鉄骨構造に於ける応力と変形について

鹿島建設技術研究所　三　井　哲　夫

1. 荷重時慣性硬化による曲げモーメント及撓みについての経験的研究

鉄骨構造は材料の性質上応力を受けると変形を起す。これは材料のヤング係数による固有な性質であり、構造体の変形は梁の撓みと柱の座屈に依るが一般に鋼構造に於いては接合部は半剛接と考へられて居る。

此等の部材に受ける応力により部材に起る曲げモーメント、断P、軸力によつて断面が決定されるのであるが各部材は応力により非常にびんかんに変形するので其の応力の伝達も複雑となる。

柱の応力性態により梁の生ずる曲げモーメントは各部材の剛比と同様に其の伝達に影響を及ぼず。垂直荷重により柱は慣性硬化を起すと考へられる。又水平荷重によつては柱が垂直応力を受けて居ると其の垂直応力は構造体が変形するために柱の中心軸に対して偏心となるから水平荷重時に於いては水平荷重によつて起る曲げモーメントの外に更に偏心による曲げモーメントを加へる心要が起る。此等は鉄骨構造に鉄筋コンクリート床を併用した場合に鉄筋コンクリートの床にクラツクを生ずる場合があることによつて説明される。では此等の欠点を何によつて制禦すべきか、多少は技術者の判断に待つものがあるが、此の撓はさけられない。勿論接合部の方法によつても異るがガゼツトプレートを厚くして撓みを少くする様に考へられた接合による構造に於いても部材に於ける撓みは著しいものがある。

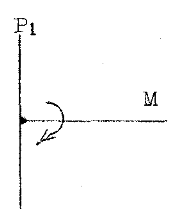
2. 構造物に於ける応力慣性硬化と曲げモーメントの伝達理論

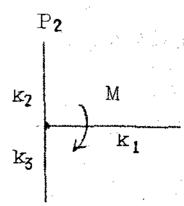
鉛直荷重による曲げモーメントの伝達については一般の部材の剛比によつて分割されるのでありますが、柱に伝達される曲げモーメントは多層建築構造に於いては柱にかゝる直圧による応力状態が各階に於いて異るのであります。此の部材の応力伝達はエネルギーの調和によつて釣合うため定量的に梁の所有するエネルギーは接合部に於いて柱に分割され柱の所有するエネルギーは各部材に到達してのエネルギーの伝達に於いて梁に位置エネルギーを生ずる。此の位置エネルギーが撓みである。柱の直圧が増加するので柱に慣性硬化が大となるに従つて梁に生ずる位置のエネルギーが大となる。これは柱の所有するエネルギーの分布密度が大であるために梁の所有する分布密度の小なエネルギーが受けつけにくゝなるので梁に生ずる位置のエネルギーが大となり、柱に慣性硬化が生ずることになる。

k：剛　比

P：柱に加わる直圧

M：梁の曲げモーメント荷重項





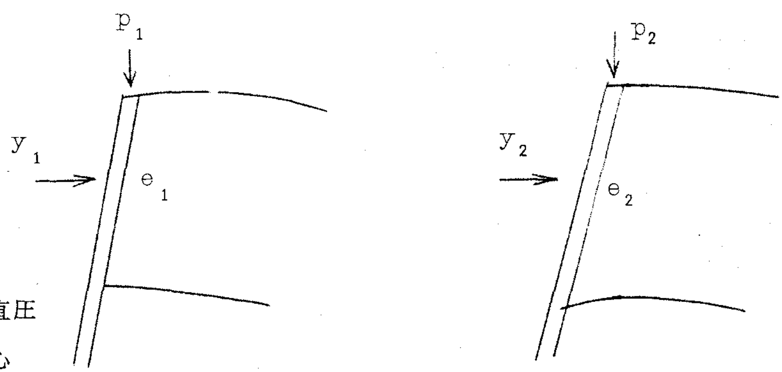
$$\mu = \frac{k_3}{k_1 + k_2} \times \frac{P_2}{P_1} XK$$

$$\mu = \frac{k_3}{k_1 + k_2} \times \frac{p_2}{p_1} \times k$$

K：慣性硬化係数

曲げモーメントの伝達は p_1 p_2 に反比例するものと考へられる。即ち柱はPが大きくなるにつれて其の曲げモーメントを受付けにくゝなるのでありまして、**これを柱の慣性硬化と名づけられるべきものと考へ**られる。この伝達過程で梁に撓みを生ずる。この結果梁は単純梁に近づくこれは梁の曲げモーメントによる柱の影響変位が少ないからである。

水平荷重による曲けモーメントは一般に構造体及積載される荷重に比例するが、水平力が加わつた慣性硬化状態では水平力による変形で水平方向の動荷重時に於いては柱に加わる垂直応力は柱軸上に対して偏心となる。この偏心は構造分の剪断変位による。そしてこれは構造物の非線形振動として解析されるものである。



$P_1 =$ 柱の直圧

$e_2 =$ 偏　心

$y_1 =$ 反曲点の位置

水平剪断力はPCによつて表わされCは震度である。

$$M_1 = P_1 \times K \times y_1 + P_1 e_1 \qquad M_2 = P_2 \times K \times y_2 + P_2 e_2$$

として柱に起る曲げモーメントが計算され得る

この場合夫々の変位が柱の軸に対する偏心距離に当る。

$$e_1 = S_1 \qquad e_2 = S_2$$

一般に構造物の変位は材料の応力度領域に関係する。

塑性設計に於ける撓みや局部的不安定、塑性、疲労の調査よりその弾性限界の判定が成さるべきである。

現行の規準では鉄骨の骨組は弾性理論で解析し、設計されて居るので弾性限界に対する荷重係数 λe は静定な構造物でも不静定次数の高い構造物でも一様になつている。ところが不静定構造物では弾性限を起えても載荷を続けることが出来るので崩壊に対する荷重係数 λe は普通単純な構造物に較べてかなり大きくなつている。

崩壊に対する強さが設計の重要な判定規準になる場合にはこのように崩壊荷重係数が不揃になるのは不合理であるばかりでなく鋼材の効果的使用をさまたげる結果になる。この様な不合理をなくす

ために崩壊荷重の評価をさまたげる結果になる。このいつた不合理をなくすために崩壊荷重の評価に剛塑性弾塑性解析の方式が必要になる。

前者の剛塑性方式では構造物の塑性ヒンヂが出き運動を起こす状態になつて崩壊するときの荷重を求める。即ちこの方法では変形は無視される。従つて挫屈や破断による変形限変を無視している。変形を計算に入れる弾塑性方式は非常に複雑である。

mechanism－collapas factor λ_{mc}を計算する塑性方式を用いることによつて静定不静定にかゝわらずλ_{mc} を同一にすることが出来る。

このλ_{mc} を一様にすることは勿論単純荷重によるmechanism collapaseが設計の支配的限界になるときにのみ正しく合理的である。内にmechanism collapaseの起る前に疲労や変形超過や挫屈が起るときには塑性方式は使えない。

しかしながら崩壊荷重係数の一致は弾性限界荷重係数の一致を失わせる。塑性設計された不静定構造物では静定なものに較べてこの係数は半分位である。こういつた事柄やλ_eの価は果して無視出来るであろうか、塑性設計に於いて弾性限度の重要性を評価すべさである。

λ_eの大小によつて弾性限界が上下するが、例えλ_eが小さく弾性が許容荷重以下になり部分的に永久歪が起るようなことがあつても、そのこと自体は建物の使用に少しも支障を来たさないのみならず、高次の不静定構造物にあつてもそのこと自体は建物の使用に少しも加工や組立建方、気温定着の時に初期応力が生じて居り、このため実際には小さな荷重がかゝつただけでも永久歪が生ずることはさけられない。しかしながら次の同じ荷重がかゝつたときにそれ以上の永久歪が生ずることはないのである。このことは組合せ荷重や移動荷重ではもつとも複雑であるが其の効果はあまり起らない。

結論としてλ_eが低い値いなど比較的大きい塑性変形成分や永久歪が生ずるが永久歪があつても壊れないし、又λ_eに対して特別の最小値を指定することも必ずしも極端な撓みを起すとは限らない。

Plastic lustability ラーメンの鉄骨部材に撓み限界があるので塑性解析で得られた終局荷重にまで達しないようになる。先にのべた如く塑性設計された構造物に対してλ_eは最初に生じたPlastic hiugeの回転量を示めす指標になる。λ_eが高いと全hiugeはほとんど同時に形成され、どれも少ししか回転を要求されない。これに対し、λ_eが低いとPlastic hingeは早く生じ、大なるる回転を要求される。

軸方向力を受ける多層ラーメンの振動、

柱の振動曲線方程式は軸圧力Pとすると

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dX^2}-\delta y=0$$

柱の質量を無視出来る場合には

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}+P\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

此の撓度曲線方程式は

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$dM = EI\frac{d^3y}{dx^3}dx$$

しかるに

$$dM = u\,dx + F(x)\,dx - P\,dy$$

故に

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = u + F(x) - P\frac{dy}{dx}$$

$$R = \frac{dy}{dx} \qquad \theta_A + \theta_B = 2\theta$$

$$\frac{EF_1}{e_1{}^2}(\alpha_1\ell_1)^2\left\{-\sigma_1\ell_1\sin\sigma_1\ell_1)\frac{dy}{dx} + 2(1-\cos\alpha_1\ell_1)\theta\right\} = \Delta_1\nu$$

またF(x)とθとのID には

$$F(x) = \frac{6EkB\theta}{\ell_1}$$

F(x)及θを消去すると

$$\frac{KB}{KC} = m \qquad \frac{I_1}{\ell_1} = kc$$

$$\frac{(\alpha_1\ell_1)^2(1-\cos\alpha_1\ell_1)}{(\alpha_1\ell_1)^2(1-\cos\alpha_1\ell_1)+3m\triangle_1} = \xi$$

$$\frac{3m(\alpha_1\ell_1)^3\sin\alpha_1\ell_1-(\alpha_1\ell_1)^4(1-\cos\alpha_1\ell_1)}{(\alpha_1\ell_1)^2(1-\cos\sigma_1\ell_1)+3m\triangle_1} = \eta$$

$$Ek_c\ell_1\xi = (EI)$$

$$Ekc\eta/\ell_1 = (z)$$

$$(EI)\frac{d^3y}{dx^4} - (z)\frac{dy}{dx} = \nu$$

$$(EI)\frac{d^4y}{dx^4} - (z)\frac{d^2y}{dx^2} = u$$

多層ラーメンの挫屈

$$\frac{(z)\ell^2}{(EI)} = G \qquad \frac{r\ell^4}{(EI)} = H^2$$

と置けば

$$G=\frac{(Z)\ell^2}{(EI)}=\frac{\eta}{\xi}\left(\frac{\ell}{\ell_1}\right)^2=\frac{\eta}{\xi}M^2$$

$$\therefore\frac{\eta}{\xi}=\frac{G}{n^2}$$

$$\frac{\eta}{\xi}=\frac{3m(\alpha_1\ell_1)\sin\alpha_1\ell_1-(\alpha_1\ell_1)^2(1-\cos\alpha_1\ell_1)}{1-\cos\alpha_1\ell_1}$$

挫屈荷重Pとすると

$$P=(\sigma_1\ell_1)^2\frac{EI}{\ell_1^2}$$

非線形振動は

$$x+\rho^2x-\gamma x^3=a\sin mt$$

近似解は

$$x=A\sin mt+\frac{A^3\gamma}{36m^2}\sin 3mt$$

地盤振動

地震波

地震の波動は実際には複雑なものであろうが地中を伴はる波としてはまずこの第一の縦波と第二の横波の両種が主と考へられている。震源より遠く離れたところを走る平面波としてはその伝播速度は

$$V_1=\sqrt{\frac{(1-6)}{(1+6)(1-26)}\cdot\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{2(1-6)}{(1-26)}\frac{n}{\rho}}$$

$$V_2=\sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)}\cdot\frac{E}{P}}=\frac{n}{P}$$

$V_1>V_2$

σ ： 線密度

ρ ： 地盤度度

n ： 剛性率

縦波は地表に於いて振動を発散するが横波は無限に拡つた弾性体を伝はり、其の微小部分は連続せる糸の振動と考へられる。地盤が弾性体であるかぎり、振動を受ける糸の単弦振動としてd' Alembertの原理によると、

$$F\frac{\delta^2\zeta}{dx^2}=P\frac{\delta^2\zeta}{dt^2}$$

は撓み$\zeta(x,\ t)$の偏微分方程式であるが、単弦振動だけ考へると

$$\zeta(xt) = \omega(x)\sin\omega t \quad \text{なる故に}$$

$$F\frac{\delta^2\omega}{dx^2} \fallingdotseq \rho\omega^2\omega = 0$$

一般解はρを一定と仮定すると

$$\omega = C_1\cos\sqrt{\frac{P}{F}}\,\omega\chi + C^2\sin\sqrt{\frac{\rho}{F}}\,\omega\chi$$

境界条件より

$$w = C^2 si\sqrt{\frac{\rho}{F}}\,w\ell = 0$$

$$C^2 = 0 \qquad \sqrt{\frac{E}{F}}\quad \omega\ell = K\pi$$

$$\omega_k = \frac{k\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{P}}$$

$$\omega k = Cksi\,k\pi\quad\frac{\chi}{\ell} \qquad K = 1.2.3\cdots\infty$$

となる。

今地震による運動量の変化より地盤が建設物の基礎に及ぼす震度を算定すると

$$mV = F$$

$$m\sqrt{\frac{u}{\rho}} = F$$

$$X = \sin wt$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos wt$$

$$\theta = m\sqrt{\frac{u}{\rho}}\cos\omega t$$

$$\max Q = m\,\frac{n}{P}$$

$$n = \frac{k\omega}{\eta} \qquad kw\text{：剛比}$$

$$Q = m\sqrt{\frac{u}{\rho}} = m\sqrt{\frac{3}{1.6kw}} = w\sqrt{\frac{1.87}{k\omega}} = m\times1.37\times\frac{1}{\sqrt{kw}} = \frac{1.37\omega}{\sqrt{k\omega}}$$

比処に於いて0.37が震度となる。

縦波による梁の撓み、

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2u}{dx^2}\right) = P(x)$$

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad \frac{d^2M}{dx^2} = -\rho$$

床の弾性率に

$$EI\frac{d^4\omega}{dx^4}=\rho(x)-k\omega$$

齊次方程式

$$\frac{d^4\omega}{dx^2}+\beta^4\omega=0$$

一般解

但し $\beta^4=\frac{k}{EI}$

$\lambda^4+\beta^4=0 \qquad \lambda=\beta^4\sqrt{-1}$

$$\omega=C_1 e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1+i)x}+C_2 e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}(-1-i)x}+C_4 e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1-i)x}$$

定数形

$$\omega=e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}zx}(A\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+\beta\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x)+e^{\frac{\beta}{-2}x}(A'\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+\beta\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x)$$

Cは2点 $X=\xi-\varepsilon$ 及 $X=\xi+\varepsilon$ に於いて荷重に等しいと云う条件から決定される。

剪断力は $S=-EI\frac{d^3u}{dx^3}$ で得る。

ωを微分すると

$$\left(\frac{d^3\omega}{dX^3}\right)x=\xi-\varepsilon=-\sqrt{2}\ \beta^3C、\left(\frac{d^3\omega}{dX^3}\right)x=\xi+\varepsilon=+\sqrt{2}\ \beta^3C$$

となり故に $P=2\quad 2\beta^3 CEI$

$$C=\frac{\rho}{8}\beta^3 EI$$

撓み曲線は$X=\xi$なる点に於ける3次の微係数が不連続の減衰波である。

Rayleighによる近似解法

ばね変位$\frac{x}{\ell}C$

運動エネルギー式

$$\frac{\omega}{2g}\left(\frac{xC}{\ell}\right)^2dc$$

ばねの運動エネルギー総和

$$\frac{\omega}{2g}\int_0^{\ell}\left(\frac{xC}{\ell}\right)^2dc=\frac{x^2}{2g}\quad\frac{\omega\ell}{3}$$

荷重ωの運動エネルギー式

$$\frac{x^2}{2g}\left(W+\frac{w\ell}{3}\right)+\frac{kx^2}{2}=\frac{kx_0{}^2}{2}$$

運動エネルギー式

$$\frac{w}{2g}X^2+\frac{kx^3}{2}=\frac{kx_0{}^3}{2}$$ と比較すると

ばねの質量が自然振動の週期に及ぼす影響を考察するには単にばねの重量の $1/3$ を重量Wに加へればよい結果になる。

振動中のwdCの変位は

$$X\cdot\frac{3C\ell^2-4C^3}{\ell^3}$$

梁自身の運動エネルギーは

$$2\int_0^{\ell/2}\frac{\omega}{2g}\left(\dot{X}\,\frac{3C\ell^2-4C^3}{\ell^3}\right)dC=\frac{17}{35}w\ell\frac{X^2}{2g}$$

振動の週期は

$\Sigma W=w+(17/35)w\ell$ の時の週期に等しい。

$$S_{st}=\frac{17}{35}w\ell\frac{\ell^3}{48EI}\qquad \tau=2\pi\sqrt{\frac{S_{st}}{g}}=\frac{2\pi}{0.632}\sqrt{\frac{w\ell^4}{EIg}}$$

片持梁

$$S_{st}=\frac{33}{140}w\ell\frac{\ell^3}{3EI}\qquad \tau=2\pi\sqrt{\frac{S_{st}}{g}}=\frac{2\pi}{3.567}\sqrt{\frac{w\ell^4}{EFg}}$$

架構梁荷重w

$$S=\frac{11}{960}\frac{w\ell^3}{EI}$$

故に $1/3=0.333$ となる。

梁の撓みに対する微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)=P(x)$$

a 鉸端 $\dfrac{d^2w}{dx^2}=0$

b 固定端 $\dfrac{dw}{dx}=0$

c 自由端 $M=S=0$ $\quad EI\dfrac{d^2w}{dx^2}=0$ $\quad$ 又は$\dfrac{d}{dx}\left(EI\dfrac{d^2w}{dx^2}\right)=0$

横波の振動に対して架構では柱の一端を支点として以意の空間面内に於いてX及Y方向の振動に変はる其のY方向振動は一般振動縦波と考へられる。此処に於いて、梁の曲げモーメントは振動に於いてdead Load の $\frac{1}{3}$ を重量 w に加える必要がある。