [\mathbb{S}]^{*}[\mathcal{R}][\mathbb{S}] \quad (5.2)$$

3. 鋼 重 の 推 定

この種の橋梁の実用性を判断するには、それの架設に必要な鋼重によるのが、最も安直であると思われる。勿論、如何に他の橋梁型式と比較して、同等又はそれ以下の鋼重になろうとも、それのみで優劣を判定するのは早計である。更に考慮しなければならない諸点の代表的なものを挙げるならば、

a）構造物の面内及び面外への坐屈に対する安全度。

b）横方向の荷重に対する性質

c）二次応力

d）動荷重に対するレスポンス

e）製作、架設の難易、等

而し、ここでは一応鋼重のみに焦点をしぼることにする。設計条件は、

有効巾員＝9.2 m		$\ell'/\ell = 0$，0.2〜0.8	
活 荷 重：集中活荷重		5 t/m	但し主車線のみ
分布活荷重		0.35 t/m	但し主車線のみ
衝 撃	$i = \frac{20}{50+\ell}$	橋長３００ mまで	
	$i = 0$	橋長３００ m以上	

試設計の結果の一例を表－１に示す。表－１を図示したものが図－４である。之によれば、ℓ'/ℓ ＝0.3又は0.4とするのが、最小鋼重を目標とする限りよいのではないかと思われるが、この比は更に f/ℓ も考慮すべきであることを示している。

図－５は、f/ℓの変化によって鋼重の変化する状態の一例である。単一径間のアーチ橋の場合を示しているが、支間長が小さい場合、鋼重に殆んど変化の生じないのは、応力によって断面が定まるのではなく、殆んど細長比又は板の局部坐屈の条件などで定まり、構造物の特性が表われてないと考えられる。応力によって部材の断面が定まるような支間長を選ぶ方が、構造物を設計するという観点からは興味が持てるが、一方、このような構造物を、そのような支間長に対して使用すれば全部材の断面を殆んど変化させる必要がなくなるという特点も生ずる。

この試設計では、アーチ径間長として１８０ｍを選んだが、１８０ｍに特別の理由はない。更に大きな径間長を選ぶことも可能であると思われる。

参考までに ℓ＝７０ｍの場合の推定鋼重を表－２にかかげる。

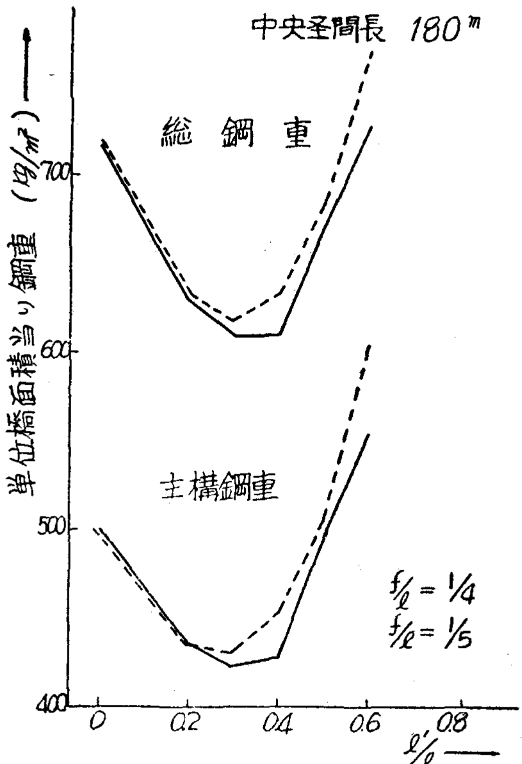


図-4 推定鋼重(側径間つき)

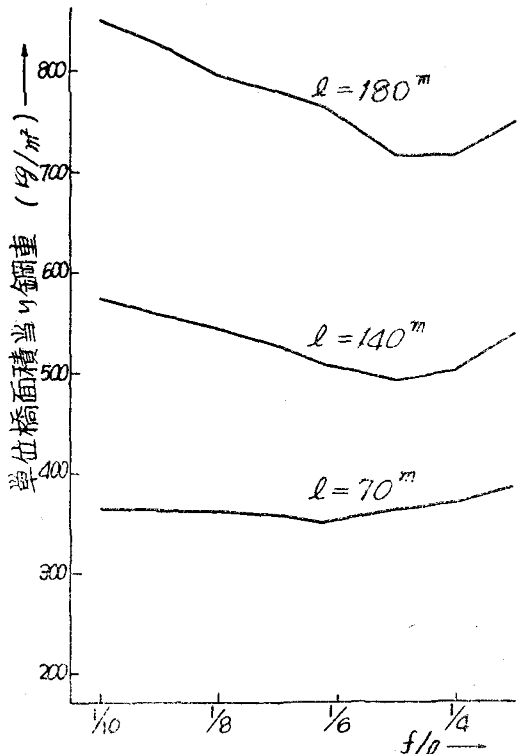


図-5 推定鋼重(単一アーチスパン)

側径間長／中央径間長	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
全　　長（ｍ）	180	252	288	324	360	396		
推定総鋼重（ｔ）	1,187	1461	1614	1817	2229	2649		
単位橋面積当り鋼重(㎏/㎡)	717	630	609	610	673	727		
備　　考	中央径間長＝１８０ｍ　有効巾員＝9.2ｍ ライズ／中央径間長＝1/5　使用鋼材＝SM50A，SS41．							

側径間長／中央径間長	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
全　　　長（m）	180	252	288	324	360	396		
推定総鋼重（t）	1189	1465	1635	1896	2265	2805		
単位橋面積当り鋼重（Kg/m^2）	718	632	617	636	684	770		
備　　　考	中央径間長＝１８０m　　有効巾員＝9.2m ライズ/中央径間長＝1/4　　使用鋼材＝SM50A，SS41							

表－1　推定鋼重（中央径間長１８０m）

側径間長／中央径間長	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
全　　　長（m）	70	98	112	126	145	154	168	182
推定総鋼重（t）	229	264	289	322	362	411	484	564
単位橋面積当り鋼重（kg/m^2）	355	293	280	277	281	290	313	337
備　　　考	中央径間長＝　７０m　　有効巾員＝9.2m ライズ/中央径間長＝1/5　　使用鋼材＝SS41							

側径間長／中央径間長	0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
全　　　長（m）	70	98	112	126	140	154	168	182
推定総鋼重（t）	233	262	294	323	365	421	498	573
単位橋面積当り鋼重（kg/m^2）	362	291	285	279	283	297	322	345
備　　　考	中央径間長＝　７０m　　有効巾員＝9.2m ライズ/中央径間長＝1/4　　使用鋼材＝SS41							

表－2　推定鋼重（中央径間長　　７０m）