

薄板型鋼の捩れ変形阻止に就いて

横 尾 義 貫*

五十嵐 定 識**

○ 坂 本 順***

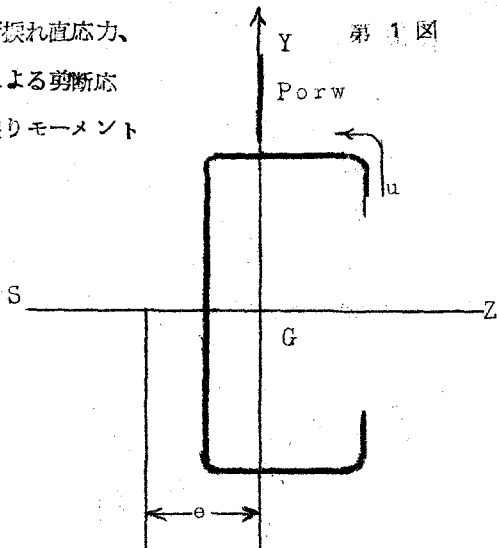
* 日本建築学会正会員 ** 同正会員 *** 同準会員

I 序 説

§ 1.1. 序：鋼構造の軽量化の要求に応える薄板型鋼が薄肉である為に、従来の型鋼と異なる力学特性を持つ事に注意を要する。C型鋼に就いて言えば、薄肉非対称開断面である為捩り剛性が小さく、又一般に剪断中心と加力面が一致しない結果、“曲げ捩れ”の現象を呈し、之の性状に就いて特別の考慮を払う必要がある。本論文では、C型鋼の捩れ変形と其に伴う応力に就いて考察し、之に基き構造部材としてC型鋼を用いる場合の変形限界の問題を検討し、併わせて二、三の変形拘束方法を提案し其の効果を実験的に示す。

§ 1.2. 記号：本論文中的各記号は下記に倣う。

ϕ ：捩れ角、 $\tilde{w}$ ：反り度、 $\tilde{w}$ ：剪断中心を捩り中心とした時の一様捩りによる反り、
 M_p, M_s ：St Venantの捩りモーメント、及び曲げ捩れモーメント C_{bd} ：曲げ捩れ剛性、
 Z_T ：捩れ抵抗係数； $\sigma_s J_s$ ：曲げ捩れ直応力、
 剪断応力 J_p ：St Venantの捩りによる剪断応力 l, t ：材長、板厚、
 M_T, m_T ：捩りモーメント e_s, e_g ：（第一図参照）



II 捩れ基礎方程式⁽¹⁾

H. Wagner の曲げ捩れ

$$M_B = -EK \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = -C b d \frac{d^3 \varphi}{dx^3}$$

$$\sigma_B = E \tilde{W} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \dots\dots\dots (2-1)$$

$$J_B = -E \int_0^u t \tilde{W} du \cdot \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = \frac{M_B}{t K} \int_0^u t \tilde{W} du \dots\dots\dots (2-2)$$

捩れの基礎方程式

$$\frac{d^3 \varphi}{dx^3} = X^2 \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{EK}$$

或は

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} - X^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{m_T}{EK} \quad X = \frac{G J_T}{EK} \dots\dots\dots (2-3)$$

梁端条件は、i) 支持端: $\varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0$ ii) 固定端 $\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0$
 iii) 自由端 $M_T = \varphi - \lambda^2 \dot{\varphi} = 0 \quad \sigma_W = \ddot{\varphi} = 0$

III 捩れ変形

§ 3.1. 変形公式例解 (2-4) 基礎式を各種端末条件の基に解く。

A) 捩れ変形の比較的小さい場合、略⁽²⁾、

B) 捩れ変形の比較的大きい場合

捩れ変形が増大するに従い、型鋼上縁に働く荷重の Z 軸区分力 (第 2 図) の影響が入り、
 上述の諸解では不完全である。

(1) 等分布荷重時

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \lambda^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{W_e}{EK} \left(\cos \varphi + \frac{h}{2e} \sin \varphi \right) \div \frac{W_e}{EK} \left(1 + \frac{h}{2e} \varphi \right) \dots\dots\dots (3-1)$$

両端支持:
$$\varphi = \frac{2\theta}{h} \frac{-q^2}{p^2 - q^2} \left\{ \cosh px + \left(\frac{1 - \cosh pl}{\sinh pl} \right) \sinh px + \frac{2\theta}{h} \frac{p^2}{p^2 - q^2} \left\{ \cosh qx + \left(\frac{1 - \cosh ql}{\sinh ql} \right) \sinh qx \right\} - \frac{2\theta}{h} \right\} \quad (3-2)$$

但し、 p, q は $r^2 - \lambda^2 r^2 - hw/2EK = 0$ の二根。

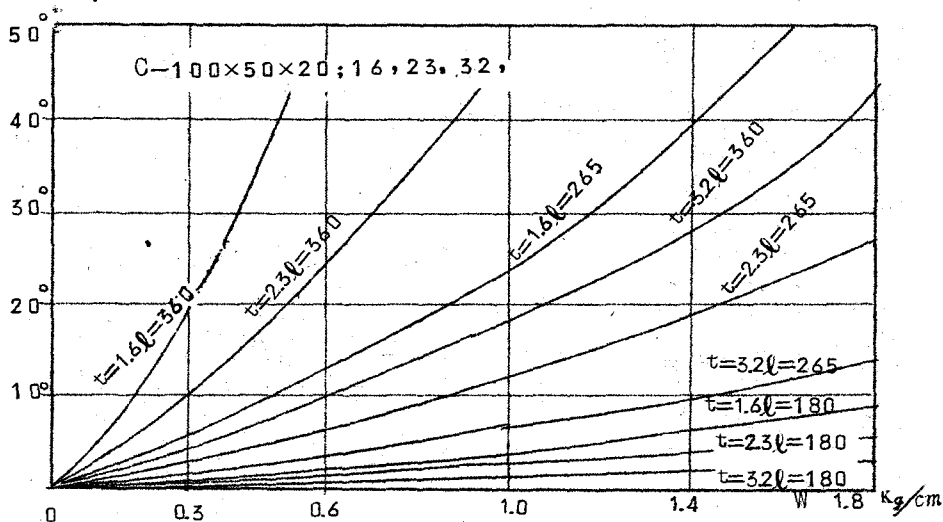
(2) 中央集中荷重時

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \lambda^2 \frac{d\varphi}{dx} = \frac{Pe}{EK} \left(1 + \frac{h}{2\theta} \varphi \right)$$

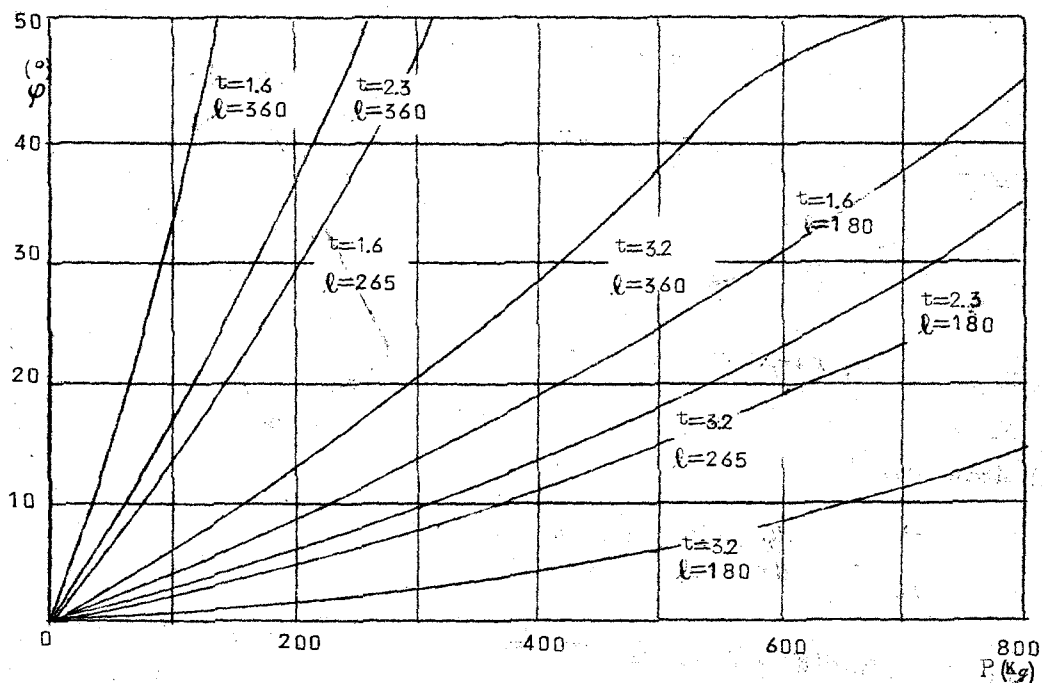
上述の解は非常に煩雑であるから、近似的に $M_T = Pe \left(\cos \varphi + \frac{h}{2\theta} \sin \varphi \right)$ とおいて前述の諸式に代入し、逐次変形量を求む。§ 3.

§ 3.2 上の諸式に依り求めた振れ変形量を次図に示す。

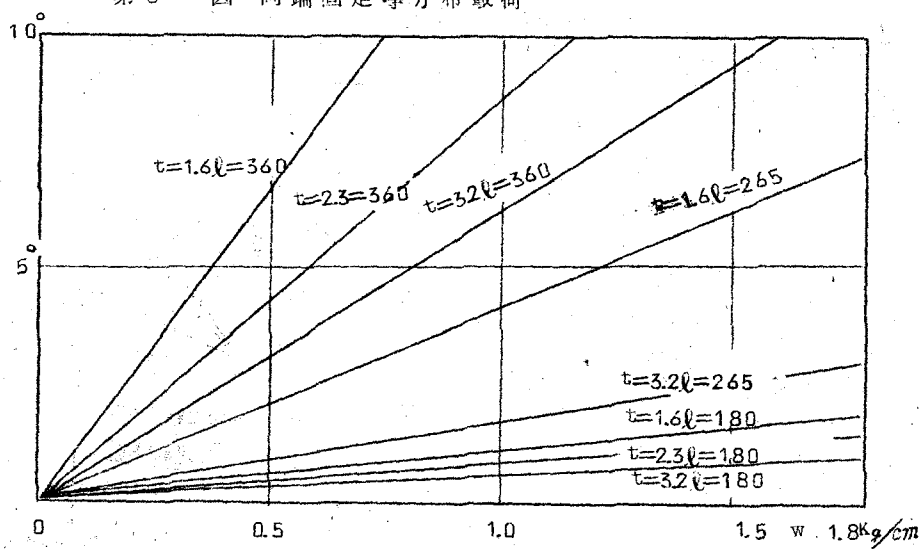
第3-a図 両端支持等分布載荷時



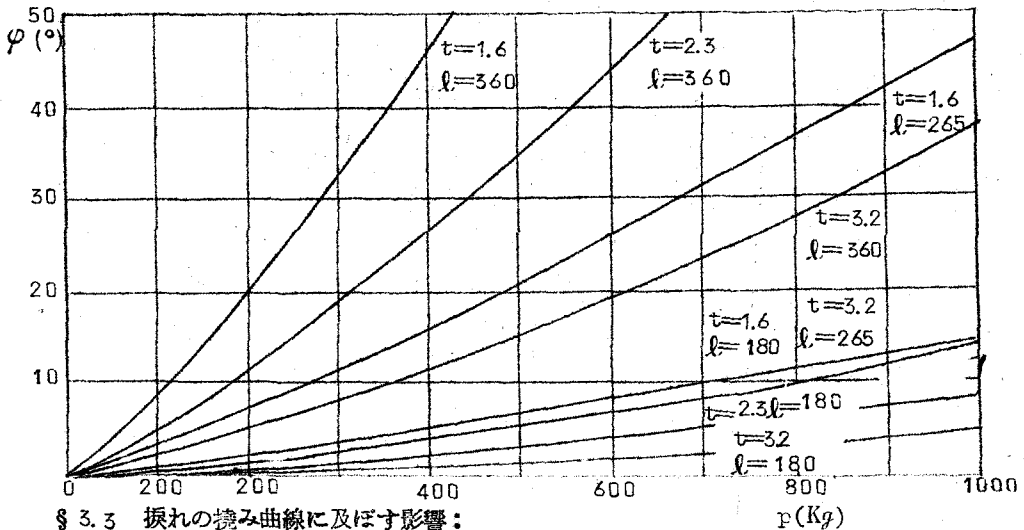
第 3-b 图 两端支持中央载荷



第 3-C 图 两端固定等分布载荷



第3-a図 両端固定中央集中載荷



§ 3.3 捩れの撓み曲線に及ぼす影響:

捩れ変形の増大に従い鉛直方向の撓み剛性が低減し、単純曲げ理論の撓み量より大きい値を示す筈である。今一例として、両端支持中央集中荷重時に就いて考えて見ると、撓み方程式 $-EIy'' = p/2x$ に於て I は φ 、即ち x の関数である事を考慮して、

$$y'' = - \frac{Px}{E\{(I_z + I_y) + (I_z - I_y)\cos 2\varphi\}} = - \frac{Px}{2E\{I_z - (I_z - I_y)\varphi^2\}}$$

上式の解を簡略化する為、 $\varphi - P - x$ 間の関係をLinearに置換すると

$$y'' = - \frac{Px}{2EL_z - 2mE(I_z - I_y)P^2x^2} = - \frac{Px}{ap^2x^2 - b}$$

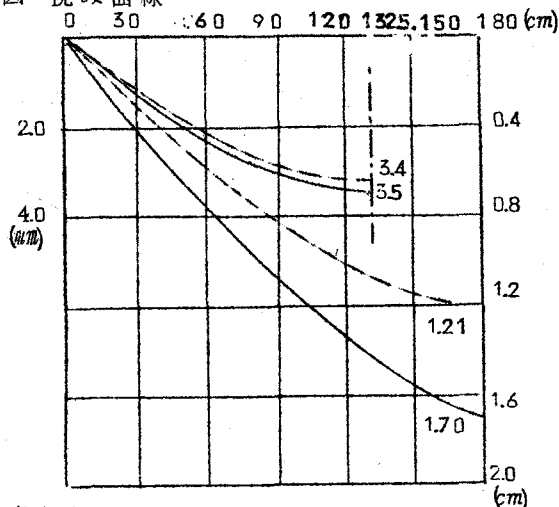
この場合の撓み量は

$$y = \frac{x}{2ap} \log \left| \frac{C^2 P^2 x^2 - 1}{C^2 P^2 x^2 - 1} \right| - \frac{x}{ap} - \frac{1}{2ap^2} \left| \frac{CPx - 1}{CPx + 1} \right| \dots\dots\dots (3-3)$$

但し、 $a = 2mE(I_z - I_y)$ $b = 2EI_z$ m : 変換係数

第4図は之の結果と単純曲げ時撓み量との比較を表わすが、 φ_{max} が1°前後では両者の差は2~3% だが3°~4°程度では捩れ変形による撓み量増分が可成り顕著に表われて来る。

第4図 撓み曲線



IV 振れによる諸応力

§ 4.1 曲げ振れ直応力：(2-2)より各支持載荷時の曲げ振れ直応力式を導くと

(1) 等分布荷重時

両端支持
$$\sigma_{\max} = \frac{2EW\tilde{l}}{h} \frac{-P^2q^2}{p^2-p^2} \left(\operatorname{sech} \frac{pl}{2} - \operatorname{sech} \frac{ql}{2} \right) \dots\dots\dots (4-1)$$

両端固定
$$\sigma_{\max} = \frac{m_T\tilde{W}}{\lambda^2 K} \left(-1 + \frac{\lambda l}{2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda l}{2} \right) \dots\dots\dots (4-2)$$

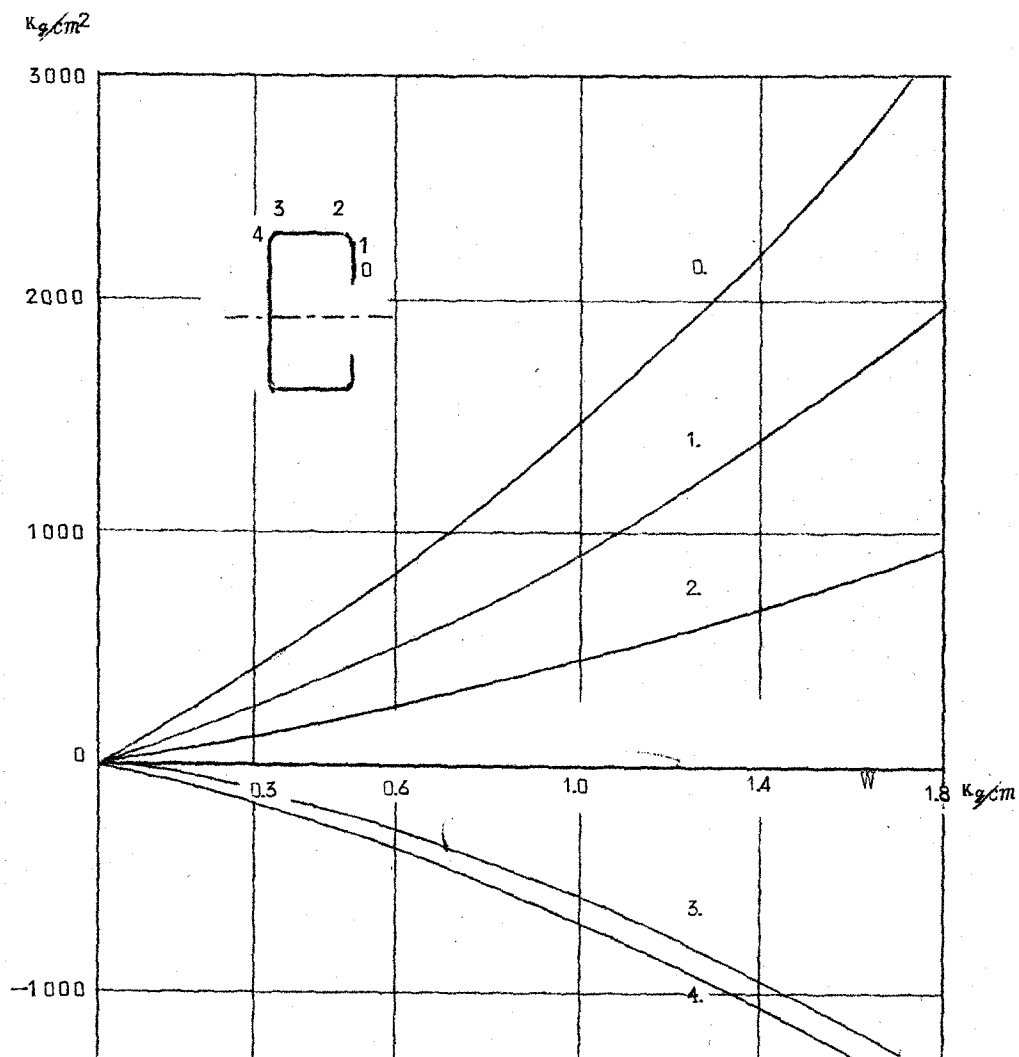
(2) 中央集中荷重時

両端支持
$$\sigma_{\max} = \frac{M_T\tilde{W}}{\lambda K} \tanh \frac{\lambda l}{2} \dots\dots\dots (4-3)$$

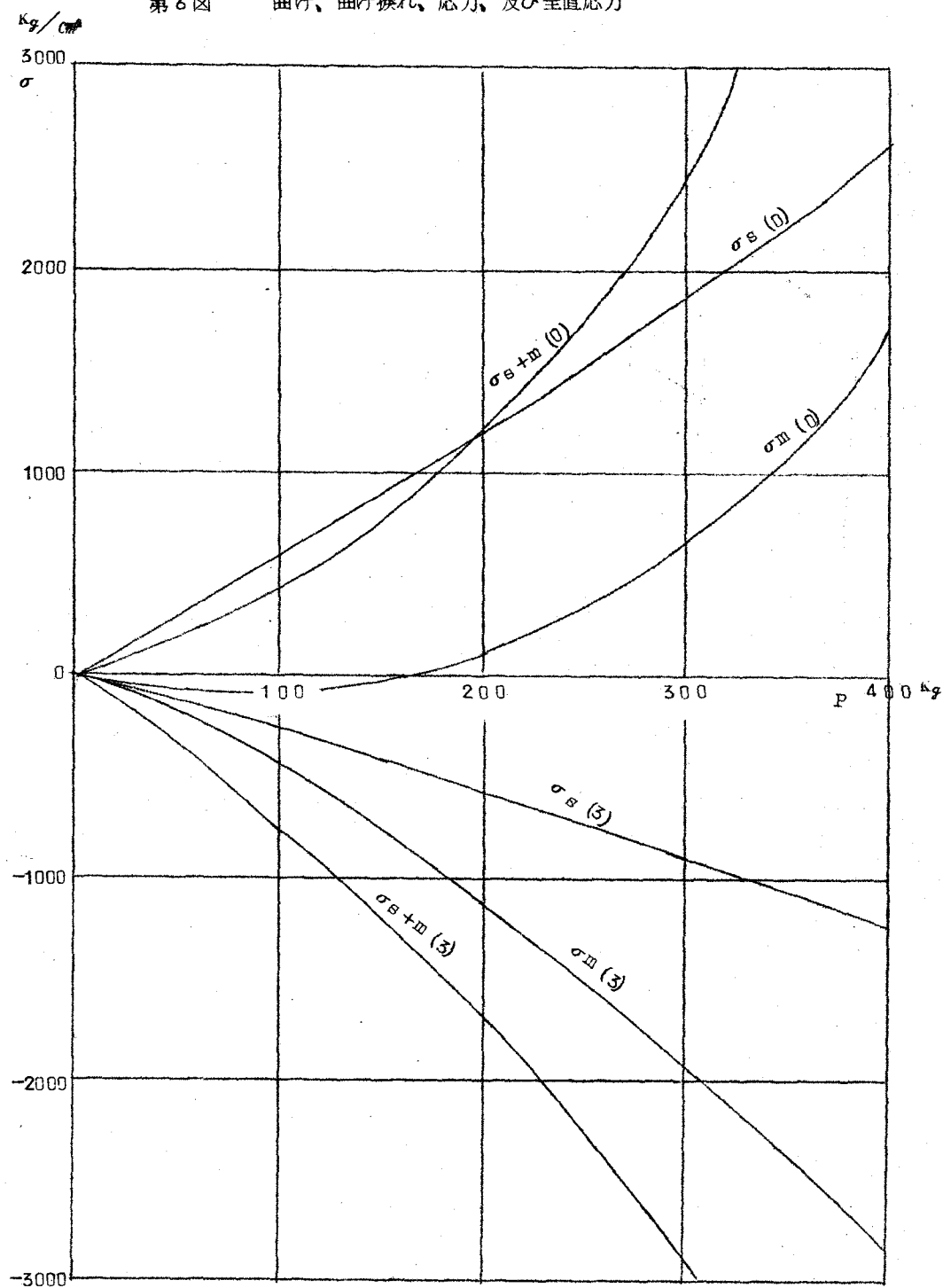
両端固定
$$\sigma_{\max} = + \frac{M_T\tilde{W}}{\lambda K} \tanh \frac{\lambda l}{4} \dots\dots\dots (4-4)$$

上式の計算例を第5図に示す。断面の全直応力、即ち、曲げ振れ応力と単純曲げ応力の和、 $\sigma_{\text{total}} = \sigma_s + \sigma_m$ を第6～7図に示す。之等のGraphは振れ変形の増大に伴い、曲げ振れによる附加直応力が軽視出来ぬ事を示している。(V：参照)

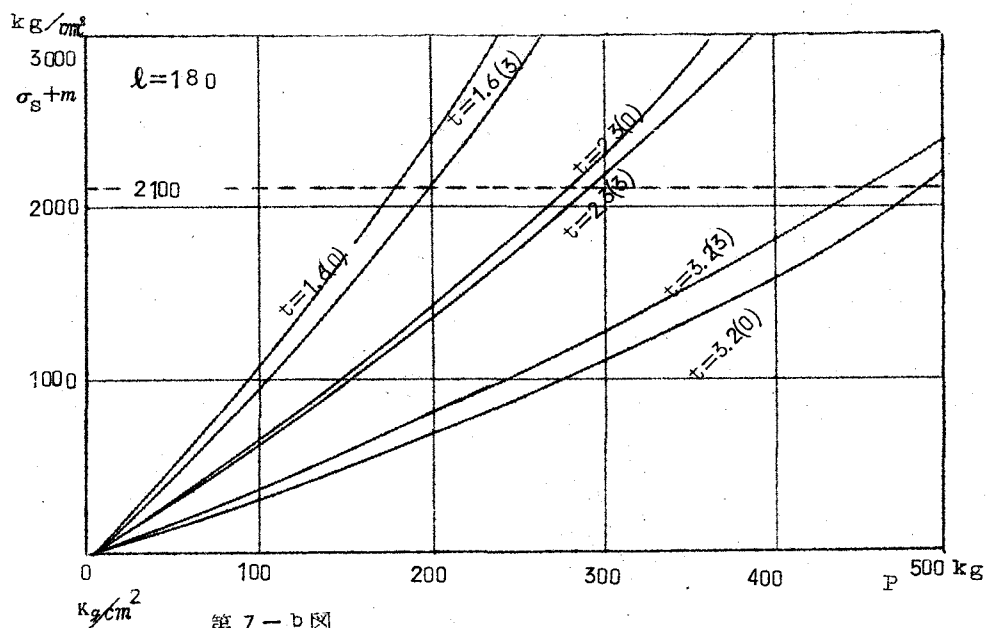
第5図 曲げ捩れ直応力



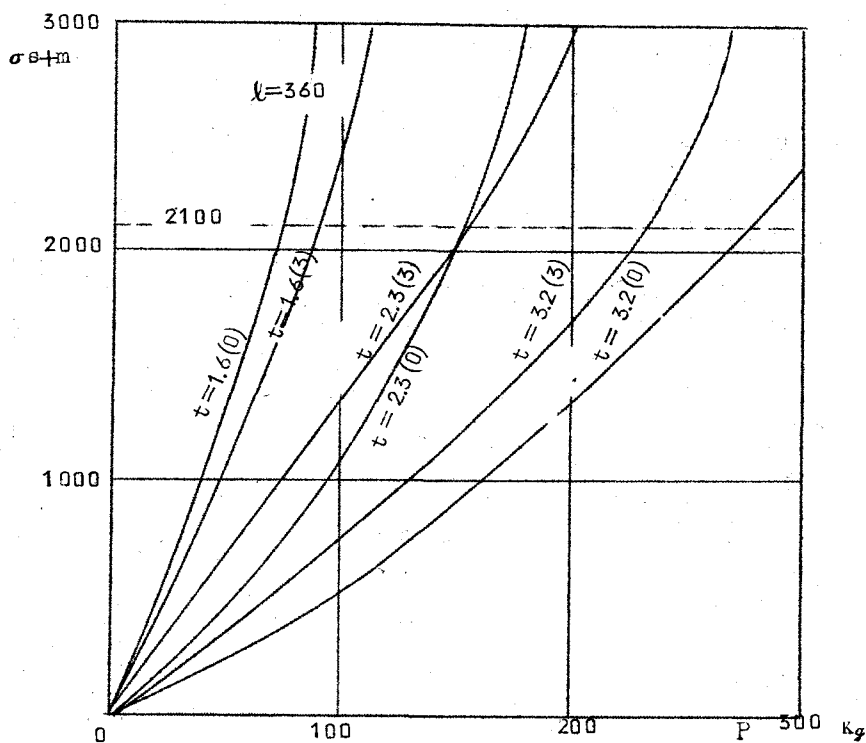
第 6 図 曲げ、曲げ捩れ、応力、及び全直応力



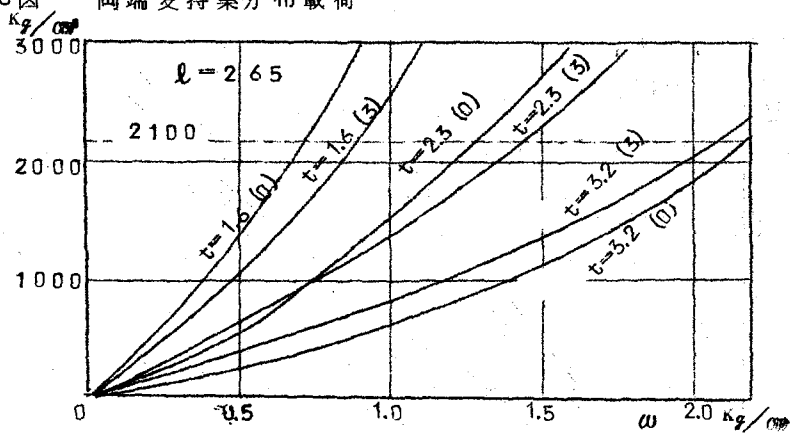
第 7 - a 图 两端支持中央集中载荷、全直应力



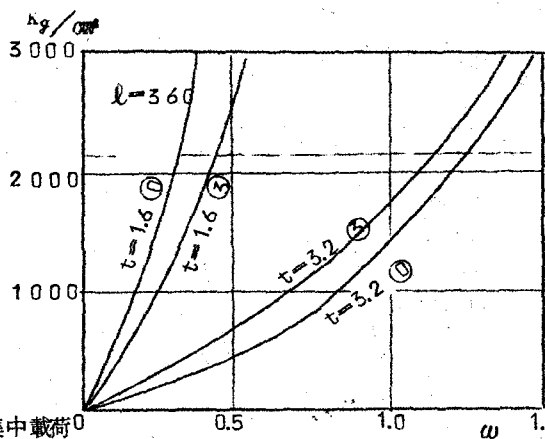
第 7 - b 图



第7-c图 两端支持梁分布载荷

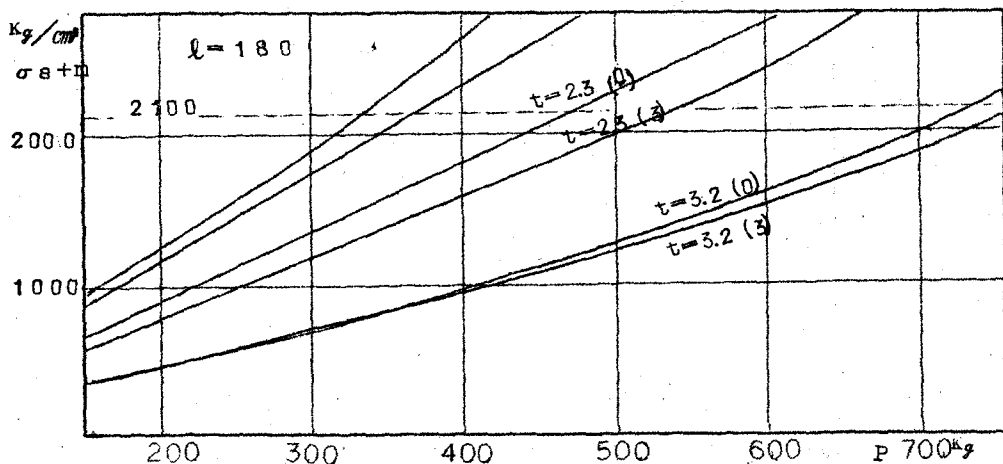


第7-d图

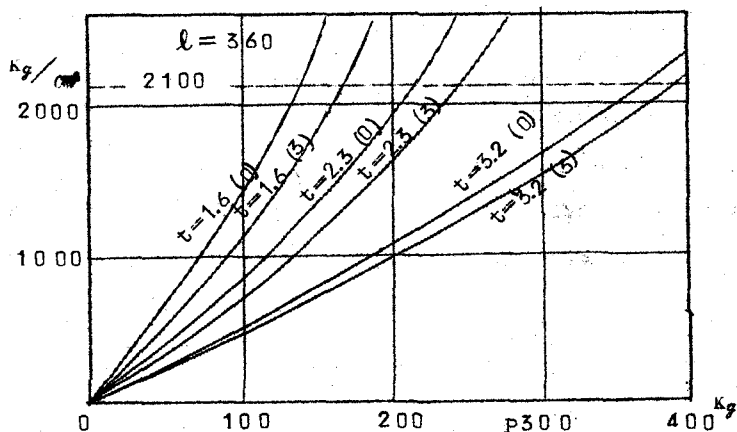


第7-e图

两端固定中央集中载荷



第7-f 図



§ 4.2 振れによる剪断応力：梁断面には(2-1), (2-3)の τ_p, τ_s を生じ、剪断力 Q_z による τ_{Qz} に附加される。但し τ_{total} が最大値をとるWeb 中点では、 τ_s は極めて小さいから、(第1表参照)近似的に $\tau_{total} = \tau_p + \tau_{Qz}$ として差支えない。

(1) 等分布荷重時

両端支持
$$\tau_p = G \times t \times \frac{2e}{h} \frac{pq}{p^2 - q^2} \left\{ q \tan h \frac{pl}{2} - p \tan h \frac{ql}{2} \right\} \dots (4-5)$$

$$\tau_s = E \times \frac{2e}{h} \times \frac{p^2 q^2}{p^2 - q^2} \left\{ p \tan h \frac{pl}{2} - q \tanh \frac{ql}{2} \right\} \int_0^{\mu} \tilde{w} dU \dots (4-6)$$

(2) 中央集中荷重時

両端支持
$$\tau_p = \frac{Pe}{2Z_T} \left\{ -1 + \frac{1}{\cosh \frac{\lambda l}{2}} \right\} \dots (4-7)$$

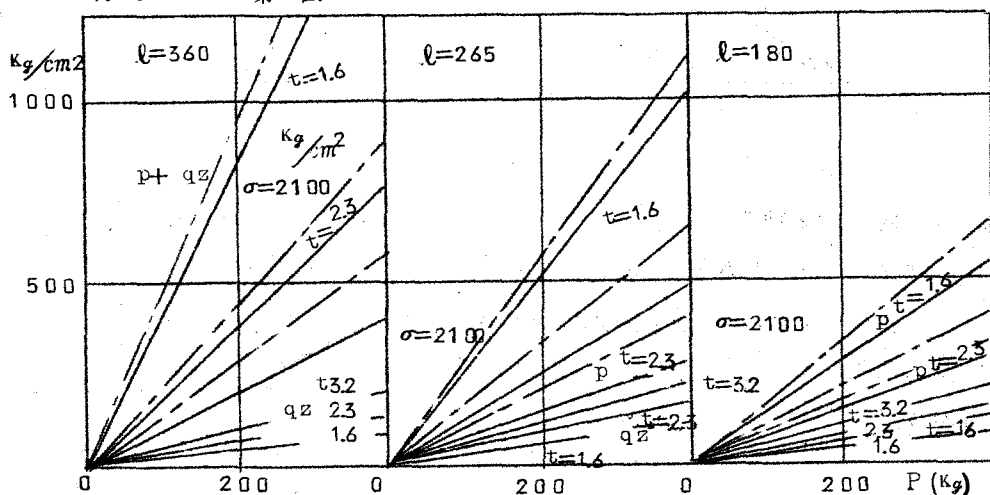
$$\tau_s = \frac{pe}{2k} \frac{1}{\cosh \frac{\lambda l}{2}} \int_0^{\mu} \tilde{w} dU \dots (4-8)$$

$$= \frac{p \cdot e}{2Z_T} \left\{ \frac{1}{\cosh \frac{\lambda l}{4}} - 1 \right\} \dots (4-9)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{p \cdot e}{2K} \cdot \frac{1}{\cosh \frac{\lambda l}{4}} \int_0^u \tilde{w} du \dots\dots\dots (4-10)$$

上述の計算例として両端支持、中央集中荷重時の剪断力力を第8図に示す。之の図及び第1表より全剪断応力中 $\bar{\epsilon}_p$ の占める割合は板厚が増すと著しく減少し、逆に材長が増すと増大する事を知る。第8図における破線は σ_{total} が短期許容応力度に達した時の $\bar{\epsilon}_{total}$ の値を結んだもので、之より許容曲げ荷重下に於ては、剪断応力に対する考慮を特に必要としないことが判る。

第8図



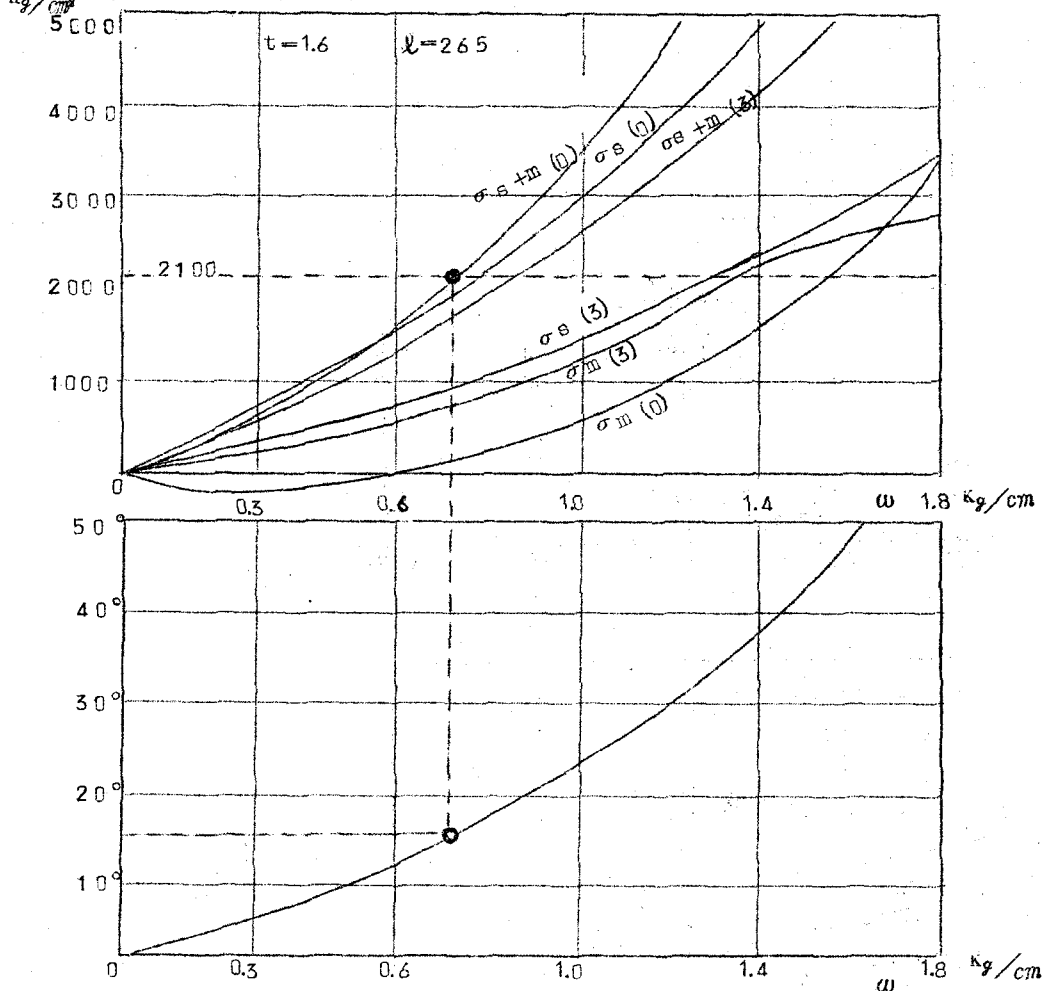
t mm	l cm	p $\frac{kg}{cm^2}$	qz $\frac{kg}{cm^2}$	$\bar{\epsilon}_p$ ($\frac{kg}{cm^2}$)	$\bar{\epsilon}_{total}$ ($\frac{kg}{cm^2}$)	$p/\bar{\epsilon}_{total}$ (%)
1.6	180	136.41	25.60	2.47	164.48	82.93
	265	265.23	25.60	2.16	292.99	90.52
	360	417.87	25.60	1.80	445.27	93.84
2.3	180	65.43	31.59	1.87	98.89	66.16
	265	127.22	31.59	1.64	160.45	79.28
	360	200.43	31.59	1.36	233.38	85.88
3.2	180	32.75	42.49	1.35	76.59	42.76
	265	63.67	74.36	1.18	139.21	45.73
	360	100.32	127.47	0.98	228.77	43.85

第1表

V 変形限界量、許容応力度の低減

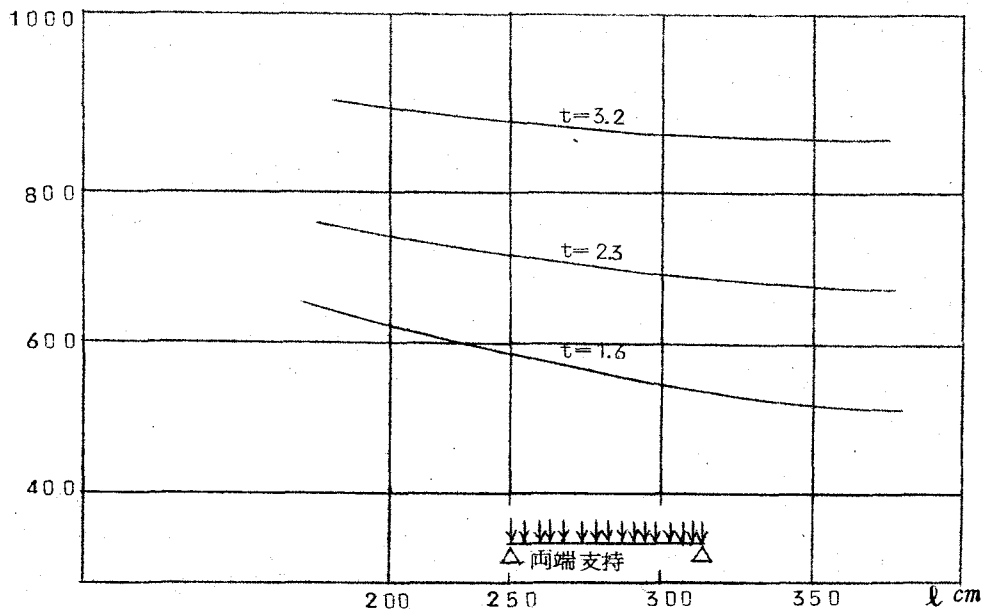
以上の考察より、C型鋼を使用するに際し内外装材等との関連、或は梁耐力の問題より何等かの変形限界量を規定する事が望ましいが、之を如何に規定するかは一概に規め難い問題である。此処では、断面直応力（剪断応力に対しては考慮する必要がない事は既述）と捩れ変形量に注目して限界量を求めて見る。今曲げ捩れ応力の附加による曲げ許容応力度の状況を第9図に示す。即ち従軸には全直応力度が短期許容応力度に達した時の単純曲げ応力計算値をとる。

第9図 両端支持梁分布载荷時

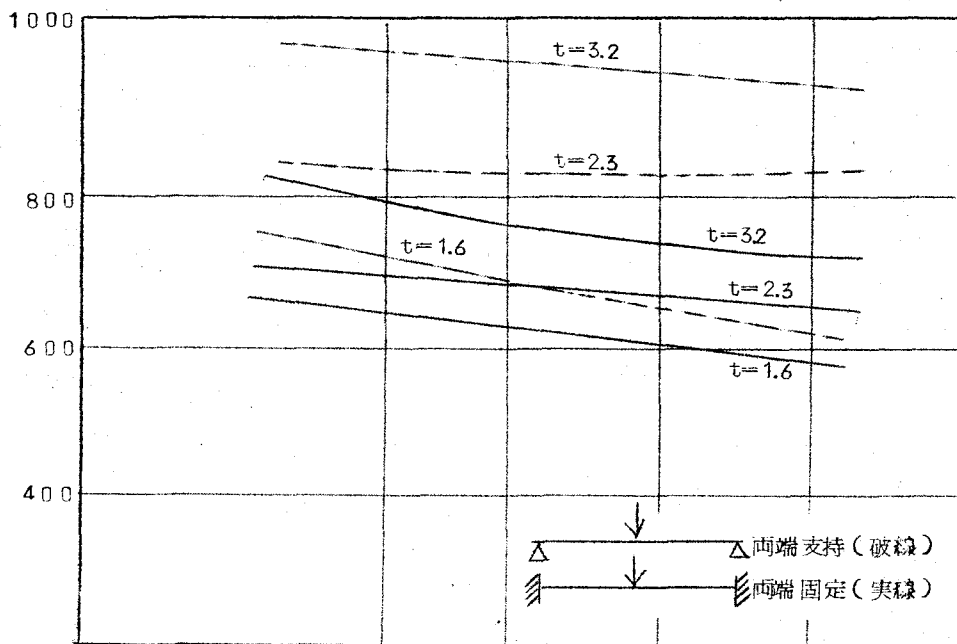


之の図より一般に部材長の増加即ち、回転の増大に従い全応力中曲げ捩れ応力の占める割合が増大し、所謂見掛けの許容応力度は低減する事を示している。一方、応力と変形量の関係を示す第10図より全直応力が短期許容応力度に達する時の回転角は、型鋼、材長、支持条件に関

せず、凡そ15°前後の値を示す。従つてこの値を変形限界とすれば σ もほぼ安全値に留
 Kg/cm^2 まり、又他の構造部材への影響を考へても妥当な値と見られる。
 σ_{all} 第10-a図。単純曲げ計算による時の許容応力性



Kg/cm^2 σ_{all} 第10-b図



Ⅵ 捩れ変形拘束に関する考察

以上 C 型鋼の捩れ変形を其に伴う附加直応力の著しい事を指適した。其処で変形増大と見掛け強度の低下を阻止する意味から変形拘束の問題が生ずる。其の方策としては、型鋼の捩り剛性を高めるか、横方向の支承を設けて、捩り変形を抑制する方法等が考えられる。以下拘束問題に就いて検討して見よう。

- (1) 型鋼上縁水平方向変位拘束：屋根葺材等により型鋼上縁の水平方向の変位が拘束されている場合を考える。

今図に示す様に P 点に $q(x)$ なる変位拘束力が分布していると

$$\bar{Z}(x) - e g (\cos \varphi - 1) + h/2 \sin \varphi = 0$$

従つて、曲げ捩れ条件式は $\bar{Z} = \bar{q}(x)$ を考慮して、

$$\bar{\phi} - \lambda^2 \bar{\phi} = w_0 / c_{EK}$$

$$\lambda^* = \lambda / \sqrt{c} \quad c = 1 + \frac{(h/2)^2}{EK}$$

となり、等分布荷重時と全形の解を得る。之の場合の拘束効果は三割程度の変形低減を示すに過ぎず⁽⁵⁾、拘束方法としては余り其の効果を期待出来ぬ事が判る。

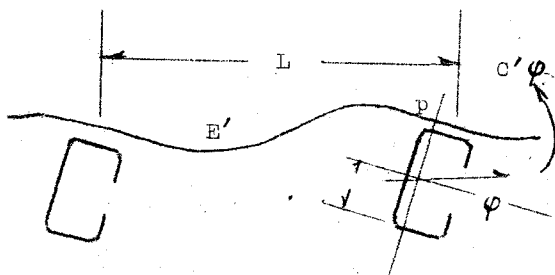
- (2) 型鋼上縁が剛結合され水平変位拘束と同時に、回転変形量に比例する逆向抵抗モーメントが材軸方向に分布する場合。今之の抵抗モーメント係数を c' とおくと

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} (1 + \frac{e y^2}{EK}) - \lambda^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{1}{EK} (w_0 - c' \varphi) \quad (6-1)$$

$$c' = 12 \frac{EI}{L} \quad E' : \text{葺材の弾性}$$

係数

L : 型鋼間隔



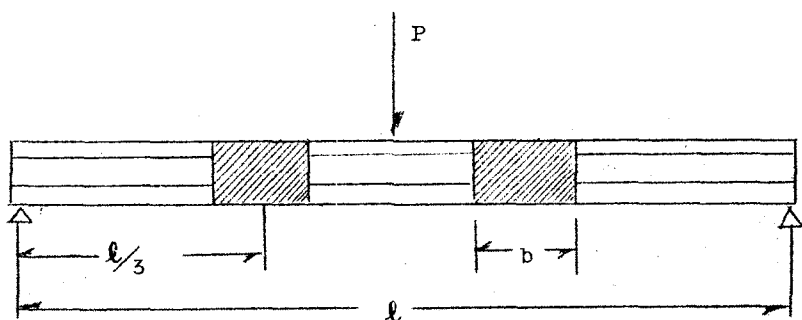
上述の解は

$$\varphi = (A e^{px} + c e^{-px}) \cos qx + (B e^{px} + D e^{-px}) \sin qx + \frac{w_0}{c'}$$

$$p; q = \frac{1}{2} \sqrt{2c' \pm \lambda^2} \quad (6-2)$$

一例として、等分荷重、両端支持梁が厚 1.0cm の檜材 ($E' = 1.0 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$) の珪材と剛に結合されている場合 ($C' = 1.0 \times 10^3 \text{ Kg/cm}$) を考へると $\varphi_{\max} = 11' 44''$ の値を得る。即ち、之の程度の曲げ剛性を持つ珪材に剛結合されている時、変形は殆んど拘束されると言える。

- (3) Cover-Plate による拘束：薄肉閉断面材の捩り剛性は、開断面材に比較して極めて大きい事は良く知られているが、之の事から開断面鋼の開口部に局部的に Plate を当てる事により捩り剛性を高め、変形を低減し得ることが考えられる。一例として、三分点に各種寸法の Plate を溶接した場合の効果を実験し、其の効果を検討する。今三分点にて反りが完全に揚制されるものとすれば、



第12図 Cover-Plate 法

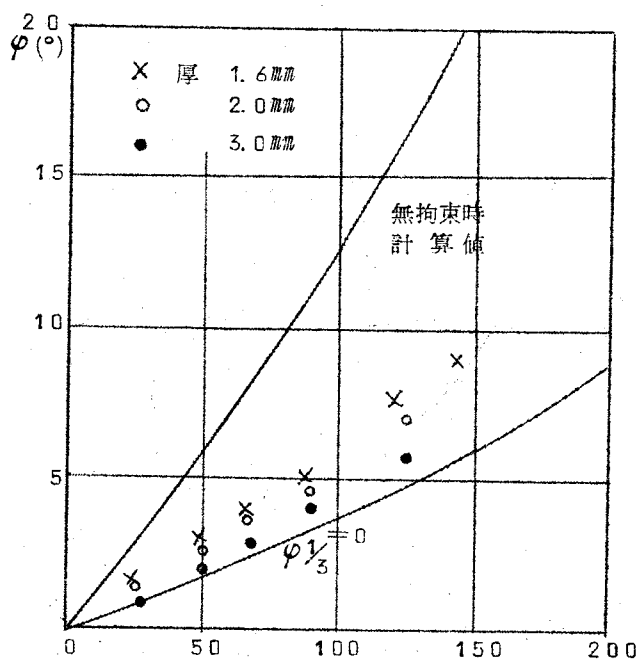
両端支持中央集中荷重時

$$\varphi_{x_2} l/2 = \frac{MT}{\lambda^3 EK} \left(2 - \frac{\lambda l}{2} - \frac{2}{e^{\frac{2}{3}\lambda l} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{\lambda l}{6}} + 1} - \frac{3}{e^{\frac{\lambda l}{6}} + 1} \right) \dots\dots\dots (6-3)$$

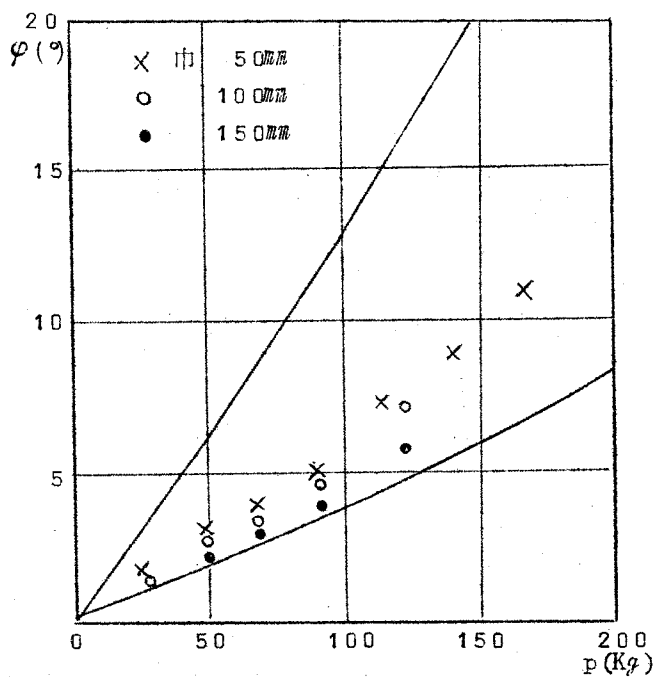
となり、計算結果は約28%程度に変形を減ずる。然し、Plateを局部的に当てたのみで、其の部分の反りに対して完全剛域と見做すのは誤りで、実験結果も之の事を裏書きしている。

(第13図) 第14図は板巾板厚の変化に対する拘束方法を示すが、約40%程度の低減を見る事が出来る。之の事は逆に $1/3$ 点で $1/4$ 程度の反り拘束を仮定した時の理論解は

$$\varphi_{\max} = \frac{M_T}{\lambda^3 EK} \left(-\frac{\lambda l}{2} + \coth \frac{\lambda l}{6} - \frac{\cosh \frac{\lambda l}{3}}{4 \sinh \frac{\lambda l}{6} \cosh \frac{\lambda l}{2}} \right)$$

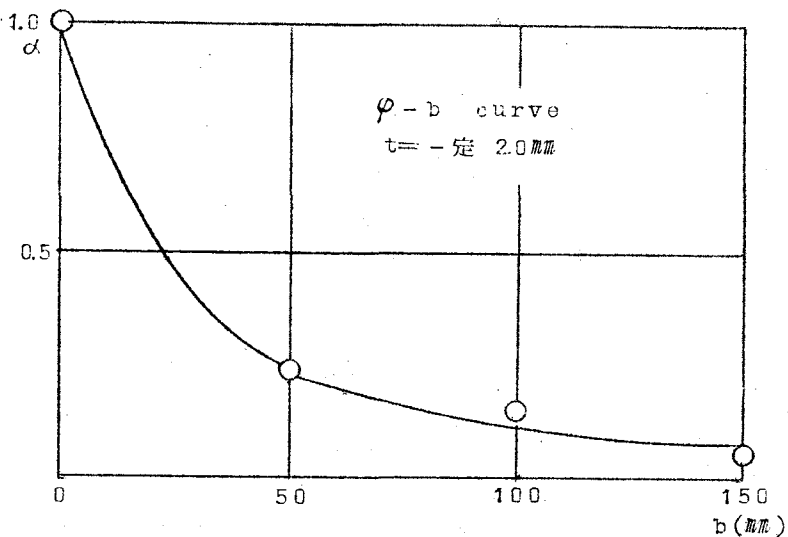


第 13 - a 板 厚 变 化

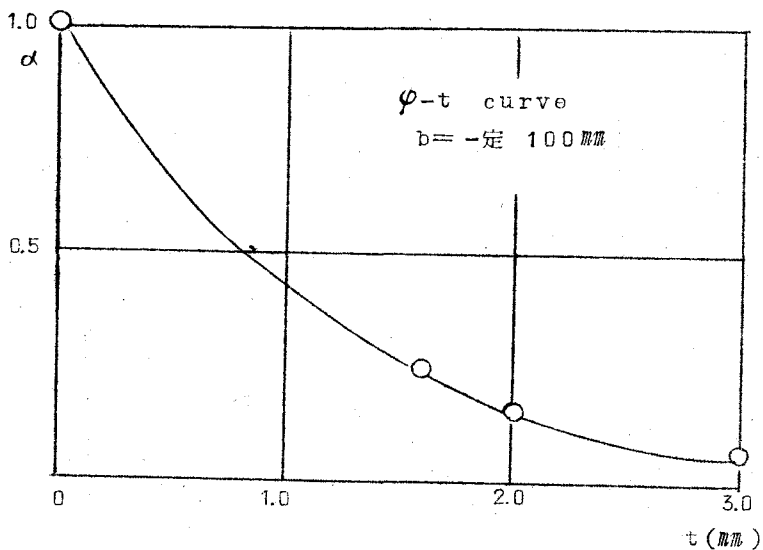


第 13 - b 图 板 宽 变 化

$$+ \frac{3}{4} \frac{\cosh \frac{\lambda l}{2}}{\cosh \frac{\lambda l}{3} \sinh \frac{\lambda l}{6}} - \frac{3}{2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda l}{6} \dots \dots \dots (6-4)$$



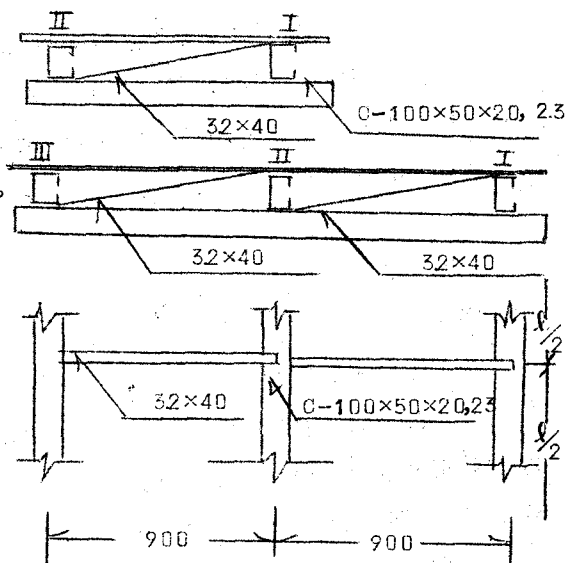
第 14-a 図 板巾 振り伝達率



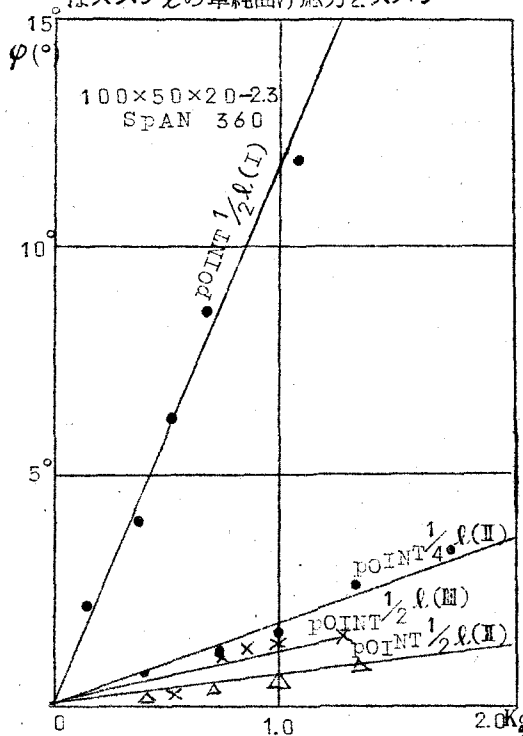
第 14-b 図 板厚 振り伝達率

(4) Tie-Bar 法：捩れ変形抑制の手段として、相隣る型鋼の上下縁を第15図の様に繋いだ時の実験結果を第16図に示す。二本併置の場合、I材は約60～65%の拘束効果を現わし、II材は殆んど変形を起さぬ。

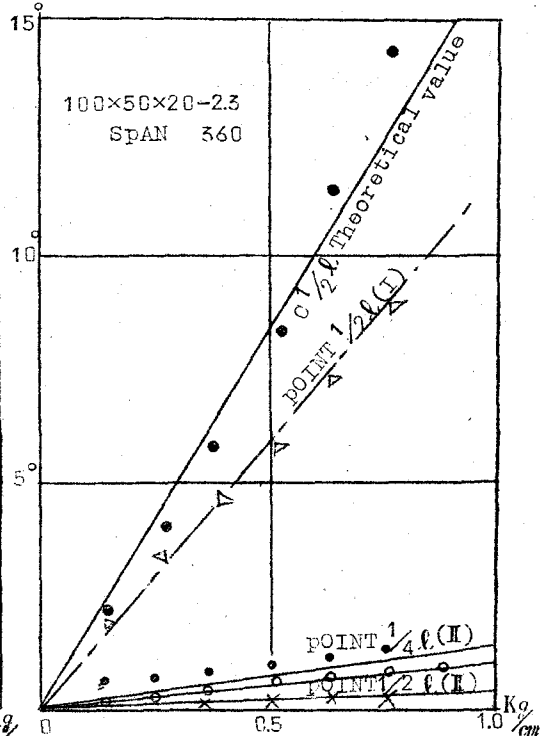
更に三本併置の場合、中央材は殆んど完全に変形を拘束されている。従つて数ケの型鋼を並列する場合之の拘束方法は優れた効果を示すだろう。一方、この場合の断面直応力に就いて考察すれば、Tie-Bar によりスパン中央の捩れ変形が拘束される結果断面に生ずる曲げ捩れ応力も低減される。例えばspan l の両端固定梁にて梁中点の回転が完全に阻止されているとすれば、断面直応力はスパン l の単純曲げ応力とスパン



第15図 Tie-Bar 法



第16-a図



第16-b図

$l/2$ 両端固定梁の曲げ捩れ応力の和となる。今 $l = 360\text{cm}$ 、中央集中荷重時を考えると最大応力は荷重、板厚に関係なく、無拘束時の $72-75\%$ の値を示し、 2 割 5 分程度の応力低減となる。従つて Tie-Bar を用いる場合許容荷重を無拘束時許容荷重の 1.3 倍となし得る。

VII 結 語

以上、C型鋼を単材として用いる時には、常に捩れ変形と附加直応力に留意せねばならぬこと、特に長スパンの場合には、許容荷重下でも何等から変形拘束の手段を講ずべきことを指適し、更に Cover-Plate, Tie-Bar による拘束方法を提案し、変形、応力の点に関して極めて有効であることを示した。

参 考 文 献

- 1) 「弾性学」 倉西正嗣
建築学会論文報告集 第57号
「薄板型鋼の捩れに就いて」 横尾、五十嵐、高野
- 2) 建築学会論文報告集 第57号
- 3) 4) 同 上 第58号
「薄板型鋼の捩れに就いて」 横尾、五十嵐、坂本、
- (5) 建築学会論文報告集 第57号
及び、近畿支部研究報告 昭和31年冬期