

曲線格子桁の板「剛度が変化する平板理論」 による解法

芳 村 仁※

1 緒 言

橋梁を路線形に合致させて建設するためと立体交叉の必要上最近曲線格子橋がかけられるようになったが、その形を平面的にみると円弧方向（接線方向）の数本の主桁とそれに直交する数本の横桁からなる格子を形づくっているがこれらの桁の曲げ剛度を平板の剛度におきかえて解くことを考えると、横桁間隔が放射方向に拡がっているため剛度が一定でなくなる。この点に着目して板剛度が放射方向（極方向）に変化する平板の理論を応用して曲線格子桁の基礎方程式をつくり、それを出発点としてこの問題を解析した。

2 基礎微分方程式の誘導

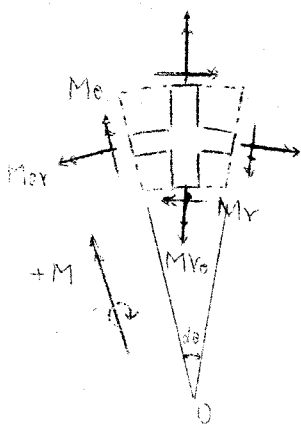


図-1

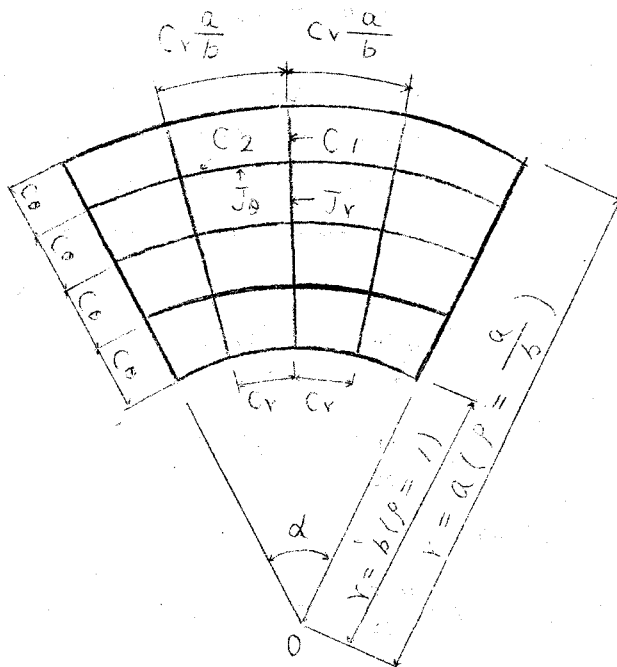


図-2

座標は極座標を採用する。

断面モーメントを図-1のようにとると平板理論より曲げモーメント M_r , M_o およびねじり

モーメント $M_{r\theta}$, $M_{\theta r}$ はたわみを W とすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N_r(r) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -N_\theta(r) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -C_1(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \\ M_{\theta r} &= -C_2(r) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで N_r , N_θ , C_1 , C_2 はそれぞれの方向の板剛度およびねじり剛度であるがこれらの値は緒言で述べたように r の関数であると考える。 ν_r , ν_θ はポアソン比である。

次に $p(r, \theta)$ を鉛直荷重と 1 図-1 の微小扇形要素の周辺の切断面に働くせん断力を Q_r ($r = \text{Const}$ の面に働くせん断力), Q_θ ($\theta = \text{Const}$ の面に働くせん断力) とするとモーメントの釣合いから

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ Q_\theta &= \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{M_{r\theta} + M_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となり鉛直方向 (Z 方向、下向きを正とする) の力の釣合いは

$$-p = \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \quad (3)$$

となる。(2) を (3) に代入すると

$$\begin{aligned} p = & -\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{\theta r}}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \quad (4)$$

となりこれが釣合いの基本式になる。

さて、図-2 に示すような曲線格子桁を考へよう。

J_θ = 主桁の断面二次モーメント

J_r = 横桁の断面二次モーメント

C_1 = 横桁のねじり剛度

C_2 = 主桁のねじり剛度

C_θ = 主桁の間隔

C_r = 内側円弧桁の所における横桁間隔 ($P=1$ の所)

とする。また、内側円弧桁までの座標原点からの距離を b 、外側円弧桁までの距離を a とする。

ここで、今後の計算上、変数 r を無次元表示するのが便利なので b を基準とし

$$\rho = \frac{r}{b} \quad (5)$$

なる新しい変数を導入する。

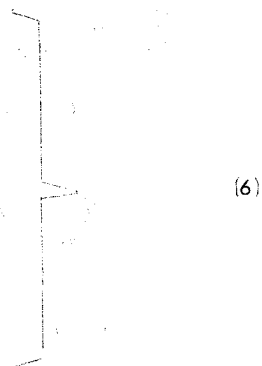
まず、主桁および横桁の断面がそれぞれ一定である場合を考える。主桁間隔 C_θ は一定であるが、横桁間隔は $\rho=1$ における C_r なる間隔は ρ に比例して拡がつてゆく。すなわち $\rho = \frac{a}{b} = k$ (外側円弧桁の所) における横桁間隔は $C_r \rho = C_r k = C_r \frac{a}{b}$ ($k > 1$) のように拡がつたものになる。このことを考慮して桁の剛度を板の剛度におきかえてみると次のようになる。すなわち

$$N_r = \frac{E J_r}{C_r \rho}$$

$$N_\theta = \frac{E J_\theta}{C_\theta}$$

$$C_1 = \frac{G_1}{C_r \rho}$$

$$C_2 = \frac{C_2}{C_\theta}$$



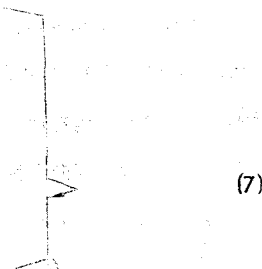
E は弾性係数である。

ポアソン比の影響を考えないと曲げモーメントおよびねじりモーメントは(1)の関係式から

$$M_r = - \frac{E J_r}{C_r \rho b^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}$$

$$M_\theta = - \frac{E J_\theta}{C_\theta b^2} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right]$$

$$M_{r\theta} = - \frac{C_1}{C_r \rho b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)$$



$$M_{\theta r} = -\frac{C_2}{C_\theta b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)$$

これらを(4)のつり合いの式に代入し、途中の計算を省略して結果のみをかくと次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{E J_r}{C_r \rho} \frac{\partial^4 W}{\partial \rho^4} + \frac{\partial C_2}{C_\theta \rho^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} + \left[\frac{C_1}{C_r \rho^4} - \frac{3 C_2}{C_\theta \rho^3} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial \rho \partial \theta^2} + \\ & + \left[\frac{2 E J_\theta}{C_\theta \rho^4} + \frac{3 C_2}{C_\theta \rho^4} - \frac{C_1}{C_r \rho^5} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \left[\frac{E J_\theta}{C_\theta \rho^3} \right] \frac{\partial W}{\partial \rho} + \left[\frac{2 E J_r}{C_r \rho^3} - \frac{E J_\theta}{C_\theta \rho^2} \right. \\ & \left. - \frac{2 E J_r}{C_r \rho^3} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{E J_\theta}{C_\theta \rho^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} = p(\rho, \theta) b^4 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで

$$\frac{C_r}{C_\theta} = k, \quad \frac{J_\theta}{J_r} = \epsilon \quad (9)$$

とおき整理すると結局次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial \rho^4} + \frac{2 k C_2}{E J_r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^4 W}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{E J_r} \left[\frac{C_1 - 3 C_2 k \rho}{\rho^3} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial \rho \partial \theta^2} \\ & + \frac{1}{E J_r} \left[\frac{(2 \epsilon E J_r + 3 C_2) k \rho - C_1}{\rho^4} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\epsilon k}{\rho^2} \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\epsilon k}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \\ & + \frac{\epsilon k}{\rho} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} = \frac{p(\rho, \theta) b^4 C_r}{E J_r} \rho \end{aligned} \quad (10)$$

これが断面がそれぞれ一定のときの曲線格子桁の解析の基礎となる方程式である。この微分方程式は筆者が先に誘導した曲線直交異方性変厚平板の曲げの基礎微分方程式¹⁾における N_r , N_θ , Q , C_2 などを(b)の関係を考慮しておきかえ r , ρ を 0 とした場合に得られるものと全く一致する。すなわち、変厚板の微分方程式は結局、 r 方向の板剛度が変化する場合の曲げの微分方程式となるので変厚板のときのみならず、剛度が r 方向に変化するような平板構造（たとえば板厚が一定であつても）の曲げの問題に対して適用できることを意味している。

曲線格子桁の中止角を α として、 $0 < \theta < \alpha$ の区間で方程式 (10) の各項に θ に関する有限 Fourier Sine 変換を施すと計算の結果、次式が得られる。

$$\frac{\alpha^4 W_s}{\alpha \rho^4} + \left[\frac{\epsilon k}{\rho} - \frac{2 \beta^2 k C_2}{E J_r \rho} \right] \frac{\alpha^2 W_s}{\alpha \rho^2} + \left[\frac{\epsilon k}{\rho^2} - \beta^2 \left\{ \frac{C_1 - 3 C_2 k \rho}{E J_r \rho^3} \right\} \right] \frac{\alpha W_s}{\alpha \rho}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta^2 \left[\beta^2 \frac{\epsilon k}{\rho^3} + \left\{ \frac{(2 \epsilon E J r + 3 C_2) k \rho - C_1}{E J r \rho^4} \right\} \right] W_S = \frac{S \{ \rho(\rho, \theta) \} b^4 C r \rho}{E J r} \\
& + \frac{2 k C_2}{E J r \rho} \beta [(-1)^m W'(r, \alpha) - W'(r, 0)] + \frac{1}{E J r} \left(\frac{C_1 - 3 C_2 k \rho}{\rho^3} \right) \\
& \beta [(-1)^m W'(r, \alpha) - W'(r, 0)] + \frac{1}{E J r} \left[\frac{(2 \epsilon E J r + 3 C_2) k \rho - C_1}{\rho^4} \right] \\
& \beta [(C-1)^m W(r, \alpha) - W(r, 0)] - \frac{\epsilon k}{\rho} \left\{ \beta [(-1)^m \left\{ \frac{C \theta(M \theta) \theta = \alpha}{E J \theta} + \frac{W'(K \alpha)}{\rho} \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left\{ \frac{C \theta(M \theta)}{E J \theta} + \frac{1}{\rho} W'(r, \alpha) \right\} \right] + \beta^3 [(C-1)^m W(r, \alpha) - W(r, 0)] \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

ここで $\beta = \frac{n\pi}{\alpha}$ ($n=1, 2, \dots$) であり W_S および $S \{ \rho(r, \theta) \}$ はたわみ $W(r, \theta)$ および荷重 $\rho(r, \theta)$ の有限 Fourier Sine 変換である。右辺の第二項以下には $\theta = \alpha$ および $\theta = 0$ なる放射方向の二直線辺の境界値が入っている。いまこの二直線辺が単純支持辺であるとすると (11) 式の第二以下はすべて 0 となる。以下、この二直線辺が単純支持の場合を扱うことにする。微分方程式 (11) を解いて W_S を求めるとたわみ $W(r, \theta)$ は逆変換公式

$$W(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1, 2}^{\infty} W_S \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \quad (12)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

から求まり、断面モーメント、ねじりモーメントなどは (7) 式から得ることができる。

3 微分方程式の解法

基礎微分方程式 (11) を更にかきかえると次のようになる。

$$\frac{\alpha^4 W_S}{\alpha \rho^4} + \frac{\beta \rho}{\rho^2} \frac{\alpha^2 W_S}{\alpha \rho^2} + \frac{(C \rho - D)}{\rho^3} \frac{\alpha W_S}{\alpha \rho} + \frac{(G \rho - F)}{\rho^4} W_S = \frac{S \{ \rho(\rho, \theta) \} b^4 C r \rho}{E J r} \quad (13)$$

ただし $B = \frac{-2 \beta^2 k C_2}{E J r} - \epsilon k$

$$C = \epsilon k + 3 \beta^2 C_2 k, \quad D = \frac{\beta^2 C_1}{E J r}$$

$$G = k \beta^2 \left[\beta^2 \epsilon + 2 \epsilon + \frac{3 C_2}{E J r} \right]$$

(14)

$$F = \frac{C_1}{E J r}$$

(13) 式の $\frac{\alpha^2 W_S}{\alpha \rho^2}$, $\frac{\alpha W_S}{\alpha \rho}$ および W_S の各係数は $\rho=0$ において極を有するが、 $B\rho$, $C\rho-D$, $G\rho-F$ などは $\rho=0$ で正則であるから $\rho=0$ は微分方程式 (13) の正則特異点である。また $\rho=0$ 以下に特異点を有しないから $\rho=0$ の付近の解を求めるとその収束半径をいくらでも大きくとることができるので非常に有効である。したがって解として正則特異点 $\rho=0$ の近傍のものを求めることにする。

[表] 右辺 = 0 の場合

いま (13) の解として次のような Frobenius の級数を考える。

$$W_S = \rho^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n \quad (15)$$

指数 λ と未定数 A_n を微分方程式 (13) を満足するように決定すればよいので (15) を (13) の右辺を 0 とした同次微分方程式に代入すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{ \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) - D\lambda - F \} A_0 + \{ [(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - D(\lambda+1) - F] A_1 + [B\lambda(\lambda-1) + C\lambda + G] A_0 \} \rho \\ & + \{ [(\lambda+2)(\lambda+1)\lambda(\lambda-1) - D(\lambda+2) - F] A_2 + [B(\lambda+1)\lambda + C(\lambda+1) + G] A_1 \} \rho^2 + \{ \dots \} \rho^3 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式は ρ の昇べきの順に列べてあるが、各べきの係数を 0 とおくと次の関係式が得られる。

$$\rho^0 \rightarrow \{ \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) - D\lambda - F \} A_0 = 0$$

$$\rho^1 \rightarrow [(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - D(\lambda+1) - F] A_1 + [B\lambda(\lambda-1) + C\lambda + G] A_0 = 0 \quad (17)$$

$$\rho^2 \rightarrow [(\lambda+2)(\lambda+1)\lambda(\lambda-1) - D(\lambda+2) - F] A_2 + [B(\lambda+1)\lambda + C(\lambda+1) + G] A_1 = 0$$

$A_0 \neq 0$ とすると (17) の第一式から

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - (6+D)\lambda - F = 0 \quad (18)$$

が得られ、これが微分方程式 (13) の指数を決定する式でありその根が $\rho=0$ における (13) の指数となる。その四個の指数を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および λ_4 とすると (17) の第二以下の式によって四個の λ の各々に対し $A_1, A_2 \dots A_n$ が別々に求まる。ただしいつれの根に対してもそれぞれの指数の中その差が 0 または整数でないときでありこのように得られた A_n の値を $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, A_n^{(3)}, A_n^{(4)}$ と表すと (13) の同次式の解として

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \rho \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \rho^n \\
 W_2 &= \rho \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} \rho^n \\
 W_3 &= \rho \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)} \rho^n \\
 W_4 &= \rho \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(4)} \rho^n
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

を得る。したがって W_0 は C_1, C_2, C_3, C_4 を未定係数として

$$W_0 = C_1 W_1 + C_2 W_2 + C_3 W_3 + C_4 W_4 \tag{20}$$

となる。

[B] 微分方程式の特解

(13) の右辺を考慮して特解を求めるのであるが、右辺の中の $S\{p(r, 0)\}$ は荷重 $p(r, \theta)$ が与えられると決まるものであり色々な荷重状態により右辺はそれぞれ異つたものとなる。ここでは一例として等分布満載荷重が作用している場合を与えると

$$p(r, \theta) = q_0 \quad (= \text{Const})$$

であるから

$$S\{p(r, \theta)\} = S\{q_0\} = \frac{q_0 [1 - (-1)^n]}{\beta} \tag{21}$$

$$\beta = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
 \text{となり (13) の右辺は} \quad \frac{2 q_0 b^4 G}{E J_r \beta} \rho &= K \rho \\
 (n = 1, 3, 5, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

ただし

$$K = \frac{2 q_0 b^4 C_r}{E J_r \beta}$$

$W_p = \rho^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n$ として (13) に代入して (22) を考慮して ρ の指数を比較すると

$\lambda = 0$ でありまた $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ となるから結局

$$\begin{aligned} (120 - 50 - F) A_5 &= K \\ \therefore A_5 &= \frac{K}{120 - 50 - F} \end{aligned} \quad (23)$$

となり、(13) の特解として

$$W_p = A_5 \rho = \frac{2Q_0}{EJ_r \beta (120 - 50 - F)} \rho^5 \quad (24)$$

が得られることになる。したがって (13) の解は $W_s = W_0 + W_p$ で得られる。 W の中の C_1 , C_2 , C_3, C_4 の 4 個の未定係数は後で述べる二円弧辺における境界条件で決定される。

4 せん断力および反力

$W(r, \theta)$ が W_s の逆変換公式から求まると断面モーメントは (7) 式から求まり、またせん断力 Q_r , Q_θ および V_r , V_θ は次式から得られる。

(2) から

$$Q_r = \frac{1}{b^3} \left[-\frac{EJ_r}{C_r \rho} \frac{\partial^3 W}{\partial \rho^3} - \frac{EJ_r}{C_r \rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{EJ_\theta}{C_\theta \rho^2} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{C_1}{C_r \rho^4} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{C}{C_r \rho^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \rho \partial \theta^2} - \frac{EJ_r}{C_r \rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \right] \quad (25)$$

$$Q_\theta = \frac{1}{b^3} \left[-\frac{EJ_\theta}{C_\theta \rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{C}{C_r \rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2 \partial \theta} - \frac{EJ_\theta}{C_\theta \rho^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} + \frac{C_1}{C_r \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right]$$

また V_r , V_θ は

$$\begin{aligned} V_r &= Q_r + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{b^3} \left[-\frac{EJ_r}{C_r \rho} \frac{\partial^3 W}{\partial \rho^3} - \frac{EJ_r}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{EJ_\theta}{C_\theta \rho^2} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{EJ_\theta}{C_\theta} + \frac{2C}{\rho} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{2C_1}{C_r \rho^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \rho \partial \theta^2} + \frac{EJ_r}{C_r \rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 v_{\theta} &= Q_{\theta} + \frac{\partial M_{\theta} r}{\partial r} \\
 &= \frac{1}{b^3} \left[- \left(\frac{C_1}{C_r \rho} + \frac{C_2}{C_{\theta}} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial \rho^2 \partial \theta} - \left(\frac{EJ_{\theta}}{C_{\theta}} - \frac{2C_2}{C_{\theta}} \right) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho \partial \theta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2C_2}{C_{\theta} \rho^3} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \frac{EJ_{\theta}}{C_{\theta} \rho^3} \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} + \frac{C_1}{C_r \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right]
 \end{aligned}$$

となる。

5 境界条件

- 1) $\rho = 1.0$ または $\rho = \frac{a}{b}$ が単純支持されている場合

$$W = 0, \quad M_r = 0 \quad (27)$$

- 2) $\rho = 1$, $\rho = \frac{a}{b}$ が自由辺のとき

$$M_r = 0, \quad V_r = 0 \quad (28)$$

- 3) $\rho = 1$, $\rho = \frac{a}{b}$ が固定されている場合

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \rho} = 0 \quad (29)$$

6 集中荷重が作用する場合

図-3のように $\rho = \rho_1$, $\theta = \theta_3$

の点に P なる集中荷重が作用する場合を考える。

図のように $r = r_c$ なる円弧で二つに分けその中の内側のものを①外側のものを②としよう。この平板のおのおのに対し基本微分方程(13)の同次式(右辺=0)が適用される。

未定係数の数は8個となるが、この中4個を周辺条件で、他の4個は $r = r_c$ での連続条件で決定される。②の平板について1をつけて表わすと連続条件は次のようになる。

図-3

$$r=r_c \text{にて} \quad W=W'$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W'}{\partial r}$$

$$M_r = M'_r$$

$$Q_r - Q'_r = p(\theta)$$

$$= \frac{2P}{\partial r_c} \sum_{n=1,2}^{\infty} \sin \frac{n\pi \xi}{\alpha} \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

(30)

(30) の第四の条件は $r=r_c$ の円弧でのせん断力と荷重の釣合いの条件で、右辺は荷重 P を $r=r_c$ の円弧上に Fourier 級数に展開したものである。

7 主桁および横桁の断面が一定でなく r 方向に変化する場合の基礎方程式

2では主桁と横桁の J_θ , J_r および C_1, C_2 がそれぞれ一定の場合の曲線格子桁の基礎微分方程式を誘導したが、ここでは更に一般的に J_θ , J_r および C_1, C_2 が r の方向で変化する場合、すなわち桁の断面が一定でない場合について述べる。

このときは(1)式の中の断面の定数 J_θ , J_r , C_1, C_2 などがそれぞれ ρ の関数となる。すなわち $J_\theta(\rho)$, $J_r(\rho)$, $C_1(\rho)$, $C_2(\rho)$ を考慮して、つり合いの基礎式(4)に代入すると次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{E J_r(\rho)}{C_r \rho} \frac{\partial^4 W}{\partial \rho^4} + \left[\frac{2E}{C_r \rho} \frac{\alpha J_r(\rho)}{\alpha \rho} \right] \frac{\alpha^3 W}{\alpha \rho^3} + 2 \frac{C_2(\rho)}{C_\theta \rho^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} + \left[\frac{C_1(\rho)}{C_r \rho^5} - \frac{2C_2(\rho)}{C_\theta \rho^3} \right. \\ & \left. + \frac{2}{C_\theta \rho^2} \frac{\alpha C_2(\rho)}{\alpha \rho} \right] \frac{\partial^3 W}{\partial \rho \partial \theta^2} + \left[-\frac{Q(\rho)}{C_r \rho^6} + \frac{3C_2(\rho)}{C_\theta \rho^4} + \frac{2E J_\theta}{C_\theta \rho^4} - \frac{E}{C_\theta \rho^3} \frac{\alpha J_\theta(\rho)}{\alpha \rho} - \frac{2}{C_\theta \rho^3} \right. \\ & \left. \frac{\alpha C_2(\rho)}{\alpha \rho} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \left[\frac{E J_\theta}{C_\theta \rho^3} - \frac{E}{C_\theta \rho^2} \frac{\alpha J_\theta(\rho)}{\alpha \rho} \right] \frac{\partial W}{\partial \rho} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{E}{G} \frac{\alpha^2 J_r(\rho)}{\alpha \rho^2} - \frac{E J_\theta}{\rho^2} \right] \\ & \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{E J_\theta(\rho)}{C_\theta \rho^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} = p(\rho, \theta) \cdot b^4 \end{aligned} \quad (31)$$

更に、 $0 < \theta < \alpha$ の区間で θ に関する有限 Fourier Sine 変換を施し、放射方向の二直線辺が単純支持の条件を考慮すると次のようになる。

$$\frac{E J_r(\rho) \alpha^4 W_s}{C_r \rho \alpha \rho^4} + \left[\frac{2E}{C_r \rho} \frac{\alpha J_r(\rho)}{\alpha \rho} \right] \frac{\alpha^3 W_s}{\alpha \rho^3} + \left[-\beta^2 \left(\frac{2C_2(\rho)}{C_\theta \rho^2} \right) - \frac{E J_\theta(\rho)}{\rho^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r}{\rho} \left[\frac{E \cdot \alpha^2 J_r(\theta)}{C_r \cdot \alpha \rho^2} \right] \frac{\alpha^2 W_s}{\alpha \rho^2} \\
& + \left[-\beta^2 \left(\frac{C_1(\rho)}{C_r \rho^5} - \frac{2C_2(\rho)}{C_\theta \rho^3} + \frac{2}{C_\theta \rho^2} \frac{\alpha C_2(\rho)}{\alpha \rho} \right) + \left(\frac{E J_\theta}{C_\theta \rho^3} - \frac{E}{C_\theta \rho^2} \frac{\alpha J_\theta(\rho)}{\alpha \rho} \right) \right] \\
& \frac{\alpha W_s}{\alpha \rho} + \beta^2 \left[\frac{\beta^2 E J_\theta(\rho)}{C_\theta \rho^4} + \frac{C_1(\rho)}{C_r \rho^5} - \frac{3C_2(\rho)}{C_\theta \rho^4} - \frac{2E J_\theta}{C_\theta \rho^4} + \frac{E}{C_\theta \rho^3} \frac{\alpha J_\theta(\rho)}{\alpha \rho} \right. \\
& \left. + \frac{2}{C_\theta \rho^3} \frac{\alpha C_2(\rho)}{\alpha \rho} \right] W_s = S \{ p(\rho, \theta) \} b^4 \quad (32)
\end{aligned}$$

この微分方程式が一般の断面をもつ桁からつくられた曲線格子桁を解く基本になる式である。断面の形が与えられると(32)式中の W_s および W_s の導関数の係数が決定され、したがって、おのおの場合について微分方程式をつくることのできる。この微分方程式の解法については、断面の形がきまらないと一概に論ずることはできないが、もし横桁の断面が一定であれば、多くの場合3で述べたように $W_s \propto \rho \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n$ の形に解を決定することができる。また横桁断面が ρ に関する代数式で表わされる変化をしているときには、いくつかの正則特異点をもつ微分方程式になり、 a をその正則特異点の一つとすると解は

$$W_s = (\rho - a) \lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho - a)^n \quad (33)$$

の形に決定することができる。

なお(32)式において、 J_r, J_θ, C_1, C_2 を一定とすると(11)ないし(13)式と一致するのは当然である。

たわみ $W(r, \theta)$ が求まると断面モーメント、せん断力、反力などが(7), (25), (26)などから得られるがこれらは直交異方性板としての単位巾についての値であるから、それぞれの桁の値を求めるには、おのおのある区間について積分することにより求めることができる。

あ と が き

直橋のように主桁と横桁が一定の間隔で配列されている場合にはこれを直角直交異方性板とみなして、等厚の矩形板理論(あるいは等剛度矩形板理論)を応用できるが横桁間隔が一定でない曲線格子桁のような場合には“板剛度が r 方向に変化する曲線直交異方性板理論”を応用して解析しなければならないのでその基礎式をたて解法を示した。

参 考 文 献

Jin Yoshimura : "THE BENDING OF CURVILINEAR ORTHOTR-
OPIC CIRCULAR RING SECTOR PLATE WITH
VARYING THICKNESS"

Proceeding of the 4th Japan
National Congress for Applied
Mechanics, 1961