

オクタ・プラツテの応力解析と実験

加 藤 勉※

高 梨 晃 一※※

1. 序

集会場、屋内運動施設、工場等の大スパン架構には、多種多様の立体トラスを利用できるがそれ等は、それぞれ、部材の材質および断面、部材の組方、接合法に特色を持っている。オクタ・プラツテとは、正八面体を単位として部材構成された立体トラスである。（金属結晶の面心立方格子と同様の組方である）

立体トラスは、通常部材数が非常に多く、立体的に組立てられたトラスとして正解を求めることは、煩雑である。このため、ある程度以上の拵がりを持つた立体トラスの応力解析は、版の理論の応用が実際設計を行うには有用であると考えられる。この考えのもとに、立体トラスの一種であるオクタ・プラツテについて略算法を導き、さらに模型試験体によつて実験を行い計算結果と比較検討した。なお、試験体は、曲率のないオクタ・プラツテであるので以下の計算は、曲率のないオクタ・プラツテに限定するが、曲率のある場合や、部材の組方が異なる立体トラスについても、この略算法を拡張して計算を行なうことは可能である。

2. 部材応力の算定

版の理論を応用する計算方法として、ここでは、二つの方法を試みた。一つは、立体トラスを平面トラスの集合と考えて、その変形を微分方程式で表現し、平面板の解析と同様にして、その解を求める。他の一つは、立体トラスを弾性的に等価ある厚さを持つた版に置換し、この仮想の平面板の種々な荷重条件、支持条件における応力分布を求めた後、その応力をトラスの部材応力に換算するものである。

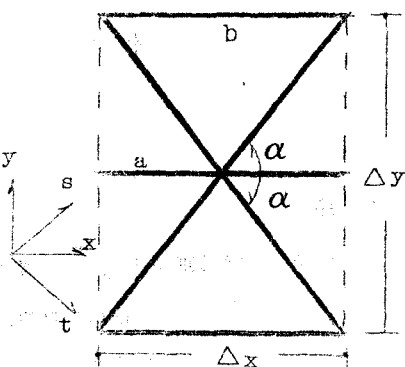
立体トラスは、単位となるトラスの反復によつて構成される場合が多い。しかも、大スパンを覆うのが普通であるから、その単位トラスの占める空間は、全体に比べてかなり小となる。先の二つの計算方法は、この考えをもとにしてできたものである。次に、その概略を述べる。

(1) 平面トラスの集合と考える解法

※ 東京大学 工学部助教授

※※ 東京大学 工学部大学院

一般に立体トラスの上下面を構成する部材が三角形を単位として組まれているとき、ある節点を中心として1図のような単位要素を取り出す。座標軸および寸法は、図中に示した通りである。このとき、部材aは、この材の全断面、部材bは、隣接する単位要素を等分されるものとして部材の1/2の断面を有するものとする。基本式を導くにあたって次の仮定を設ける。



1 図

(i) 1 図に示した単位要素は、全体に比べて微

小であり、また、立体トラスを一枚の連続した平面板のごとく考える。

(ii) 上の仮定にしたがい、平面板の解析にあたって適用される仮定を全て容認する。

(i) 直線的に連続している

部材、すなわち、平面トラスにおいては、変形および応力が連続的に変化しているものとする。

(ii) 平面トラスのねじり剛

性、面外の曲げ剛性は考えない。

以上の仮定に基いて、平面

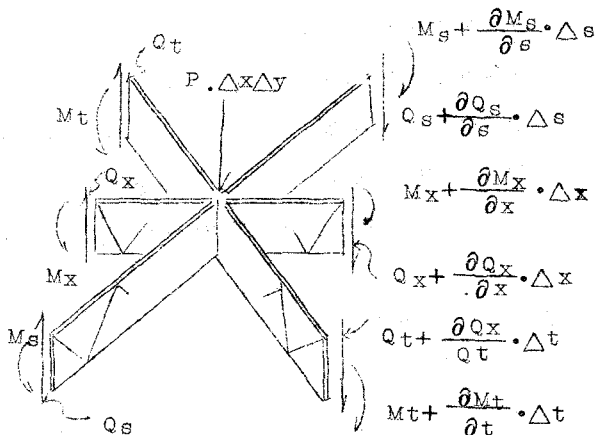
トラスに働く曲げモーメン

ト、せん断力を2図に示す

ように考える。単位面積あ

たりの面に垂直に作用する荷重をPとすると、荷重方向の力のつり合いから(1)式を得る。

(式中a, bは、それぞれ1図のa, bに対応する)



2 図

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_s}{\partial s} \cdot \Delta s + \frac{\partial Q_{ax}}{\partial x} \cdot \Delta x + 2 \frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial Q_t}{\partial t} \cdot \Delta t \\ & + P \cdot \Delta x \Delta y = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

各平面トラスの曲げモーメントとせん断力の関係は(1)の仮定に基いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_s}{\partial s} \cdot \Delta s - Q_s \cdot \Delta s &= 0 \\ \frac{\partial M_{ux}}{\partial x} \cdot \Delta x - Q_{ux} \cdot \Delta x &= 0 \\ \frac{\partial M_{bx}}{\partial x} \cdot \Delta x - Q_{bx} \cdot \Delta x &= 0 \\ \frac{\partial M_t}{\partial t} \cdot \Delta t - Q_t \cdot \Delta t &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

さらに曲げモーメントとたわみ w の関係は

$$\left. \begin{aligned} M_s &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ M_{ux} &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_{bx} &= -\frac{D}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_t &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 D は、平面トラスの面内曲げ剛性

(2)、(3) 式を(1) 式に代入し、整理すること

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \cdot \Delta s + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \Delta x + \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \cdot \Delta t = \frac{P}{D} \Delta x \cdot \Delta y \dots\dots\dots (4)$$

さらに座標軸の関係から

$$\frac{\partial^4}{\partial s^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right)^2 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos^2 \alpha - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right)^2 \dots\dots\dots (6)$$

$$\Delta s = \frac{\Delta x}{\cos \alpha}, \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \dots\dots\dots (7)$$

(5), (6), (7)式を(4)式に代入すると x, y 軸に関する微分方程式を得る。 $\alpha = 60^\circ$ とすれば
(4)式は

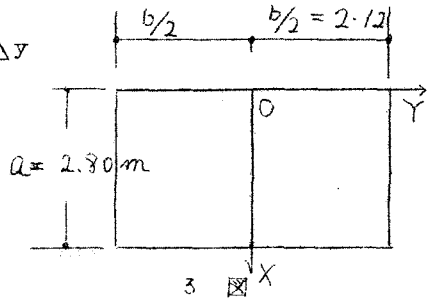
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D_e} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $D_e = 9D/4 \cdot \Delta y$

となつて、等方性平板の基本式と同形である。

○等分布荷重、周辺単純支持の場合 (3 図参照)

(8)式の解は、Fourier 級数の第一項のみをとつて、



$$w = \frac{Pa^4}{D_e} \left(\frac{4}{\pi^5} + A_1 \cosh \alpha_1 \frac{2y}{b} + B_1 \alpha_1 \frac{2y}{b} \sinh \alpha_1 \frac{2y}{b} \right) X \sin \frac{\pi x}{a} \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{ただし、} \alpha_1 = \frac{\pi b}{2a}$$

$$A_1 = \frac{2(\alpha_1 \tanh \alpha_1 + 2)}{\pi^5 \cosh \alpha_1}$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi^5 \cosh \alpha_1}$$

(a)式より $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ を求め、さらに $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ を計算すれば、

M_s , M_t , M_x を得る。

○上面の $1/2$ のみ等分布荷重、周辺単純支持の場合

(8)式の解は

$$w = \sum_{m=1,2,\dots} \sum_{n=1,2,\dots} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \dots\dots\dots (10)$$

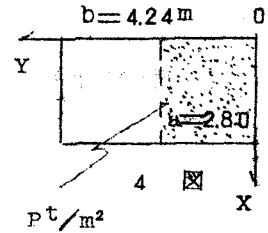
ただし

$$c_{mn} = \frac{a_{mn}}{D_e \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$u_{mn} = \frac{16p}{mn\pi^2} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{4}$$

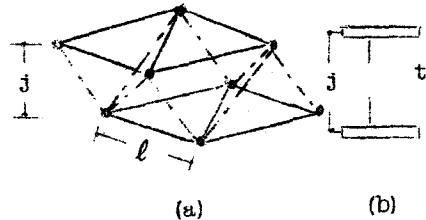
(10) 式より $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ を求め、さらに

$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ を計算すれば、 M_s , M_t , M_x を得る。



(2) 弾性的等価版に置換する解法

弾性的等価版に置換する解法は、よく立体トラスの設計に利用されている。オクタ・ブラツテより5図(a)に示すような単位トラスをとり出し、この単位トラスの上下面を弾性的に等価な2枚の版と考



5 図

える。5図(b)に示すように版の厚さを t 、ヤング率 E 、せん断弾性係数 G とする。モーメントとたわみの関係は、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{E t j^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -\frac{E t j^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -(1-\nu) \frac{G t j^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

さらに、オクタ・ブラツテを1枚の平面板と考え、曲げ剛性 D_0 、版厚 t_0 、ヤング率 E_0 とすると(11)式より

$$D_0 = \frac{E t j^2}{2(1-\nu^2)}, \quad E_0 t_0 = 2 E t \quad \dots\dots\dots (12)$$

特に、上下面のトラスが正三角形を単位として構成されている場合は、

$$E_0 = 4 E_s A_s / 3 \ell j, \quad t_0 = \sqrt{3} j \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし j : 上下面弦材の中心間距離
 ℓ : 上下面弦材の一辺の長さ
 A_s : 上下面弦材の断面積

E_s : 弦材のヤング率

等価版の基本式は、

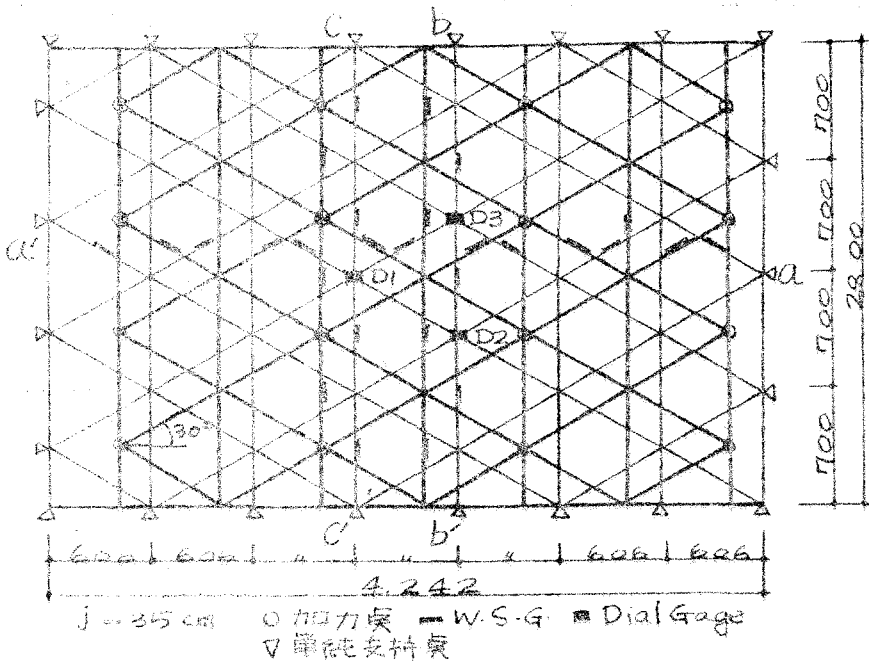
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D_0} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし P : 単位面積あたりの荷重

(14) 式を種々の荷重条件、支持条件のもとで解き、その結果よりトラス部材応力を算出する。

3. 実 験

前述の計算方法の妥当性を調べるため、模型試験体による実験を行つたので、その方法および結果について述べる。



6 図

- (1) 試験体 ; 試験体は 6 図に示すように、 $4.242 \text{ m} \times 2.800 \text{ m}$ の長方形平面、上下面の中心間距離 35 cm の規模のものである。上下面の正三角形の一辺の長さは 70 cm であるから、正八面体を単位とするものより扁平な形である。部材は鋼管で、その断面積定数

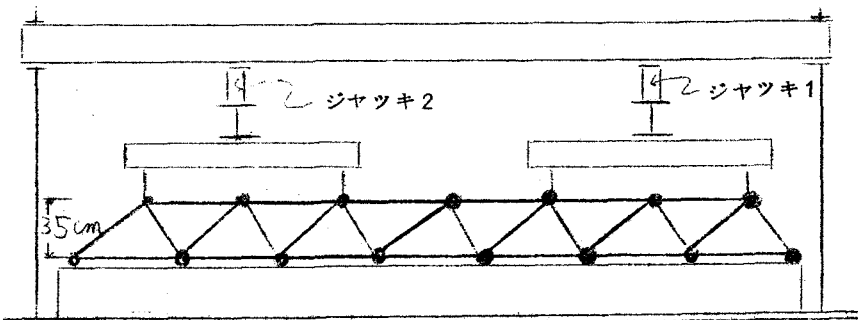
1 表

部 材	外 径 [mm]	内 径 [mm]	厚 [mm]	I [cm ⁴]	Z [cm ³]	A [cm ²]	抗張力 [kg/mm ²]
I	21.6	17.8	1.9	0.573	0.531	1.175	62.9
II	27.2	22.0	2.6	1.51	1.10	2.01	47.5
III	34.1	28.3	2.9	3.47	2.03	2.84	66.6

および物理的性質は1表に示す。表中、I材は、支点部分を除く充腹材に、II材は支点部分を除く上下面弦材に、III材は補強のため支点部分に使用したものである。接合には80mmφ×6mmの鋼球に部材を溶接する方法を採用している。この立体トラスでは、最大9本の材が一点に会する比較的部材数の多いものであるからこの接合法は適当と思われる。接合部強度の実験は特に行っていない。

- (2) 実験の方法；試験体を試験台の上に設置し、2台のジャッキで加力した。荷重は、井桁に組んだ加力用ビームより16ヶ所に分散される。荷重測定は、ジャッキと加力ビームの間に挿入したロードセルによつた。実験は、載荷方法によつて実験I、実験IIに分ける。（7図および写真参照）

実験I：試験体の周辺を単純支持し、全面等分布荷重を加えた。各荷重段階において、部材の軸方向歪をパイプ部材の上下に貼布したW・S・Gにより測定し、鉛直方向変位をダイヤル・ゲージにより測定した。加力点および測定箇所は6図に示す。



7 図

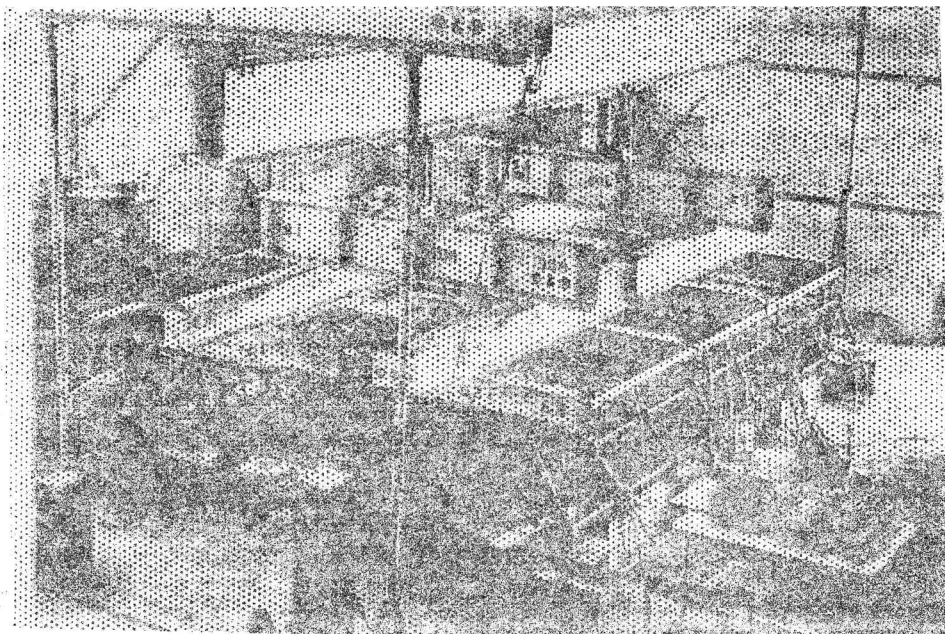


写真 17

実験Ⅱ：周辺の実験Ⅰと同様に支持し、上面の半分にのみ等分布荷重を加えた。（7 図中、ジャッキ 1 のみで加力した。）各荷重段階において、部材軸方向歪および鉛直方向変位測定を行った。

- (3) 実験結果について、試験体に加えた最高荷重は、実験Ⅰで、 $W=23.5$ t、実験Ⅱで $W=13.9$ t である。試験体のゆがみ、支店および加力点のなじみの悪さ等によつて初期の荷重段階において多少実験値に乱れが見られたが、部材の軸方向力と荷重の関係、鉛直方向変位と荷重の関係は、ほぼ直線的に変化している。この結果からみて、実験を行った荷重の範囲内では、部材は弾性範囲内にあると考えられる。また、接合部に異状を認められなかった。なお、実験値および計算値は、全て、全荷重の増分 ΔW 、軸方向力の増分 ΔN 、変位の増分 $\Delta \delta$ としたときの $\Delta N / \Delta W$ 、 $\Delta \delta / \Delta W$ で整理した。

4. 理論値の計算結果と実験値との比較

2. 部材応力の算定 で記した公式を使用して、試験体について計算を行う。

(1) 平面トラスの集合と考える解法

オクタ・ブラツテでは、6 図に示すように各平面トラスは、鉛直面と 30° の角度をなしているの、面内曲げ剛性の鉛直方向成分 D を考える。一つの平面トラスを取り出し、荷重時におけるたわみより計算すると

$$D = 980 E_s [K_g \cdot cm^2] \dots\dots\dots (15)$$

ただし E_s : 鋼管のヤング率

(15) 式を (8) 式に代入し、 $\Delta y = 70\sqrt{3} \text{ cm}$ とすると

$$D_e = 18.2 E_s [K_g \cdot cm] \dots\dots\dots (16)$$

これより、試験体の各点の鉛直方向変位を計算する。結果は 2 表に示す。さらに(3)式より各点の曲げモーメントを求め、次に部材応力を知る。8 図、9 図には、6 図の試験体伏図に記した測定部材について計算した結果を実験値と共にグラフで示した。

(2) 弾性的等価版に置換する解法

(12) 式、(13) 式に弦材の断面積、中心間距離、トラス一辺の長さを代入すると

$$D_0 = 22.9 E_s [K_g \cdot cm] \dots\dots\dots (17)$$

(17) 式を (14) 式に代入して、(14) 式を解けば、部材応力を求めることが出来る。結果は、(1)と同様にして 8 図、9 図に実験値と共に記した。

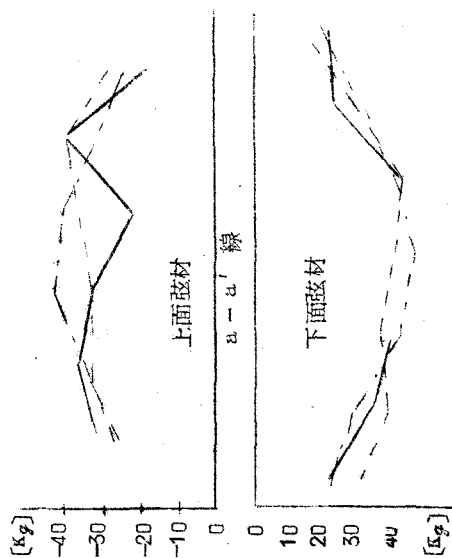
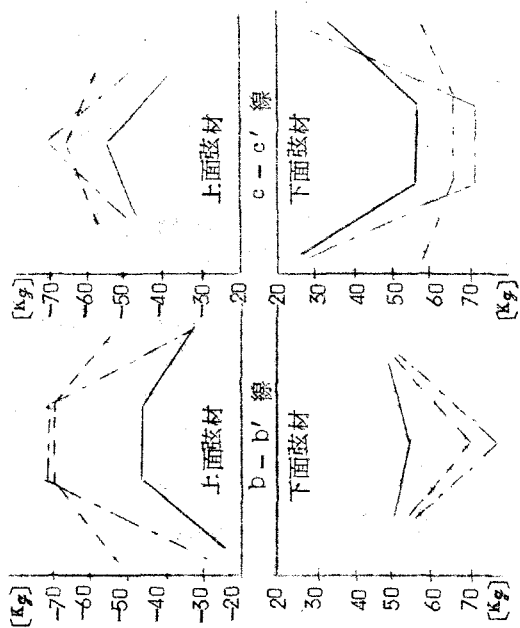
(3) 実験との比較

二つの解法による部材応力の計算値と実験値は、8 図、9 図に併記した。また、 $D_e = 18.2 E_s$ として(8)式より計算した鉛直方向のたわみと実験値は 2 表にまとめた。

以上の結果から

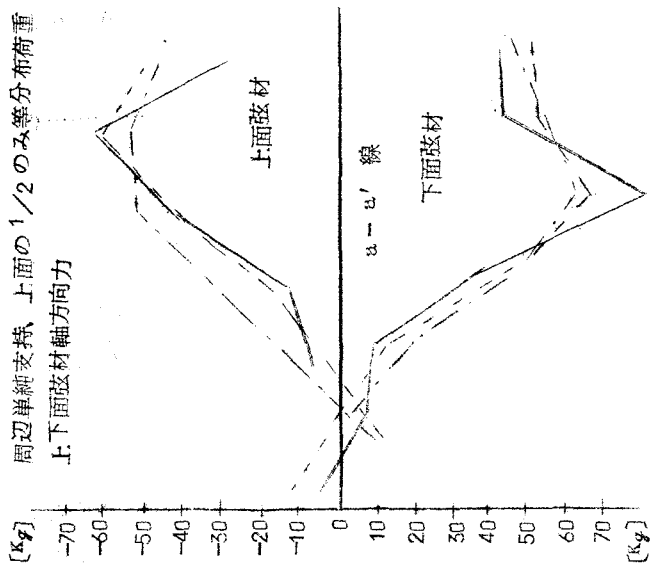
- (イ) 実験値と以上二つの計算結果とは必ずしも一致しないが、類似の曲線を得、本試験体程度の大きさを持つたオクタ・ブラツテは、版と同様の性質を持っている。
- (ロ) 部材応力の算定に関しては、二つの解法のどちらによつても、ほぼ似た計算結果を得る。
- (ハ) 一部を除いて、部材応力の計算値は、実験値を上まわっている。したがつて、2.の解法は、設計式としては妥当と考えられる。
- (ニ) 鉛直方向変位の計算は、解法(1)によつたものであり実験値に似た計算結果を得る。解法(2)では、実験値との相異が大きすぎる。これは、 D_e の計算において、平面トラスのせん断変形による剛性の低下を考慮したが、より妥当であつたと考えられる。

周辺単純支持、全面等分布荷重、上面弦材軸方向力



8 図

実験値
平面トラスの
集合
置換法



9 図

2 表

実 験 I			実 験 II		
ダイヤル・ゲージ	理論値 [cm]	実験値 [cm]	ダイヤル・ゲージ	理論値 [cm]	実験値 [cm]
D ₁	$10.4 \times 10^{-3} W$	$12.0 \times 10^{-3} W$	D ₁	$0.935 \times 10^{-2} W$	$1.06 \times 10^{-2} W$
D ₂ , D ₃	$9.64 \times 10^{-3} W$	$12.3 \times 10^{-3} W$	D ₁ , D ₃	$1.11 \times 10^{-2} W$	$1.50 \times 10^{-2} W$

〔参考文献〕

1. Theory of plates and Shells Timoshenko 著
2. 平面構造論 坪井善勝著
3. オクタ・ブラツテの応力解析と実験 加藤、高梨
日本建築学会論文報告集 73号
4. Oktaplatte in Rohr-Konstruktion J. Fröhlich, Der
Stahlbau 9. 1959
5. Kugelförmigen Knoten mit sechs Angeschlossenem
Zugstäben aus Rohrprofilen K. Klöppel, W. Guder, Der
Stahlbau 2. 1961

