材料強度の変動と鉄筋
コンクリート構造物の耐力

建設省建築研究所
研究員　大　崎　順　彦

§1　まえがき

建築物の構造計算にあたつてわれわれは、従来荷重あるいは材料の性質をある固定した値として取扱うことに慣らされているが、実はこれらの諸量は常に多かれ少なかれ変動のあるものであつて、たゞ便宜上の制約に従つてその変動するものの一特定断面のみをとらえ、その値を常用しているに過ぎない。

そこで最近は変動する諸要素をできるだけありのまゝの形でとらえ、それらの組合せを確率論的に取扱う試みが数多くなされているが、筆者もこゝで鉄筋ならびにコンクリート強度の変動が鉄筋コンクリート構造物の耐力におよぼす影響の問題をとりあげ、特にコンクリート強度の局部的な弱点がその部分の断面強度ならびに高次不静定構造にあつてはその構造物の終局耐力にさほど悪影響をおよぼさないということを若干定量的に裏付けた。

§2　任意の函数の近似確率分布

鉄筋およびコンクリートの強度の一構造物内における変動は、それぞれある平均値の周りにある標準偏差をもつてバラつき、その分布形が正規型であることは大体において認められている。

そこでこれら鉄筋およびコンクリート強度のある組合せによつてきまる部材断面の強度なり、構造物の終局耐力なりがどのような確率分布をするかということを先づ求めておかなければならない。

いまそれぞれ $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$、――――、$\bar{x}_n$ なる平均値の周りに σ_1、σ_2、――――、σ_n なる標準偏差をもつて正規分布する互に独立な変数 x_1、x_2、――――、x_n があるとき、それらの変数の任意の函数

$$y=y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

の確率分布は近似的に次のようにあらわされる。

すなわち函数 y を各変数の平均値の周りでTaylor展開しその一次の項までをとれば

$$y=y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)\frac{\partial}{\partial x_i}y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \qquad (2)$$

となりこれは各変数の一次式であるから、y の確率分布は

$$\left.\begin{aligned} &\text{平均値} & \bar{y}&=y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \\ &\text{標準偏差} & \sigma^*&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}y(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)\right]^2\sigma_i^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

なる正規分布である。

§3　コンクリート強度および鉄筋

降伏点の変動

建築物に使用せられるコンクリートは、設計当初構造計算において想定せられた指定強度を発揮するよう配合せられるものであるが、実際には材料上あるいは施工上の各種

不同因子が介入して、でき上つた構造物の各部分的強度は決して一様とはならず、あるバラつきを示すものであり。そのバラつきの模様は前述のように大体正規分布と認められる。しかし、その平均強度に関しては構造計算書にみられる指定強度よりは相当に高くでているのが現状であるが、こゝでは簡単のため、構造物の各部分におけるコンクリート強度は指定強度を平均値とする正規分布に従い、しかも各部分ごとに独立して変動すると仮定して計算を進めることゝする。

次に強度のバラつきの幅についてはその幅を

$$\text{変異係数}\quad C = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}$$

$\bar{x}_1$ ： コンクリート強度の平均値、すなわちその指定強度

σ_1 ： コンクリート強度の標準偏差

であらわすことにし、多数の実測結果を参照すれば、一応普通よりやゝ悪い現場を対象とするならば

$$C = 20\ \%$$

ぐらいの値をとつてよいようである。従つて指定強度 $180\,\mathrm{Kg/cm^2}$ ならば

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 = 180\,\mathrm{Kg/cm^2} \\ \sigma_1 = 36\,\mathrm{Kg/cm^2} \end{array}\right\} \quad \text{(4)}$$

となり、コンクリート強度 x_1 の変動を示す確率分布曲線は

$$g(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x_1-\bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \quad \text{(5)}$$

である。

通常コンクリートの許容応力度 x_{1a} としては指定強度 $\bar{x}_1$ の⅔をとるから、実際のコンクリート強度が許容応力度を割る確率（許容応力度危険率と呼ぶことにする）は次の確率積分であらわされる。

$$\Phi(x_{1a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\int_{-\infty}^{\frac{2\sigma_1}{3C}} \exp\left[-\frac{(x_1-\bar{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] dx_1$$
$$= 0.048 \quad \text{(6)}$$

次に、鉄筋降伏点のバラつきに関しても多数の実測結果が発表せられているが、いま一現場に使用せられる直径 16 mm～22 mm の建築用丸鋼を対象とするならば降伏点 x_2 の変動を

$$\left.\begin{array}{l} \text{平均値}\quad \bar{x}_2 = 3000\,\mathrm{Kg/cm^2} \\ \text{標準偏差}\quad \sigma_2 = 150\,\mathrm{Kg/cm^2} \end{array}\right\} \quad \text{(7)}$$

程度の正規分布と考えて一応妥当であろう。このように仮定すれば鉄筋の許容応力度 $2400\,\mathrm{Kg/cm^2}$ を下廻る許容応力度危険率は 0.003 %程度である。

§ 4　部材断面の終局曲げモーメント

まずコンクリート強度 x_1、鉄筋降伏点 x_2 の変動が、曲げを受ける鉄筋コンクリート単筋梁の耐力すなわちその終局曲げモーメントにおよぼす影響を調べることとする。終局曲げモーメントを与える式としては従来種々のものが提案せられているがそのうち比較的実状に則しかつ最も簡単であると思われる Whitney の式を利用することとする。

すなわち、Whitney によれば

(I) $_c\sigma_B \geqq 2.1963\, p_t\, {}_s\sigma_y$ の範囲では

$$C = P_t\, {}_s\sigma_t\,(1 - 0.5882\, P_t\, {}_s\sigma_y / {}_c\sigma_B) \text{------} (8)$$

(II) $_c\sigma_B \leqq 2.1963\, P_t\, {}_s\sigma_y$ の範囲では

$$C = \frac{1}{3}\, {}_c\sigma_B \text{------------------------} (9)$$

こゝに

$$\begin{cases} C = M_0 / bd^2 & \text{終局モーメント係数} \\ M_0: & \text{終局モーメント} \\ b: & \text{部材断面幅} \\ d: & \text{同上　有効丈} \\ P_t: & \text{鉄筋比} \\ {}_s\sigma_y: & \text{鉄筋降伏点} \\ {}_c\sigma_B: & \text{コンクリート強度} \end{cases}$$

で与えられる。あるいは

$$\begin{cases} y = C \\ x_1 = {}_c\sigma_B \\ x_2 = {}_s\sigma_y \\ a_1 = P_t \\ a_2 = 0.5882\, P_t^2 \end{cases}$$

とおけば、(8)、(9)式は

$$y = a_1 x_2 - a_2 \frac{x_2^2}{x_1} \text{--------------------} (10)$$

$$y = \frac{1}{3} x_1 \text{------------------------} (11)$$

となるが、鉄筋比の実状を考えると実際上意味のある殆んど大部分の領域が(8)式の範囲であらわされるから、断面の終局モーメントをあらわす(1)式の函数としては（１０）式のみをとることとする。

従つていま $P_t = 0.01$ として(4)、(7)の値を(3)式に入れれば、（１０）式の y の確率分布は

$$\left.\begin{array}{ll} \text{平均値} & \bar{y} = 27.06\ \mathrm{Kg/cm^2} \\ \text{標準偏差} & \sigma^* = \sqrt{0.3460 + 1.4544} \\ & \quad = 1.34\ \mathrm{Kg/cm^2} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

なる正規分布となる。σ^*の式で根号内第１項は終局モーメントの変動におよぼすコンクリート強度変動の影響であり、第２項は鉄筋降伏点変動の影響をあらわすものであつて、後者の効きが数倍であることを認めうる。

またコンクリートおよび鉄筋の許容応力度

$$x_{1a} = 120\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

$$x_{2a} = 2400\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

を用いて設計強度を算出すれば

$$y_a = 21.26\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

となり、実際の強度が設計強度を割る確率（設計強度危険率と呼ぶことにする）は(6)式と同様の確率積分により

$\Phi\ (y_a)=0.0008\%$

であることが判る。

この値は(6)式で与えられるコンクリートのみの許容応力度危険率の値よりも遥かに小さい。これは上述のように終局モーメントの変動はコンクリート強度よりも主として鉄筋降伏点の変動に左右され、しかも鉄筋自体の許容応力度危険率が前述のように極めて小さいことによるものである。

なおコンクリート強度の変動だけを問題とする場合は、鉄筋の降伏点 χ_2 すなわち $s\sigma_y$ の値を一定値、例えば

$$s\sigma_y=3000\ \mathrm{Kg/cm^2}$$

とおけばよく、この場合（10）式は

$$y=a_3-\frac{a_4}{x_1} \qquad (13)$$

こゝに　$a_3=P_t\, s\sigma_y$

$a_4=0.5882(P_t s\sigma_y)^2$

となり、(2)式に従つてTaylor 展開すれば

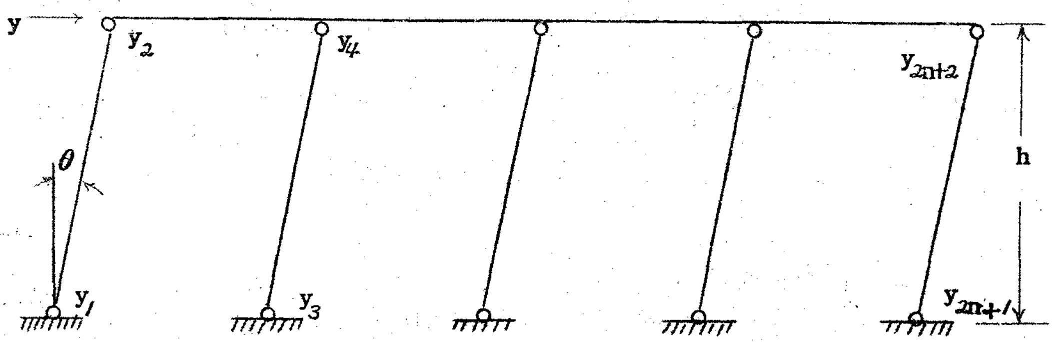
$$y=a_3-\frac{2a_4}{\overline{x}_1}+\frac{a_4}{\overline{x}_1^2}x_1 \qquad (14)$$

をうる。

§5　構造物の耐力

構造物の耐力を、それを構成する材料の強度をもつて解析的に表現することは非常に困難であり、殊に複雑な不静定次数の高い構造物に対してはむしろ不可能に近いが、ここでは定性的な傾向をつかむ意味で次のような仮想的な状態を想定することとする。

すなわち図のような1層 n スパンの矩形架構がその梁位置に水平力 y を受け、各柱の柱頭および柱脚部に yield hinge を生じて不安定状態となつたときをもつて終局の状態とし、そのときの水平力 y をもつてこの構造物の耐力とみなすことにする。



このような状態はいわゆる limit anaysis でいう kinematically sufficient な終局状態であり、この状態で求められる y は真の耐力の上方限界の一つを与えるものである。

いま図で柱の部材角を θ とし各 yield hinge における終局モーメント係数を y_i（$i=1、2、---、2n+2$）、柱の幅、丈、高さをそれぞれ b、d、h とすれば

$$y \cdot h\theta = \theta \sum_{i=1}^{2n+2} y_i \cdot bd^2$$
$$y = \frac{bd^2}{h} \sum_{i=1}^{2n+2} y_i \tag{15}$$

となり、ここでコンクリート強度変動の影響を考慮に入れるため（１４）式を代入すれば

$$y = \frac{bd^2}{h} \sum_{i=1}^{2n+2} \left(a_3 - \frac{2a_4}{\bar{x}_i} + \frac{a_4}{\bar{x}_i^2} x_i \right) \tag{16}$$

となる。ここに x_i、$\bar{x}_i$ はそれぞれ i 番目の yield hinge 位置における実際のコンクリート強度およびその指定強度であり、x_i はコンクリート強度の部分的な変動のため一般にはすべての yield hinge 位置で等しくはない。

（１６）式は前述の一般式(1)の特別の場合に過ぎない。従つて

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{bd^2}{h} \cdot \frac{a_4}{\bar{x}_i^2}$$

であるから耐力 y の確率分布は

$$\left.\begin{array}{ll} \text{平均値} & \dfrac{bd^2}{h} \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+2} \left(a_3 - \dfrac{a_4}{\bar{x}_i} \right) \\ \text{標準偏差} & \dfrac{bd^2}{h} \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{2n+2} \left(\dfrac{a_4}{\bar{x}_i^2} \right)^2 \sigma_i^2} \end{array}\right\} \tag{17}$$

なる正規分布となる。ここに σ_i は各yield hinge 位置におけるコンクリート強度の変動をあらわす標準偏差である。

いま（１７）式で

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots\cdots = \bar{x}_{2n+2} = \bar{x} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots\cdots = \sigma_{2n+2} = \sigma \end{array}\right\}$$

とおけば

$$\left.\begin{array}{ll} \text{平均値} & \bar{y} = 2(n+1) \dfrac{bd^2}{h} \left(a_3 - \dfrac{a_4}{\bar{x}} \right) \\ \text{標準偏差} & \sigma^* = \sqrt{2(n+1)} \dfrac{bd^2}{h} \cdot \dfrac{a_4}{\bar{x}^2} \sigma \end{array}\right\} \tag{18}$$

となる。

いまコンクリートの許容応力度を x_a としたときの y、すなわち構造物の設計強度 y_a は（１６）式より

$$y_a = 2(n+1) \frac{bd^2}{h} \left(a_3 - \frac{2a_4}{\bar{x}} + \frac{a_4}{\bar{x}^2} x_a \right)$$

であるから

$$\frac{y_a - \bar{y}}{\sigma^*} = \sqrt{2(n+1)} \; \frac{x_a - \bar{x}}{\sigma} \tag{19}$$

となり、コンクリートの許容応力度危険率が一定でも構造物の設計強度危険率 $\Phi(y_a)$ は n の増大とともに、すなわち構造物の不静定次数が増すとともに急速に減少することが豫想せられる。

いまこの危険率減少の模様をみるため慣用のように $x_a = \frac{2}{3}\bar{x}$

とし

$$\mu(n) = \frac{\Phi(y_a)_{n=n}}{\Phi(y_a)_{n=0}}$$

なる減少率の値を計算すると

$n = 0 \quad \mu = 1.00$

$n = 1 \quad \mu = 0.042$

$n = 2 \quad \mu = 0.0024$

$n = 3 \quad \mu = 0.00013$

$n = 4 \quad \mu = 0.0000074$

$n = 5 \quad \mu = 0.00000042$

・・・・・・・・・・

となつて幾何級数的に減少する。

§6 む す び

以上の計算により、結論として大体次のような傾向を認めることができよう。

(1) 従来のコンクリート強度の変動に関する実測資料を参照すれば、普通よりやや悪い現場を対象として変異係数20%をとつたとき、実際のコンクリート強度が指定強度の⅔である許容応力度を下廻る確率、すなわちその許容応力度危険率は約5%内外である。

(2) 曲げを受ける部材の部材耐力の変動は、コンクリート強度よりもむしろ主として鉄筋降伏点の変動によつて支配せられる。

(3) しかし幸いに鉄筋自体の許容応力度危険率は通常の場合非常に小さいので、実際の部材耐力がその設計強度を下廻る確率、すなわちいわゆる設計強度危険率もまた小さい。

(4) コンクリート強度の弱点が構造物の耐力におよぼす影響は不静定次数が大きくなれば急速に減少する。

これは構造物の不静定次数が高い場合は、ある位置で平均より弱いコンクリートが現れれば他面同等の確率をもつて他の位置で平均より強い個所があらわれ、構造物の耐力を支配するすべての部材断面で同時にコンクリート強度の低いものがあらわれるという偶然の重なりが極めて稀なことに起因する。

但し以上の検討では計算を簡単にするため部材ならびに構造物の耐力を論ずるに当つて曲げ材だけを例にとり、軸方向力ならびに剪断力の影響を考慮に入れていない。例えば軸方向力が存在するとコンクリート強度が部材耐力を支配する様相が異つて来てその変動の影響も上述の計算結果よりも異なり且つより重要となることは当然であろう。

しかし、構造物を構成する各部材のうち特に水平荷重をうける場合には、その耐力が曲げによつて支配せられる場合が比較的多いという従来の経験と、またたとえ軸方向力あるいは剪断力の作用をうけても一般に不静定次数が高くなれば設計強度危険率が減少して来る関係には変りないだろうという点とを考慮すれば、上述の結論は一応定性的な傾向としてはこれを認めることができよう。