

構造計算への行列利用

大 地 羊 三 ※

1. まえがき

弾性域での構造力学の問題は連立一次方程式を作り之を解く事に帰一する場合が多い。元数を制限しなければ大抵の構造物を解くための連立一次方程式を作る事は可能である。しかし構造が複雑になると連立一次方程式の元数は、加速度的に増大し、原理的には解式が出来ても、実用にならない事が多かつた。したがって、いかにして連立一次方程式の元数をへらすか、又作られた解式を、いかにして手ざわ良く、労力少く解くか、と云う事に研究の主眼がおかれていた。

所が電子計算機が発明され、これが実用化されるにいたつて、構造力学の分野に一大変革がもたらされた。大型の電子計算機は、百万分の数秒という短い時間で四則演算を行う能力を持っている。しかも人間とちがつて、その計算結果は正確なものである。したがって電子計算機を使用するならば、連立一次方程式の元数が多い事はあまり問題でなくなつた。しかしいかなる機械にも長所と短所があるように、電子計算機の使用にあつては、programing と云う厄介な問題があらわれた。

電子計算機は意志をもたない機械であるから、一つの計算を実施させるには、その計算順序を克明に指令してやらなければならない。しかも一つ一つの命令は電子計算機が解る符号にして順序よく配列しなければならない。この作業がprograming と云われるものである。電子計算機にかけてしまえば短時間で答が得られる問題でも、programing に一ヶ月以上を要する事もまれではない。しかも計算の誤りはその殆んどが、このprograming の際に発生するものである。したがつていかにして正確に早くprogram するかと云う事が新しい問題として発生した。このためには行列を使用すると好都合である。問題の記述およびその説明には、行列は非常に有効な手段である。しかし実際に数字を入れて計算しようとすると、人力による場合は非常に繁雑で手間がかかるものである。この点で行列は電子計算機に最も適した演算手段であると云えよう。

欧米では1950年頃から、行列による骨組構造物の解法を論じた文献が発表されている。又電子計算機の利用を主題とする論文も多数発表されているが、その大部分が行列を利用したものである。著者はさきに『行列による骨組構造物の解法』と題する論文⁽¹⁾を発表した。これは構

※ 国鉄鉄道技術研究所

造力学の出発点において行列を導入し、出来る限り一般的な骨組構造物を対象としたものであり、行列算に終始した論文とならざるを得なかつた。逆に具体的な構造物の解式を行列で表現する事から初めて、一般的な構造物の解式を誘導する方法もあり得る。前者が抽象的なものから具体的なものへと進む方法であるのに対して、後者は具体的なものから抽象的なものへと進む方法である。本文は後者の立場で、出来るだけ簡単な例題を選び、著者の方法の一端を披露したものである。

2. 梁の解式

図・1(a)の如く梁を $n+1$ 等分し、各分割点の曲げモーメントとたわみ、および各分割点の間（今後区間とよぶ事にする）のせん断力とたわみ角を考える。

まづ図・1(b)の如く第 i 分割点を取り出し分割点を取り出し、これに作用する力の釣合を考えたと次式が得られる。

$$-Q_i + Q_{i+1} = -P_i \quad \dots\dots\dots (1)$$

全分割点で上式を作り、行列の形でまとめると、図・1(b)の如くなる。これを簡単に

$$[\delta_{n+1}](Q) = -(P) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と書く事にする。但し $[\]$ は行列を表わし、 $(\)$ は列ベクトルを表わす。又サフィックス $n+1$ 等は列数を表わすものとする。

次に図・1(c)の如く第 i 区間を取り出し、力の釣合を考えると

$$\frac{1}{\lambda_i} (-M_{i-1} + M_i) = Q_i \quad \dots\dots\dots (3)$$

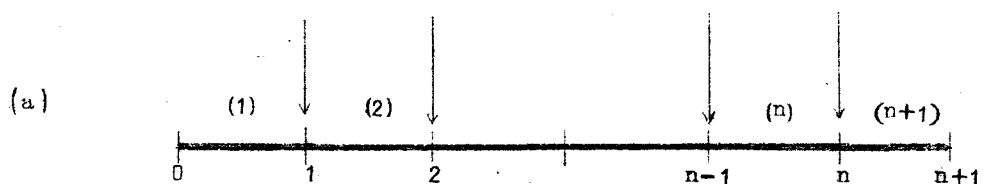
が得られる。全区間について上式を作り、行列の形でまとめると図・1(c)の如くなる。これを簡単に

$$[\lambda]^{-1} [\delta_{n+2}](M) = (Q) \quad \dots\dots\dots (4)$$

と書く事にする。

又図・1(d)の如く $i+1, i, i+1$ 点で三連モーメントの定理を立てると、荷重は分割点のみに作用すると考えているので

$$-\theta_{i+1} + \theta_i = -\frac{\lambda_{i-1}}{6EI_{i-1}} M_{i-1} - 2\left(\frac{\lambda_{i+1}}{6EI_{i+1}} + \frac{\lambda_i}{6EI_i}\right) M_i - \frac{\lambda_i}{6EI_i} M_{i+1} \quad \dots\dots\dots (5)$$



(b)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^{-1} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{i-1} \\ M_i \end{Bmatrix}$$

(d) 三連モーメント定理

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{i-1} \\ \theta_i \\ \theta_{i+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda_{i-1}^{-1}}{EJ}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{i-1}^{-1}}{EJ}\right) \left(\frac{\lambda_{i-1}^{-1}}{EJ}\right) \\ \left(\frac{\lambda_i^{-1}}{EJ}\right)^2 \left(\frac{\lambda_i^{-1}}{EJ}\right) \left(\frac{\lambda_i^{-1}}{EJ}\right) \\ \left(\frac{\lambda_{i+1}^{-1}}{EJ}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{i+1}^{-1}}{EJ}\right) \left(\frac{\lambda_{i+1}^{-1}}{EJ}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \end{Bmatrix}$$

(e)

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^{-1} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{i-1} \\ \omega_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{i-1} \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

図-1 梁の解式

が得られ、一括すると図・1(d)の如くなる。これを簡単に

$$[\delta_{n+1}] (\theta) = - [S] (M) \dots\dots\dots (6)$$

と書く事にする。

最後に図・1(e)の如く、区間1のたわみ角と分割点 $i+1$ および i のたわみとの間には、次の如き関係がある。

$$\frac{1}{\lambda_i} (-\omega_{i+1} - w_i) = \theta_i \dots\dots\dots (7)$$

これを一括すると図・1(e)の如くなり、簡単に

$$[\lambda]^{-1} [\delta_{n+2}] (w) = (\theta) \dots\dots\dots (8)$$

と書く事にする。

一般に梁の問題は、微分方程式

$$\frac{d^2 M}{dX^2} = -P \quad ; \quad \frac{d^2 w}{dX^2} = -\frac{M}{EI} \dots\dots\dots (9), (10)$$

を、適当な支点条件で解けば良いわけである。今の場合(9), (10) 式に対応するものは、(2), (4), (6), (8) 式を参照すると

$$[\delta_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\delta_{n+2}] (M) = - (P) \dots\dots\dots (11)$$

$$[\delta_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\delta_{n+2}] (w) = - [S] (M) \dots\dots\dots (12)$$

である。この (11), (12) 式を支点条件を考慮しながら変形すれば梁の解式が得られる。例えば図・1(a)において0点と $n+1$ を単純支持とすれば $M_0 = M_{n+1} = 0$; $\omega_0 = \omega_{n+1} = 0$ が支点条件となり、図・1(c)および図・1(e)の行列 $[\delta_{n+2}]$ の最初と最後の列が不用になる。したがって (11), (12) 式は

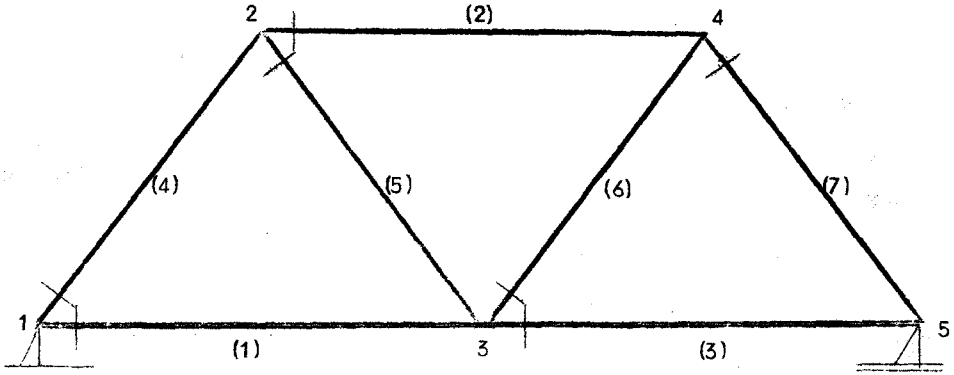
$$- [\delta_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\overline{\delta_{n+1}}] (M) = - (P) \dots\dots\dots (13)$$

$$- [\delta_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\overline{\delta_{n+1}}] (w) = - [S_g] (M) \dots\dots\dots (14)$$

となる。但し $[\overline{\quad}]$ は行と列を入れかえた転置行列である事を示す。 $[S_g]$ は図・1(d)の行列 $[S]$ から最初と最後の列を除いた行列である。又図・1(a)の1点と n 点を固定すると両端固定梁の解式

$$[\delta_{n-1}] [\lambda]^{-1} [\overline{\delta_n}] (M) = - (P) \dots\dots\dots (15)$$

$$[\overline{\delta_n}] [\lambda]^{-1} [\overline{\delta_{n-1}}] (w) = - [S_f] (M) \dots\dots\dots (16)$$



$[\delta] =$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1			1			
2		1		-1	1		
3	-1		1		-1	1	
4		-1				-1	1
5			-1				-1

図-2 トラスの例

が得られる。但し $[S_f]$ は $[S_s]$ において λ_0 および λ_{n+1} を 0 とおいたものである。
同様にして片持梁、連続梁等の解式を作る事も出来る。(3)(5)

3. トラスの解式

図2のトラスを例に取つて説明しよう。先ず接点および部材に任意に番号をつける。又部材にはa端、b端の区別をつけ、a端からb端に向う方向をその部材の方向とする。図ではa端に+印をつけてb端と区別してある。次に部材と接点の結合状態を示す $[\delta]$ 行列を定義する。これは図2に示す如きもので、言葉で説明すると、j 部材のa端 (又はb端) がi 部材と結合しているときは ij 元素を+1 (又は-1) とし、結合していないときは0となる行列である。

以上の準備をして、接点毎に釣合条件をたてる。例えば接点3の場合は次の如くなる (図3参照)。

$$-\cos\alpha_1 \cdot N_1 + \cos\alpha_3 \cdot N_3 - \cos\alpha_5 \cdot N_5 + \cos\alpha_6 \cdot N_6 + P_{x3} = 0 \cdots \cdots (17)$$

$$-\sin\alpha_1 \cdot N_1 + \sin\alpha_3 \cdot N_3 - \sin\alpha_5 \cdot N_5 + \cos\alpha_6 \cdot N_6 + P_{y3} = 0 \cdots \cdots (18)$$

全接点で釣合条件をたて、それをまとめて行列の形で書くと図・3の(f)および(g)式が得られる。これを簡単に

$$[\delta_x] [\cos\alpha] (N) = - (P_x) \cdots \cdots (19)$$

$$[\delta_y] [\sin\alpha] (N) = - (P_y) \cdots \cdots (20)$$

と書く事にする。ここに $[\delta_x]$ は図2の $[\delta]$ 行列から第1、第5行 (x方向に拘束された支点に対応する行) を取り去つた行列であり、 $[\delta_y]$ は同じ $[\delta]$ 行列から第1行 (y方向に拘束された支点に対応する行) を取り去つた行列であり、 $[\delta_y]$ は同じ $[\delta]$ 行列から第1行 (y方向に拘束された支点に対応する行) を取り去つた行列である。

一方部材の伸びと接点の変位の間には、例えば部材5の場合、図4を参照して

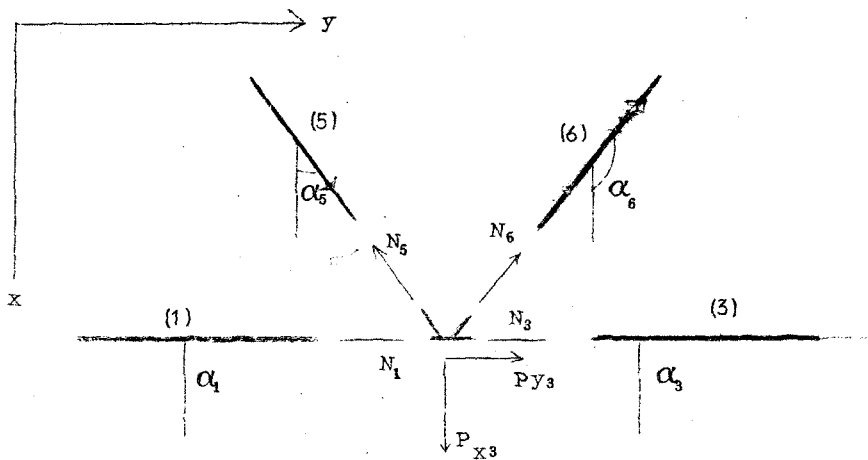
$$(\eta_{x3} - \eta_{x5}) \cos\alpha_5 + (\eta_{y2} - \eta_{y5}) \sin\alpha_5 = \frac{\epsilon_5}{EA_5} N_5 \cdots \cdots (21)$$

なる関係がある。各部材について同様の関係式を作り、行列の形でまとめると、図4の(h)式の如くなる。これを簡単に次の如く表わす。

$$[\cos\alpha] [\bar{\delta}_x] (\eta_x) + [\sin\alpha] [\bar{\delta}_y] (\eta_y) = - [\rho] (N) \cdots \cdots (22)$$

(19), (20), (22) 式よりトラスの軸力 (N)、x方向の変位 (η_x)、y方向の変位 (η_y) を求める事が出来る。例えば (19), (20) 式より

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \cdot \cos\alpha \\ \delta_y \cdot \sin\alpha \end{Bmatrix} (N) = - \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} \cdots \cdots (23)$$



$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_6 \\ \cos \alpha_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{x2} \\ P_{x3} \\ P_{x4} \end{vmatrix} \quad \text{--- (f)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 \\ -1 & & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_6 \\ \sin \alpha_7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{y2} \\ P_{y3} \\ P_{y4} \\ P_{y5} \end{vmatrix} \quad \text{--- (g)}$$

図 - 3 トラスの釣合条件

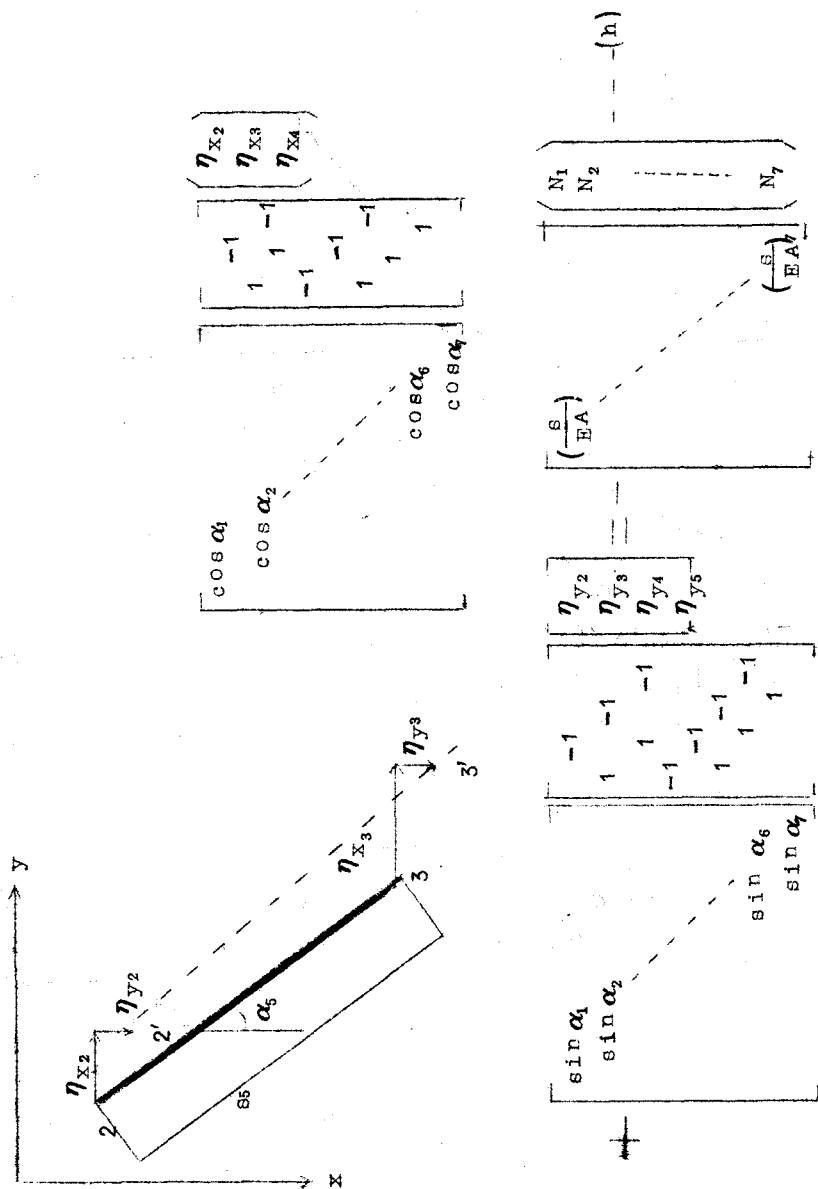


図-4 トラスの変形条件

が得られ、(22)、(23)式より(N)を消去すると

$$\begin{Bmatrix} \delta x \cdot \cos \alpha \\ \delta y \cdot \sin \alpha \end{Bmatrix} [\rho]^{-1} [\cos \alpha \cdot \delta x, \sin \alpha \cdot \delta y] \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

が得られる。同じ様な考え方でラーメン構造物、或いは面外荷重をうける格子桁、更にこれら全体を含めた立体骨組構造物等の解式⁽¹⁾⁽²⁾を求める事が出来る。

4. 平板の解式

平板の数値計算では、平板を矩形網目で細分し、その交点のたわみの間の関係式を求める方法が取られている。この方法は、行列の形で書くと解り易くなり、係数の計算等で誤りを犯す確率が少くなる。

図5の如く縦に $n+1$ 分割、横に $m+1$ 分割された平板について説明する。平板は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = p \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{M}{B} \dots\dots\dots (26)$$

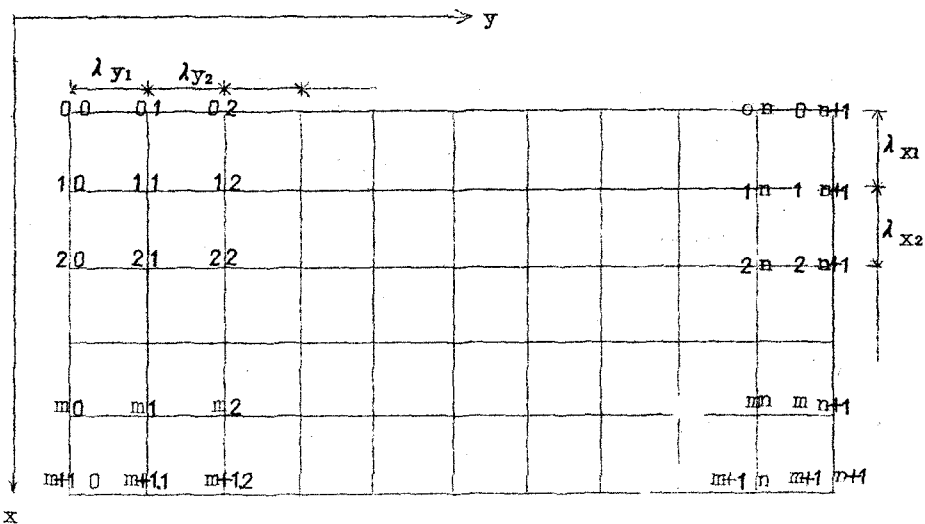
を適当な境界条件で解けばよい事は衆知の事である。第2節の説明で2次の微係数は $[\delta_{m+1}] [\lambda]^{-1} [\delta_{m+2}]$ で表わされる事が解つた。本節でもこれが利用出来る。しかしここではX方向とY方向の微分を、区別しなければならない。そのためにはMおよび ω をベクトルではなく、矩形行列で表わし、その左から掛けるか(X方向の微分)、右から掛けるか(Y方向の微分)によつて分別すればよい。結果は図5の(i)および(j)式の如くなる。これらを簡単に

$$[\delta_{m+1}] [\lambda]^{-1} [\delta_{m+2}] [M] + [M'] [\bar{\delta}_{n+2}] [\lambda]^{-1} [\bar{\delta}_{n+1}] = [P] \dots\dots (27)$$

$$[\delta_{m+1}] [\lambda]^{-1} [\delta_{m+2}] [\omega] + [\omega'] [\bar{\delta}_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\bar{\delta}_{n+1}] = \frac{1}{B} [M] \dots\dots (28)$$

と書く事にする。但し $[M']$, $[\omega']$ 等は週辺まで考慮に入れた行列で、週辺を考慮しない $[M]$, $[\omega]$ 等とは異なるものである。境界条件を考慮して(27)、(28)式を変形したものが平板の解式となる。⁽³⁾ ここでは一般的な変形の仕方についてはふれない。ただ週辺単純支持の場合について述べると、週辺で $M_{ik}=0$, $\omega_{ik}=0$ となるので(27)、(28)式は次の如く変形される。

$$[\delta_{m+1}] [\lambda]^{-1} [\bar{\delta}_{m+1}] [M] [\delta_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\bar{\delta}_{n+1}] = -[P] \dots\dots\dots (29)$$



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{x1}^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{x, m+1}^{-1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0, n+1} \\ & \ddots & & \\ & & M_{m+1, 0} & \dots & M_{m+1, n+1} \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0, n+1} \\ M_{10} & & & \\ \vdots & & & \\ M_{m+1, 0} & \dots & \dots & M_{m+1, n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{y1}^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{y, n+1}^{-1} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & & \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1, n} \\ P_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ P_{m1} & \dots & \dots & P_{m, n} \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

上式で行列 $[M']$, $[P]$ を $[\omega'] [M]$ に変えたもの ----- (j)

図 - 5 平坂の解式

$$[\delta_{m+1}] [\lambda]^{-1} [\bar{\delta}_{m+1}] [W] + [W] [\delta_{n+1}] [\lambda]^{-1} [\bar{\delta}_{n+1}] = -\frac{1}{B} [M] \dots (30)$$

(29)、(30)式ではまだ不便である。これらを普通の連立一次方程式にするためには、直積行列を用いて、次の如く表わすとよい。(1)

$$\{[\delta_{m+1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_{m+1}] * [E_{n+1}] + [E_{m+1}] * [\delta_{n+1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n+1}]\} (P) = (P) \dots (31)$$

$$\{[\delta_{m+1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_{m+1}] * [E_{n+1}] + [E_{m+1}] * [\delta_{n+1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n+1}]\} (W) = -\frac{1}{B} [M] \dots (32)$$

但し $[E_{n+1}]$ 、 $[E_{m+1}]$ 等は夫々に $n+1$ 元、 $m+1$ 元の単位行列であり、 $*$ は直積を表わす記号である。又 (W) 、 (M) 、 (P) 等は矩形行列 $[W]$ 、 $[M]$ 、 $[P]$ 等の各列を第1列から順次縦にならべた列ベクトルである。

以上矩形平板について述べたが、斜交座標を用いれば斜版の解式を作る事が出来る。又直積の考え方は格子桁、高層ラーメン等にも利用出来る。

5. 解式の解法

前節までに誘導した解式は、いずれも連立一次方程式である。したがって左辺の係数行列の逆行を求めれば解が得られるわけであるが、静定構造物と不静定構造物とで取扱い方が異なるので、梁の場合を例に取つて説明する。

単純支持梁の解式は(13)および(14)である。この場合(13)式の左辺の係数行列は正值対係行列であり、したがってその逆行列が存在する。故に(13)式の解は

$$(M) = [\delta_{n+1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n+1}]^{-1} (P) \dots (33)$$

である。これに対して両端固定梁の解式(15)、(16)の内(15)式の左辺の係数行列は矩形行列であるため、直接逆行列を求める事が出来ない。そこでまづ(15)、(16)式より(M)を消去し

$$[\delta_{n-1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_n] [S_F]^{-1} [\bar{\delta}_n \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n-1}] (W) = (P) \dots (34)$$

を作る。この式の左辺の係数行列は正值対係行列であるから、(34)および(16)式より

$$(W) = [\delta_{n-1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_n S_F^{-1} \bar{\delta}_n \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n-1}]^{-1} (P) \dots (35)$$

$$(M) = -[S_F]^{-1} [\bar{\delta}_n \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n-1}] [\delta_{n-1} \lambda^{-1} \bar{\delta}_n S_F^{-1} \bar{\delta}_n \lambda^{-1} \bar{\delta}_{n-1}]^{-1} (P) \dots (36)$$

が得られる。

尚(33)、(35)、(36)式の右辺の(P)の前にある行列は、その各行が影響線を表わしている。この事は(P)を移動単位荷重にして考えると直ちに判明する。

一般的な構造物の場合についても同様の事が云われるし、従来の解法の説明も出来る。¹⁾又振動問題其他へ拡張する事も出来る。しかしこれらについての説明は消略する。

6. 結 論

以上各種構造物の解式の誘導方法およびその解法について説明を行つた。理解し易いように出来るだけ簡単な例で説明を行つたが、各節のおわりでふれたように、同じ論法で更に複雑な構造物の解式を誘導する事が出来る。更にまえがきでもふれた様に、構造力学の出発点から行列を利用すると、よりエレガントな解式の誘導が出来る。

著者は上記の方法により、連続桁、連続トラス、ローゼ桁⁽⁶⁾格子桁等の影響線を電子計算機で求めるためのプログラムを作成した。使用した電機計算機が、小型で旧式なため、容量不足、計算時間の増加等に苦しんだが、近く大型の電子計算機が稼動するので、斜版、斜格子桁、高層ラーメン、立体ラーメン等のプログラムを計画している。

電子計算機は構造力学の問題を解くためだけに利用されるべきものではなく、断面の決定、断面の強度計算、所要材料計算、経済的なディメンジョンの決定等その利用範囲は広い。今後はこの方向の研究にも着手したいと思つている。

参 考 文 献

- (1) 大地“行列による骨組構造物の解法”鉄研報告No.260(1961)
- (2) 大地“立体骨組構造物の解法”土木学会論文集第69号(1960)
- (3) 大地“行列による梁および平板の解法”第14回土木学会年次学術講演会(1959)
- (4) 大地“格子桁の行列論的解釈”第10回応力連合講演会(1960)
- (5) 大地“たわみの影響線行列”鉄研資料15-4(1958)
- (6) 大地“電子計算機とその応用(7)”土木学会誌46-2(1961)