

トラス・ランガー桁の解析

赤 尾 親 助*

要旨、本文は、斜め吊材を用いたランガー桁の一新形式について、弾性方程式法により解析を行ない、計算例をあげて、その特性と利点を述べたものである。本構造形式は、ランガー系の特長である軽快さに、トラスの特性を加えたものであつて、全系構造物の軽量化、剛性の増大等が期待できる。

1. ま え が き

ランガー桁の垂直吊材を斜めにし、トラス化するとその力学的性状はトラスに近づき、軸力による抵抗分が増し、下弦材（補剛プレートガーダー）の曲げモーメントが減少する。図-1のよ



図 1 トラス・ランガー桁

うに、端部附近の1～2格点のみを垂直吊材とし、中央部をトラス化した形式は、次のような利点をもつ。

- a) 斜材は、引張力のみをうけるようになる。
 - b) 下弦材の曲げモーメントが著るしく減少する。また、負の曲げモーメントが、ほとんど生じないので、下弦材を活荷重合成桁とすることが可能になる。
 - c) 上、下弦材の設計軸力は、いわゆるランガー桁と同等であり、位置による設計応力差は僅少である。
 - d) 吊材のすべてをトラス化した場合に比し、不静定次数が少なくなり、設計々算が容易である。
- 以下に、1格点のみを垂直吊材とした形式（図-1）についての解析を述べる。簡単のため、一応トラスの軸線と、下弦材の図心軸は一致するものとみなすことにする。

*大阪大学工学部

2 弾性方程式

斜材を配置した下弦格点の上部の上弦材を切断したものを、静定系にとる（図-2）。これに $X_m = 1$ を作用させたときの部材力、下弦材の軸力 N と曲げモーメント M は、図-3（ $m \geq 3$ ）、及び、図-4（ $m = 2$ ）に示すようになる。ここに、 θ は、上弦材傾斜角、 φ は斜材傾斜角、

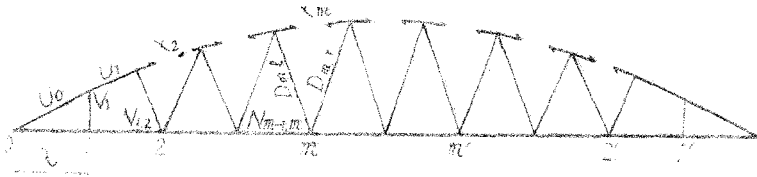


図-2 静定系及び部材力記号

λ は格間長

（一定）、 X は格間におけ

る副座標とし、かつ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= \sin(\varphi_m - \theta_m) / 2 \cos \varphi_m \\ & \quad (m = 2, 2, \dots) \\ \alpha_0 &= \alpha_2 / \left(1 + \frac{\tan \theta_0}{\tan \theta_1} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

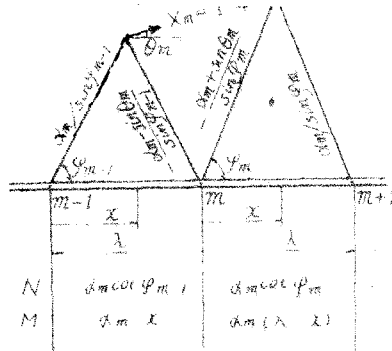


図-3 $X_m = 1$ による部材断面力（ $m \geq 3$ ）

次に、仮想変位の原理に

より、上弦材の変長につい

て弾性方程式をつくると

（せん断力の影響を無視す）、

$$\begin{aligned} & \frac{X_m \cdot s_m}{EA_m} + \sum \bar{s} s \rho \\ & + \sum \int \frac{\bar{N} N}{EA_G} ds + \sum \int \frac{\bar{M} M}{EI_G} ds \\ & + \sum \int \frac{\bar{M} \cdot M_E}{EI_G} ds = 0 \dots (2) \end{aligned}$$

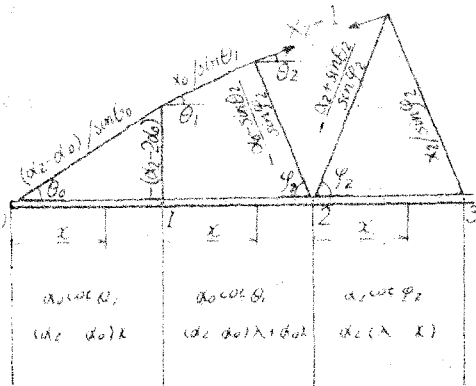


図-4 $X_2 = 1$ による部材断面力（ $m = 2$ ）

こゝに、 X_m : 実際荷重状態における格点 m の上弦材部材力、

s_m : 上弦材長、 A_m : 上弦材断面積、 E : ヤング係数、 AG : 下弦材断面積、

IG : 下弦材断面 2 次モーメント、

$\bar{M}$, $\bar{N}$, $\bar{S}$: 仮想荷重 $X_m = 1$ による静定系の部材断面力、

M , N , S : 不静定力 X_i ($i = 2, 3, \dots$) による静定系の部材断面力、

M_E : 外力荷重による静定系下弦材の曲げモーメント、

ρ : s/EA (端部上弦材・垂直材・斜材に対してとる)。

さて、下弦材の断面を一定とし、図-3, 4 に示したところを用いて、(2) 式を計算すると、
a, 一般点 ($m \geq 3$) においては、

$$\begin{aligned}
 & X_{m-1} \left[\alpha_{m-1} \cdot \alpha_m (1 + 6\mu^2 \cot^2 \varphi_{m-1}) - 3\mu^2 \frac{AG}{AD, m-1} \cdot \right. \\
 & \quad \left. \frac{\alpha_m (\alpha_{m-1} + \sin \theta_{m-1}) + \alpha_{m-1} (\alpha_m - \sin \theta_m)}{\sin^2 \varphi_{m-1} \cdot \cos \varphi_{m-1}} \right] \\
 & + X_m \left[\alpha_m^2 \{ 4 + 6\mu^2 (\cot^2 \varphi_{m-1} + \cot^2 \varphi_m) \} + 6\mu^2 \cdot \frac{AG}{A_m \cos \theta_m} \right. \\
 & + 3\mu^2 \left\{ \frac{AG}{AD, m-1} \cdot \frac{\alpha_m^2 + (\alpha_m - \sin \theta_m)^2}{\sin^2 \varphi_{m-1} \cdot \cos \varphi_{m-1}} + \frac{AG}{AD, m} \cdot \frac{\alpha_m^2 + (\alpha_m + \sin \theta_m)^2}{\sin^2 \varphi_m \cdot \cos \varphi_m} \right\} \Big] \\
 & + X_{m+1} \left[\alpha_m \cdot \alpha_{m+1} (1 + 6\mu^2 \cot^2 \varphi_m) - 3\mu^2 \cdot \frac{AG}{AD, m} \right. \\
 & \quad \left. \frac{\alpha_{m+1} (\alpha_m + \sin \theta_m) + \alpha_m (\alpha_{m+1} - \sin \theta_{m+1})}{\sin^2 \varphi_m \cdot \cos \varphi_m} \right] \\
 & = - \frac{\alpha_m}{\lambda} (M_{m-1}, \xi + 4M_m, \xi + M_{m+1}, \xi) \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

b, $m = 2$ では

$$\begin{aligned}
 & X_2 \left[4\alpha^2 - 10\alpha\alpha_0\alpha^2 + 10\alpha_0^2 + 6\mu^2 (2\alpha_0^2 \cot^2 \theta_1 + \alpha_2^2 \cot^2 \varphi_2) \right. \\
 & + 6\mu^2 \left\{ \frac{AG}{A_2 \cos \theta_2} + \frac{AG}{A_{u_0} \cos \theta_0} \frac{(\alpha_2 - \alpha_0)^2}{\sin^2 \theta_0} + \frac{AG \cdot \nu}{A_{u_1} \cos \theta_1} \frac{\alpha_0^2}{\sin^2 \theta_1} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{AG}{A_{v_1}} \tan \theta_0 \cdot (\alpha_2 - 2\alpha_0)^2 + \frac{AG(1-\nu)}{AD, 2 \cos \varphi_2} \cdot \frac{(\alpha_0 - \sin \theta_2)^2}{\sin^2 \varphi^2} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{AG}{AD_2} \cdot \frac{(\alpha_2 + \sin \theta_2)^2 + \alpha_2^2}{2 \sin^2 \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2} \}] \\
& + X_3 \left[\alpha_2 \alpha_3 (1 + 6 \mu^2 \cot^2 \varphi_2) \right. \\
& \left. - 3 \mu^2 \cdot \frac{AG}{AD_2} \cdot \frac{\alpha_3 (\alpha_2 + \sin \theta_2) + \alpha_2 (\alpha_3 - \sin \theta_3)}{\sin^2 \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2} \right] \\
& = -\frac{1}{\lambda} \left[(5 \alpha_2 - 4 \alpha_0) M_{1, \xi} + (5 \alpha_2 - \alpha_0) M_{2, \xi} + \alpha_2 \cdot M_{3, \xi} \right] \cdots (4)
\end{aligned}$$

$$\text{こゝに、} \quad \mu^2 = IG / AG \cdot \lambda^2 ,$$

$$\nu = (\tan \varphi_2 - \tan \theta_0) / (\tan \varphi_2 + \tan \theta_1) ,$$

斜材 $D_{m,r}$ と $D_{m,l}$ の断面積は等しいとみなし、 AD, m であらわす。

(3), (4) を連立的に解き、 X_1 を求めれば、その他の部材力は、表-1 のように計算される。外力荷重を対称、逆対称にわければ、連立式の未知量は半分になり、図-1 のような 10 格間では、未知量は、対称で 4 ケ、逆対称で 3 ケとなる。

表-1 トラスト・ランガー桁の部材断面力

部 材	記号	部 材 力	備 考
上 弦 材	U_0	$X_2 (\alpha_2 - \alpha_0) / \sin \theta_0$	X_2 のみに関係する。 引張りを正とす。
上 弦 材	U_1	$X_2 \alpha_0 / \sin \theta_1$	
垂 直 材	V_1	$-X_2 (\alpha_2 - 2 \alpha_0)$	
斜 材	$D_{2,l}$	$-X_2 (\alpha_0 - \sin \theta_2) / \sin \varphi_2$	引張りを正とす。
	$D_{m,r}$	$-X_m \cdot \frac{\alpha_m + \sin \theta_m}{\sin \varphi_m} + X_{m+1} \frac{\alpha_{m+1}}{\sin \varphi_m}$	$m = 2, 3, \dots$
	$D_{m,l}$	$X_{m-1} \cdot \frac{\alpha_{m-1}}{\sin \varphi_{m-1}} - X_m \cdot \frac{\alpha_m - \sin \theta_m}{\sin \varphi_{m-1}}$	$m = 3, 4, \dots$
下弦材の軸力	$N_{0,1}$ $N_{1,2}$	$\left. \begin{array}{l} X_2 \cdot \alpha_0 \cot \theta_1 \\ X_{m-1} \alpha_{m-1} \cot \varphi_{m-1} - X_m \cdot \alpha_m \cot \varphi_m \end{array} \right\}$	$m = 3, 4, \dots$
	$N_{m-1,m}$		
下弦材の格点モーメント	M_1	$X_2 \cdot (\alpha_2 - \alpha_0) \lambda + M_{1, \xi}$	
	M_m	$X_m \cdot \alpha_m \lambda + M_{m, \xi}$	$m = 2, 3, \dots$

3 トラスト・ランガー桁の静力学的性状

こゝでは、著者等が、荷重試験を行なう機会をもつた藤川橋¹⁾の断面諸値を、主として参考にして、次のような仮定のもとに、その静力学的性状を比較検討してみる（図-1参照）。

下弦格点は10格間とし、格間長を λ

上弦格点は、 $f/\ell = 0.15$ のパラボラ上に位置せしめる。

上弦材断面積 $A_m = \bar{A}_m \cdot \sec \theta_m$ とし、 $A_G / \bar{A}_m = 2$

斜材断面積、 $A_{D.m} = A_D \cdot \cos \varphi_m$ とし、 $A_G / A_{D.m} \sin \varphi_m = 2.5$

垂直材断面積、 $A_{V_1} = 2 A_D = 0.08 A_G$ 、 $A_G / A_{V_1} = 12.5$

$\mu^2 = I_G / A_G \cdot \lambda^2 = 0.012$ 。

連立方程式、(3)、(4)は次のようになる。

a 対称荷重状態に対して

$$\begin{aligned} 11.18605 X_2 - 4.62508 X_3 &= -(2.86466 M_1, \varepsilon + 4.07334 M_2, \varepsilon + 0.89525 M_3, \varepsilon) \\ / \lambda - 4.62508 X_2 - 21.80614 X_3 - 8.33507 X_4 &= -1.21062 (M_2, \varepsilon + 4 M_3, \varepsilon + M_4, \varepsilon) / \lambda \\ - 8.33507 X_3 + 3.140416 X_4 - 1.091394 X_5 &= 1.41485 (M_3, \varepsilon + 4 M_4, \varepsilon \\ + M_5, \varepsilon) / \lambda - 1.091394 X_4 + 1.755408 X_5 &= -1.485 (M_4, \varepsilon + 2 M_5, \varepsilon) / \lambda \end{aligned}$$

b 逆対称荷重状態に対しては、aの第3式において $X_5 = 0$ 、 $M_5, \varepsilon = 0$ とし、第4式を省略する。

これらを解いて、 X_1 影響線を求めると、図-5のようになる。図中の点線は、トラスとしての上弦材影響線であつて、これより、上弦材部材力、着目点に荷重される場合を除けば、略、トラスの場合と同様であることが知られる。

図-6は、下弦材格点モーメントの影響線を示し、点線はランガー桁の場合であるが、両者を比較すれば、トラスト・ランガー桁（実線）では、影響値が著しく小さく、また、負の部分の影響面積が減少していることが知られる。

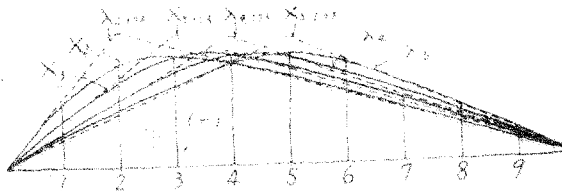


図 6 下弦材部材力影響線

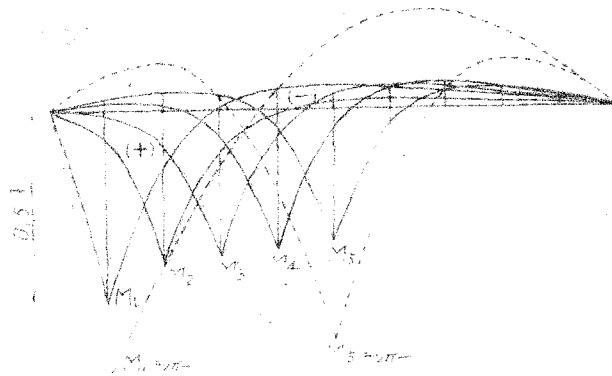


図-6 下弦材格点曲げモーメント影響線

比較ランガー桁は、図-7に示す形で、トラス・ランガー桁と同様の断面諸値をとつて計算されている。すなわち、格間数は10で、上弦格点は $f/l = 0.15$ のパラボラ上に置き（上弦格点位置は両者で異なる）

上弦材断面積： $A_m = A_{\bar{m}} \cdot \sec \theta_m$ とし $A_g / A_{\bar{m}} = 2$

垂直材断面積： A_h 一定

$A_g / A_h = 1.25$

$\mu^2 = 0.012$

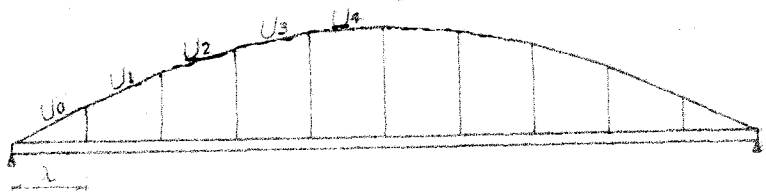


図-7 比較ランガー桁

図-8は、斜材の部材力影響線である。中央部の斜材では、かなりトラスの場合のそれに近い形のようにあるが、端部に近い $D_{2,r}$ 、 $D_{3,r}$ では、格点1において垂直吊材とした効果があらわれており、正の影響面積を大きくしている。点線は、比較のため、ランガー桁吊材の影響線を示したものである。本構造形式の特長から、斜材影響線は、ランガー桁吊材のそれとは大きく異なり、値も大であるが、死荷重に対しては、正負が相殺する結果、設計部材力は、ランガー桁吊

材と余り差がなくて済む（後述・表-3参照）ことになる。

図-9は、下弦材軸力の影響線であるが、点線で示したランガー桁水平力のそれより僅かに大きい程度となっている。

次に、この構造形式を、支間6.4m、巾員6mの一等橋に用いたとして、道路橋示方書規定の荷重を作用させた場合の下弦材格点モーメントの設計値を求めてみると図-10・aを得る。実線は、トラスド・ランガー、点線は、比較ランガーの場合を示し、トラスド・ランガーでは、正曲げモーメントが著減する上、負の曲げモーメントは、この例では作用しない。

図-10・bは、設計曲げモーメントを生ずる荷重状態における下弦材の軸力を示し、実線（トラスド・ランガー）と点線（普通ランガー）の間にほとんど差異はない。

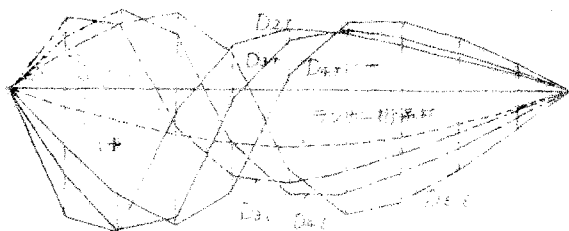


図-8 材材部材力影響線

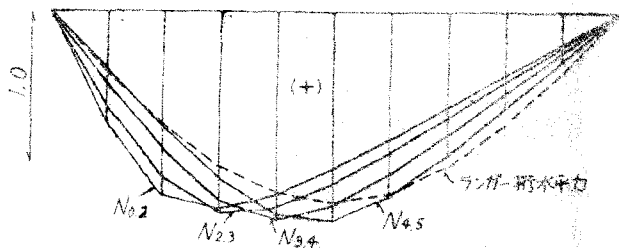
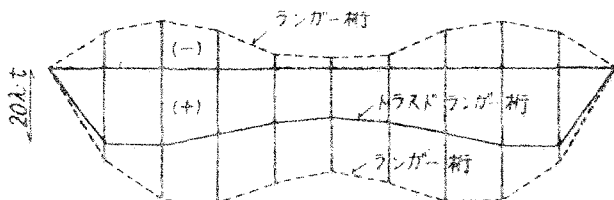
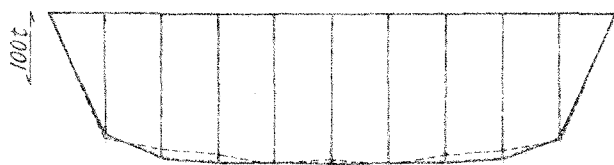


図-9 下弦材軸力影響線



a 設計曲げモーメント図 (下弦格奥)



b 上図に対応する軸力 (下弦格奥)

図-10 下弦材断面力値 (支間6.4m巾6m一帯橋荷重)

表-2は、上弦材の部材力設計値を両者について比較したもの、表-3は、全じく、垂直材、斜材の部材力を示す。斜材応力は、ランガー桁吊材応力と同等以下であるが、本数は約2倍要することになる。

表-2 上弦材部材力設計値比較

トラスド	部材	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
ランガー	応力	2 5 1.8 t	2 4 2.3	2 4 3.0	2 4 3.3	2 4 1.3	2 4 1.1
比 較	部材	H_{max}	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4
ランガー	応力	2 4 0.3 t	2 7 3.1	2 6 0.6	2 5 0.8	2 4 4.1	2 4 0.7

第-3 斜材部材力設計値

部 材	V_1	D_2, r	D_3, ℓ	D_3, r	D_4, ℓ	D_4, r	D_5, ℓ	ランガ ー吊材
応 力	2 1.7 t	1 5.0	2 7.1	2 1.1	2 5.3	2 2.6	2 5.5	2 8.8

4 む す び

前節の比較計算に用いた仮定断面諸値は、必ずしもランガー桁としての最経済設計とはいえないが、実施設計の資料に基いていることでもあり、以上の比較によつて、本構造形式の特長は十分うかがえるものと信ぜられる。すなわち、

a) 本構造形式を採れば、系はトラス作用に近づき、下弦材の曲げモーメントは著るしく減少する。また負曲げモーメントは、ほとんど生じないので、下弦材を活荷重合成桁として働かせる等の立体構造化が容易になる。

b) 上、下弦材の軸力は、着目点に荷重が作用するときは、当然大きくなるが、設計軸力としては、普通ランガー桁とほとんど差がなく、また、位置による設計部材力の相違も僅少である。

c) 径間の大小、死活荷重比に応じ、端部に近い、1～2格点では垂直吊材を用いることによつて、端部に近い位置の斜材応力を減じ、かつ、設計応力が圧縮側になる状態が起らないようにすることが出来る。また、このことは不静定次数を減ずるから、設計々算を容易にする。斜材が多少の圧縮をうける機会が生ずる場合、系を変えるかはりにプレストレスを用いる方法も考えられる。

本研究は、昭和37年度、文部省科学研究費の補助を受けており、実験的検証を行うべく計画を進めているので、その他の諸考察、動力学的性状等の検討とともに、何れ機会をみて報告したいと考えている。

参 考 文 献

- 1) 赤尾 豊浦 板東：“藤川橋の実応力測定について”，第6回日本道路会議論文集，
1961.1.11