

水平力をうける柱の変形

加 藤 勉*

1. 問 題 点

現在盛んに研究されている地震に対する構造物の動的解析の特徴はその変形解析が第1義的な意義をもつに至ったことであると言える。構造物の解析はその変形の研究が基礎をなすことは勿論ではあるが、従来の構造計算では最終的結果のまとめに応力検定という手段をとったため構造設計者はその形式的手続きに慣れて本質をなす変形の考察をなおざりにし勝ちであった。

動的解析では変形の研究が最も重要なものとなる。即ち骨組の荷重と変形の関係(復元力特性)が決まれば、あとは機械が忠実に計算を行い、その結果も仮定した復元力特性によって決定されてしまうのである。

本論では大きな軸圧縮力をうけている柱が水平力をうけるときどのような変形をするかを考察する。柱が水平力によって曲がるときは、その変形量のため軸圧縮力も柱に曲げモーメントを与える。この軸力と水平力によって変形が進むと柱は遂に安定限界に達するが、本論ではこれを固有値問題としてでなく応力問題としてとらえている。実在の高層建物を想定して柱は短柱とし弾、塑性域にわたって考察している。

2. 解 析

Fig. 1を高層建物とし、その比較的下層の柱を考える。Fig. 2(a)は1本の柱をとり出したものである。その柱位置から上層部の建物の重量によって柱に生ずる軸圧縮力を P とし、作用する水平力を qP ($q = \text{Base shear}$) で表わす。これをFig. 2(b)のようにおき変えて考える。この場合次のことを

を仮定している。

- i) 梁の剛性は無限大とする。
- ii) 柱は建物中心部のものとし
建物の水平変位により柱には附加軸力は作用しない。

更に解析に当り次の仮定を設ける。

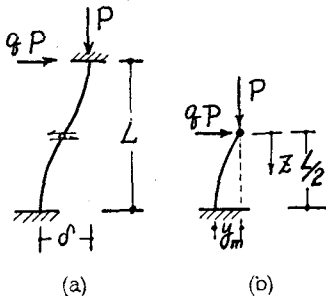


Fig. 2

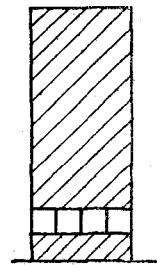


Fig. 1

* 東京大学工学部 建築学科

iii) 材料の応力-歪関係は Fig. 3 に示す如き単純なものとする。

iv) 柱の断面形は矩形とする。

〔状態 I〕 弾性状態 Fig. 4, $\epsilon_2 < \epsilon_y$, $\epsilon_1 < \epsilon_y$,

$$P = bh\sigma_0, \quad M = (y + qz)P \quad \dots\dots\dots (1)$$

応力の釣合いから、

$$h_2/h = \frac{bh^2}{12M} \sigma_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

曲率と曲げモーメントとの関係は

$$1/\rho \div y'' = -\frac{\epsilon_2}{h_2} = -\frac{12M}{Ebh^3} \quad \dots\dots\dots (3)$$

これに(1)式を代入して変形に関する次の微分方程式を得る。

$$y'' + \frac{12\sigma_0}{Eh^2} (y + qz) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

〔状態 II〕 Fig. 5, $\epsilon_2 > \epsilon_y$, $\epsilon_1 \leq \epsilon_y$

$$\text{軸力の釣合いは、} bh\sigma_y - (h - e_1)(\sigma_y + \sigma_1) \frac{b}{2} = P = bh\sigma_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{曲げの 合いは、} M + \frac{Ph}{2} - \frac{bh^2}{2} \sigma_y + \frac{b}{6} (h - e_1)^2 (\sigma_y + \sigma_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{図から曲率は、} 1/\rho \div y'' = -\frac{\epsilon_y}{C_1} = -\frac{\sigma_y}{EC_1} \quad \dots\dots\dots (7)$$

(5)、(6)式より C_1 を求めて、(7)に代入すると、変形に関する次の微分方程式を得る。

$$y'' + \frac{8(\sigma_y - \sigma_0)^3}{9Eh[\frac{2}{h}(y + qz) - (\sigma_y - \sigma_0)]^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

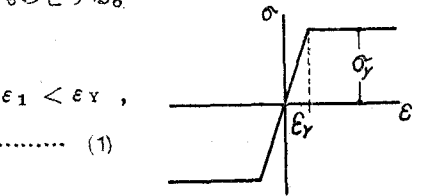


Fig. 3

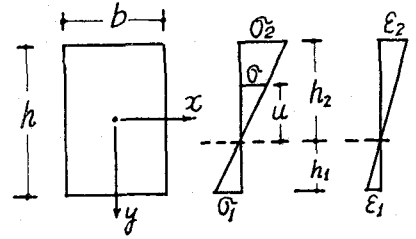


Fig. 4

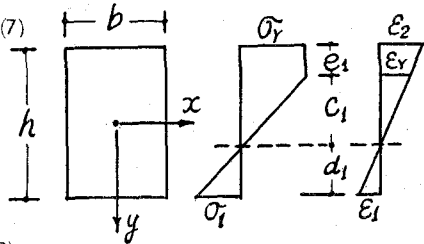


Fig. 5

〔状態 III〕 Fig. 6, $\epsilon_2 > \epsilon_y$

$$\text{軸力の釣合いは、} bh\sigma_y - 2bd_2\sigma_y - 2C_2b\sigma_y = P = bh\sigma_0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{曲げの 合いは、} M + \frac{Ph}{2} - \frac{bh^2}{2} \sigma_y + bd_2^2 \sigma_y + 2C_2b\sigma_y (\frac{2}{3}C_2 + d_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{図から曲率は、} 1/\rho \div y'' = -\frac{\epsilon_y}{C_2} = -\frac{\sigma_y}{EC_2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

(9), (10)式より C_2 を求めて(11)式に代入すると、
変形に関する次の微分方程式を得る。

$$y'' + \frac{Eh \sqrt{\frac{3}{4} (1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_Y^2})} - \frac{3}{h} (y + qz) \frac{\sigma_0}{\sigma_Y}}{0} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

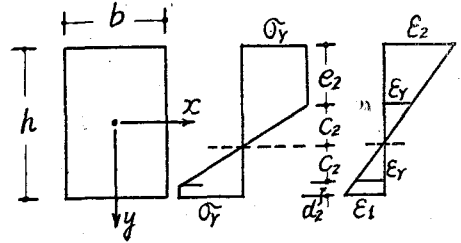


Fig. 6

境界条件を入れて上の(4), (8), (12) の各式を解

いて次の結果を得る。

〔状態Ⅰ〕 $y_m \leq s (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1) - \frac{1}{2} L$

$$y_m = \frac{\sigma_0 L}{2(\sigma_E - \sigma_0)} q \quad \dots\dots\dots (13)$$

〔状態Ⅱ〕 $s (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1) - \frac{1}{2} qL < y_m \leq s (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1) (1 + 2 \frac{\sigma_0}{\sigma_Y}) - \frac{1}{2} qL$

$$y_m [3s (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1) - y_m - \frac{1}{2} qL]^2 - 4 \frac{\sigma_0}{\sigma_E} s^3 (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1)^3 = 0 \quad \dots\dots (14)$$

$\frac{dq}{dy_m} = 0$ となる極値 q_c , y_{mc} の関係は、

$$y_{mc} = s (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1) - \frac{1}{6} q_c L \quad \dots\dots\dots (15)$$

〔状態Ⅲ〕 $y_m > s (\frac{\sigma_Y}{\sigma_0} - 1) (1 + 2 \frac{\sigma_0}{\sigma_Y}) - \frac{1}{2} qL$

$$y_m \sqrt{\frac{3}{2} s \frac{\sigma_Y}{\sigma_0} (1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_Y^2})} - y_m - \frac{1}{2} qL - \frac{1}{\sigma_E} \sqrt{\frac{s^3 \sigma_Y^3}{2 \sigma_0}} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$\frac{dq}{dy_m} = 0$ となる極値 q_c , y_{mc} の関係は、

$$y_{mc} = s \frac{\sigma_Y}{\sigma_0} (1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_Y^2}) - \frac{1}{3} q_c L \quad \dots\dots\dots (17)$$

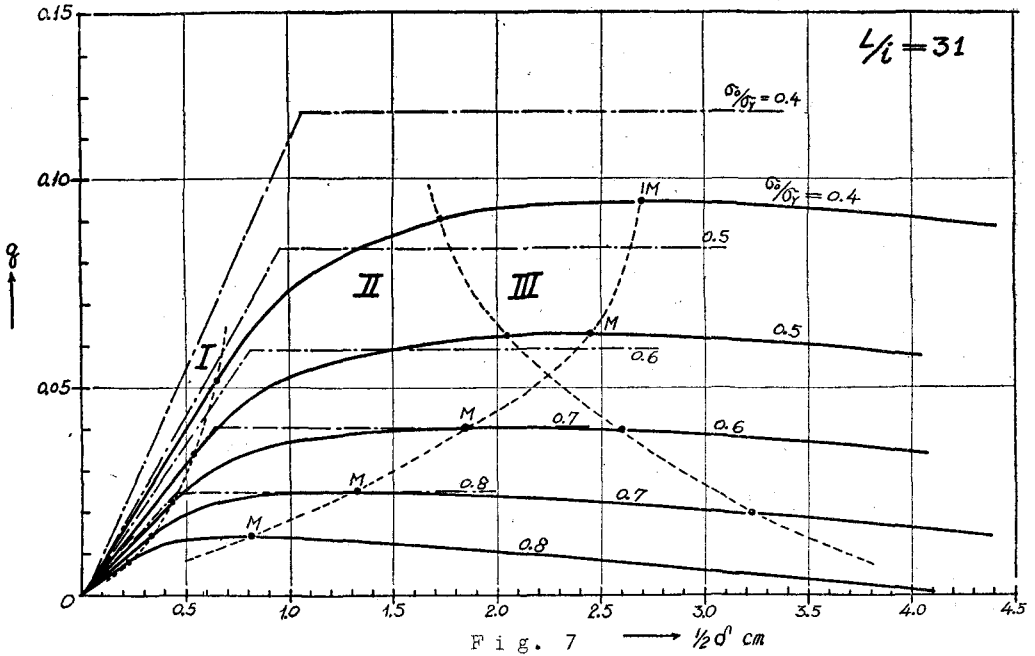
上式中に用いた記号は、

$$s = h/6 : \text{核距離}, \quad i = \frac{h}{\sqrt{12}} : \text{回転半径}, \quad \lambda = \frac{L}{i}, \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

3. 結果の考察

上に得た(13)~(17) 式において、 $h = 40 \text{ cm}$ 、 $b = 30 \text{ cm}$ 、 $L = 360 \text{ cm}$ の鋼柱($\sigma_Y = 3.3 \text{ t/cm}^2$)を仮定し、柱に作用する軸圧縮心力度 $\sigma_0 = \frac{P}{bh}$ を変化させた場合の、Base shear q と

層変位 δ との関係を示したものが Fig. 7 である。



図中 I、II、III は夫々 Fig. 4、5、6 に対応する歪状態の領域を示し、M は $d/dy_m = 0$ となる極値を示す。即ち M より先では曲線は負の勾配となる、また破線は柱の水平変位による軸圧縮力の曲げ効果を見捨てた場合の $q-\delta$ 関係である。

弾性部分 : $y_m = \frac{\sigma_0 L^3}{2 E h^2} q \dots\dots\dots (18)$

完全塑性部分 : Fig. 8 の如く完全塑性状態を想定して

$$q = \frac{1}{18} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} \right) \left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_y^2} \right) \dots\dots\dots (19)$$

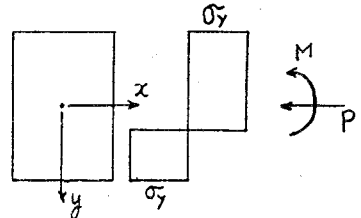


Fig. 8

$q-\delta$ 関係が逆の勾配をとるときは振動が発散するので、この部分まで塑性変形を許すことは危険である。即ち Fig. 7 中 M の点が許し得る塑性変形の最大値と考えられる。

Fig. 9 はこの許容最大塑性変形が軸圧縮応力度 σ_0 の大きさによってどのように変わるかを見たものである。許容最大塑性変形は降伏変形量の倍数 μ で表わしたが、降伏変形量として、Fig. 10 に示す如く断面最外縁が降伏する点 (C、I と II の境界) をとったものを Fig. 9 の A 線で示した。即ち A 線では

$$\mu = \frac{A_0}{C_0}$$

また、Fig. 10 のb線に示すごとく elasto-plastic に置き変えて $\mu = \frac{A_0}{B_0}$ としたものを Fig. 9 のB線で示した。 μ の値は σ_0 の増大に伴って減少するが、B線の表示に従って言えば $\sigma_0/\sigma_Y = 0.8$ 以内なら $\mu = 2.0$ を採りうる最大値としてよい。

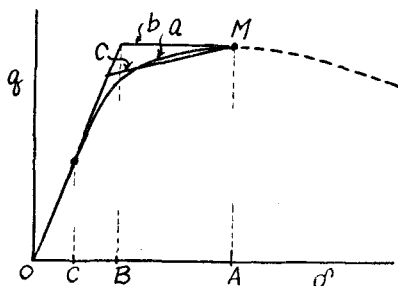


Fig. 10

Fig. 11 は柱の剛性、最大耐力が軸力の曲げ効果を考えない場合にはどの程度の誤差を生ずるかを見たのである。

A線は q の最大値の比較を行ったもので、Fig. 7 でいえば夫々対応する σ_0/σ_Y の値について破線と実線の q の最大値の比である。 $\sigma_0/\sigma_Y = 0.8$ の場合には q の最大値は軸力の曲げ効果を無視した場合の 56% でしかない。

B線は弾性状態における柱の剛性の比較を行ったもので、Fig. 7 において夫々対応する σ_0/σ_Y の値について破線と実線の勾配の比である。 $\sigma_0/\sigma_Y = 0.8$ の場合には軸力の曲げ効果を考えることによって剛性は 68% まで低下する。

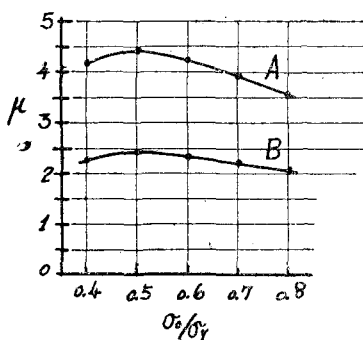


Fig. 9

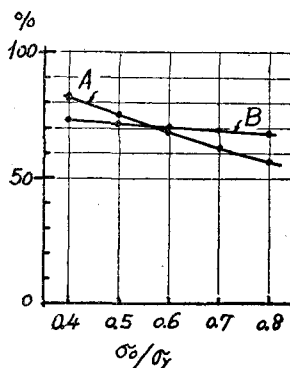


Fig. 11

以上の結果は誘導された式からも判るように材長および断面形状によって変化するので更に広範囲な調査を必要とするのであるが少なくとも定性的には次のことを注意しなければならないことは明らかとなった。

- i) 大きな塑性変形を起すと $q-\delta$ 関係が負の勾配となるので、この点から許容 ductility factor μ には限度があり、この許容値は存在圧縮応力度 σ_0 が大きくなる程減少する。
- ii) 圧縮力の曲げ（柱の水平変位）に及ぼす影響を無視した場合に比して、実際の柱の挙動は剛

性、最大耐力共に相当の低下をきたしこの低下の度合いは σ_0 が大きくなる程大きい。

- iii) 振動解析を行う場合に用いる復元力特性としては軸力の曲げ効果を考慮した曲線に基いて、Fig. 10 に示すごとく、a線の実際の曲線関係をそのままとる。b線のようにelasto-plastic とする。c線のようにbi-linear とする。のいずれかを採ればよい。