（９）プレストレストコンクリート梁の設計式に就いて

京大教授　工学博士　坂　静雄
○同大学院学生　六車　熙

（その１　eが核半径より大なるとき）

§1．序　文

P.S．コンクリート梁断面の設計は、断面に作用するすべての荷重に対してその縁応力が許容強度をこへないことにあり、Magnel Freyssinet等多くの設計法がある。[1][2] しかし、これらは何れも簡易設計法であつて、緊張力の有効率及び曲げモーメントの有効率が時間の函数であることを無視して居るために、実用的ではあるが場合によつては不経済危険な断面となることがある。そこで、筆者は合理的にP．S．コンクリート梁を設計する方法と設計式を提示したいと思ふ。但し、外力による曲げモーメントは一方向（自重による曲げモーメントと同符号）のみに働く場合を取扱う。

§2．設計条件式

$t=t_1$ のとき初期応力導入　$t=t_2$ のとき載荷するものとすれば、$t_1 \leq t \leq t_2$ の間に於てコンクリート上下両縁応力の満足すべき条件は、

$$-\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)-\xi(t-t_1)\frac{h_1}{I_c}M_d \leqq f_{ct} \qquad \text{(1)}$$

$$\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)-\xi(t-t_1)\frac{h_2}{I_c}M_d \leqq f_c \qquad \text{(2)}$$

$t=t_2$ 以後に於て満足すべき条件は、

$$\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)+\xi(t-t_1)\frac{h_1}{I_c}M_d+\xi(t-t_2)\frac{h_1}{I_c}M_w \leqq f_c \qquad \text{(3)}$$

$$-\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)+\xi(t-t_1)\frac{h_2}{I_c}M_d+\xi(t-t_2)\frac{h_2}{I_c}M_w \leqq f_{ct} \qquad \text{(4)}$$

となる。但し、

f_c；コンクリートの許容圧縮強度
f_{ct}；コンクリートの許容引張強度
M_d；自重による曲げモーメント
M_w；外力による曲げモーメント
A_c；コンクリートの断面積
I_c；コンクリート重心軸に対するコンクリートの断面二次モーメント
e　；コンクリート重心軸に対するピアノ線合応力筋の偏心距離（M＝P．eがMdと逆に働くときを正）
h_1，h_2；コンクリート重心軸より上下両縁までの距離
P；　初期緊張力
$\eta(t-t_1)$；$t=t_1$ 以後の初期応力有効率
$\xi(t-t_1)$；$t=t_1$ 以後の曲げモーメント有効率
$\xi(t-t_2)$；$t=t_2$ 以後の　〃　〃

以上の諸式が常に満足されるよう断面を設計するのであるが、各式の縁応力が最も不利となる時間に対して設計されれば最も経済的となる。即ち、(1)及び(2)は、$\eta(t)\leq\xi(t)$ であり t_1 と t_2 との差は小さい（普通４週程度）ことを考慮すれば、(3)(4)(5) $t=t_1$ のとき最も不利で、

$$-\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)-\frac{Md}{I_c}h_1 \leqq f_{ct} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)-\frac{Md}{I_c}h_2 \leqq f_{ct} \quad \cdots\cdots (6)$$

又、(3)及び(4)式は、t_1とt_2との差が小さければ$\xi(t-t_1) \fallingdotseq \xi(t-t_2)$とおいても大差なく、$\xi(t-t_1)$のかはりに$\xi(t-t_2)$を代入して考へれば、$t_2 \leqq t \leqq \infty$の時間に対して縁応力が最も不利になる時間は表－1のようになる。

表－1に示すCase I～Case IIIの中で最も起り易いのはCase I であつて、Case II及びCase IIIはその応用となるのでここでは省略し、Case I の場合についてのべることにする。即ち、コンクリート縁応力の満足すべき条件は

$$\eta(\infty-t_1)=\eta \qquad \xi(\infty-t_2)=\xi$$

と略記すれば

$$\eta\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)+\xi\frac{h_1}{I_c}(Md+M_w) \leqq f_c \quad \cdots\cdots (7)$$

$$-\eta\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)+\xi\frac{h_2}{I_c}(Md+M_w) \leqq f_{ct} \quad \cdots\cdots (8)$$

となる。

以上のべた事を図に画けば図－1のようになり、結局、(5)、(6)、(7)、(8)の4式を満足するよに設計すればよいことになる。

更に、断面を経済的に設計するには、図－2に示すようにh1とh2との大きさによつて、上にあげた4つの式の中3つの等号が成立つようにすればよいことに気づくであろう。即ち、設計条件式としては、

(a) h2がh1に比べて充分大きいときには、

$$-\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)-\frac{Md}{I_c}h_1 \leqq f_{ct} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_1\right)-\frac{Md}{I_c}h_2 = f_c \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\eta\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)+\xi\frac{h_1}{I_c}(Md+M_w) \leqq f_c \quad \cdots\cdots (11)$$

$$-\eta\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)+\xi\frac{h_2}{I_c}(Md+M_w) = f_{ct} \quad \cdots\cdots (12)$$

(b) h2とh1とが接近しているときには、

$$-\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)-\frac{Md}{I_c}h_1 = f_{ct} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)-\frac{Md}{I_c}h_2 = f_c \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\eta\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)+\xi\frac{h_1}{I_c}(Md+M_w) = f_c \quad \cdots\cdots (15)$$

$$-\eta\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)+\xi\frac{h_2}{I_c}(Md+M_w) \leqq f_{ct} \quad \cdots\cdots (16)$$

となる。但し、上式で(a)の場合には(9)式の等号が成立つときには(11)式の不等号が成立ち、(11)式の等号が成立つときには(9)式の不等号が成立つことを示し、又(b)の場合の(14)、(16)式についても同様のことを示すものとする。即ち、(a)(b)夫々の場合についての設計条件式は、(a)の場合には(9)、(10)、(12)、又は(10)、(11)、(12)(b)の場合には(13)、(14)、(15)又は(13)、(15)、(16)の3式の等号が成立つよう断面を決めればよいわけである。但し、各々の場合について残りの式が満足されねばならず、結局後にのべるようにこの満足されるべき条件がh1及びh2の大きさの関係を示すことになるのである。

猶、以上の諸式に於て、初期応力を有効に働かすために、$h_1 \leqq h_2$であるものとする。

§3 設 計 式

(a) h₂がh₁に比べて充分大きいとき、前述のように設計条件式は(9)，(10)，(12)又は(10)，(11)，(12)の3式の等号が成立する場合となつた。前者をCase A，後者をCase Bとすれば、夫々の場合について未知数を定めれば次のようになる。

Case A

設計条件式は

$$-\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)-\frac{Md}{I_c}h_1=f_{ct}$$

$$\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)-\frac{h_2}{I_c}Md=f_c$$

$$-\eta\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)+\xi\frac{h_2}{I_c}(Md+Mw)=f_{ct}$$

以上の3式より未知数を求めれば

$$\frac{I_c}{h_2}=\frac{\xi Mw+(\xi-\eta)Md}{f_{ct}+\eta f_c} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\frac{P}{A_c}=\frac{h_1 f_c-f_{ct}h_2}{h_1+h_2} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$Pe=\frac{I_c}{h_1+h_2}(f_c+f_{ct})+Md \quad \cdots\cdots (19)$$

Case B

設計条件式は

$$\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)-\frac{h_2}{I_c}Md=f_c$$

$$\eta\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)+\xi\frac{h_1}{I_c}(Md+Mw)=f_c$$

$$-\eta\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)+\xi\frac{h_2}{I_c}(Md+Mw)=f_{ct}$$

以上の3式より未知数を求めれば

$$\frac{I_c}{h_2}=\frac{\xi Mw+(\xi-\eta)Md}{f_{ct}+\eta f_c} \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\frac{P}{A_c}=\frac{h_2 f_c-h_1 f_{ct}}{\eta(h_2+h_1)} \quad \cdots\cdots (21)$$

$$Pe=\frac{\xi}{\eta}(Md+Mw)-\frac{I_c}{\eta(h_1+h_2)}(f_{ct}+f_c) \quad \cdots\cdots (22)$$

以上の諸式は、夫々残りの条件式を満足せねばならない。即ち、(17)，(18)，(19)を(11)式に、(20)，(21)，(22)を(9)式に代入して整理すれば、どちらの場合についても

$$\frac{h_1}{h_2}\leq\frac{f_c+\eta f_{ct}}{f_{ct}+\eta f_c} \quad \cdots\cdots (23)$$

を得る。即ち、(23)の条件が成立するときに限り以上の取扱ができるわけである。又(23)の等号が成立つときに限つてCase AからもCase Bからも同様断面が設計できるわけである。(23)の不等号の場合には、断面の大きさが等しいから初期応力の小さい方が経済的である。即ち、(21)−(18)より

$$\frac{h_2 f_c-f_{ct}h_1}{\eta(h_2+h_1)}-\frac{h_1 f_c-h_2 f_{ct}}{h_2+h_1}$$

$$=\frac{f_c(h_2-\eta h_1)}{\eta(h_2+h_1)}\left\{1-\frac{f_{ct}}{f_c}\cdot\frac{h_1-\eta h_2}{h_2-\eta h_1}\right\}>0 \quad \cdots\cdots (24)$$

故にCase Aの方がCase Bよりも経済的であることになる。

(b) h₂とh₁とが接近しているとき

設計条件式は(13),(14),(15),又は(13),(15),(16)の3式の等号が成立する場合であり、前者をCase A,後者をCase Bとして夫々の場合につき未知数を求めれば次のようになる。

Case A

$$\frac{I_c}{h_1}=\frac{M_d(\xi-\eta)+\xi M_w}{\eta f_{ct}+f_c} \quad \text{-----------} (25)$$

$$\frac{P}{A_c}=\frac{h_1 f_c-h_2 f_{ct}}{h_1+h_2} \quad \text{-----------} (26)$$

$$P_e=M_d+\frac{I_c}{h_1+h_2}(f_c+f_{ct}) \quad \text{-----------} (27)$$

Case B

$$\frac{I_c}{h_1}=\frac{M_d(\xi-\eta)+\xi M_w}{f_c+\eta f_{ct}} \quad \text{-----------} (28)$$

$$\frac{P_e}{A_c}=\frac{h_2 f_c-h_1 f_{ct}}{\eta(h_1+h_2)} \quad \text{-----------} (29)$$

$$P_e=\frac{\xi}{\eta}(M_d+M_w)-\frac{I_c}{\eta(h_1+h_2)}(f_c+f_{ct}) \quad \text{-------} (30)$$

(a)の場合と同様にして上式の成立つ範囲を求めれば

$$\frac{h_1}{h_2}\geq\frac{f_c+\eta f_{ct}}{f_{ct}+\eta f_c} \quad \text{-----------} (31)$$

となり、(31)の等号が成立つ場合にはCase AでもCase Bでも同じ断面が設計できる。(31)の不等号が成立つ場合には断面の大きさが同じであるから初期応力の小さい方が経済的である。

即ち、(29)-(26)を作つて比較すればCase Aの方が経済的となる。

猶以上の設計式でMdは断面の大きさが決まらぬと求めることができぬが、これは繰返し試案法で以上の設計式を満足するように断面を決めればよい。

（その2　eが核半径より小なるとき）

§1.設計条件式

この場合もeが核半径より大なるときと同様に取扱ふことができる。即ち、縁応力の満足すべき条件は

初期応力導入時($t_1\leq t\leq t_2$)

$$\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}-\frac{P_e}{I_c}h_1\right)+\frac{M_d}{I_c}h_1\xi(t-t_1)\leq f_c \quad \text{-----------} (1)$$

$$\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}+\frac{P_e}{I_c}h_2\right)-\frac{M_d}{I_c}h_2\xi(t-t_1)\leq f_c \quad \text{-----------} (2)$$

載荷後($t_2\leq t\leq\infty$)

$$\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}-\frac{P_e}{I_c}h_1\right)+\xi(t-t_1)\frac{h_1}{I_c}M_d+\xi(t-t_2)\frac{h_1}{I_c}M_w\leq f_c \quad \text{----} (3)$$

$$-\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{A_c}+\frac{P_e}{I_c}h_2\right)+\xi(t-t_1)\frac{h_2}{I_c}M_d+\xi(t-t_2)\frac{h_2}{I_c}M_w\leq f_{ct} \quad \text{---} (4)$$

となる。而して、eが核半径より大なるときと同様にして最も縁応力が不利となる時間をとり、又、(3)式が成立てば(1)式は自づから満足されることも考慮すれば、設計条件式は一般に

$$\left(\frac{P}{Ac}+\frac{Pe}{Ic}h_2\right)-\frac{h_2}{Ic}Md=f_c \text{ ---------------------(5)}$$

$$\eta(t_2-t_1)\left(\frac{P}{Ac}-\frac{Pe}{Ic}h_1\right)+\frac{h_1}{Ic}(Md+Mw)\leqq f_c \text{ ----------(6)}$$

$$-\eta(t-t_1)\left(\frac{P}{Ac}+\frac{Pe}{Ic}h_2\right)+\xi(t-t_2)\frac{h_2}{Ic}(Md+Mw)=f_{ct} \text{ ----(7)}$$

となる。(7)式は一般に $t=\infty$ のときと $t=t_2$ のときのどちらかで縁応力が最も不利となる。このことは図－1をみればすぐ判ることである。又、(6)式は図－2に示すように、eが核半径より小であるから、適当にP及びeを決めることによつて等号の成立つ場合とeが核半径一杯となる場合との二つになる。故に、設計条件式は、(5)，(6)，(7)のすべての等号が成立つ場合と、eを核半径一杯にとつた場合の二つに分かれる。即ち、前者をCaseA後者をCase B とすれば

Case A

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{P}{Ac}+\frac{Pe}{I_c}h_2\right)-\frac{h_2}{I_c}Md=f_c\\&\eta_1\left(\frac{P}{Ac}-\frac{Pe}{I_c}h_1\right)+\frac{h_1}{Ic}(Md+Mw)=f_c\\&-\eta_2\left(\frac{P}{Ac}+\frac{Pe}{Ic}h\right)+\xi\frac{h_2}{Ic}(Md+Mw)=Act\end{aligned}\right\}\text{ ------(8)}$$

Case B

$$\left.\begin{aligned}&\frac{P}{Ac}\left(1+\frac{h_2}{h_1}\right)-\frac{h_2}{Ic}Md=f_c\\&\frac{h_1}{Ic}(Md+M_w)\leqq f_c\\&-\eta_2\frac{P}{Ac}\left(1+\frac{h_2}{h_1}\right)+\xi\frac{h_2}{Ic}(Mw+Md)=f_{ct}\end{aligned}\right\}\text{ ------(9)}$$

但し上式で

$\eta_1=\eta(t_2-t_1)$

$\eta_2=\eta(t-t_1)$ 　　但し　$t=\infty$ 又は $t=t_2$

$\xi=\xi(t-t_2)$ 　　但し　$t=\infty$ 又は $t=t_2$

である。

§2．設 計 式

Case A

(8)式より未知数を求めれば次のようになる。

$$\frac{Ic}{h_2}=\frac{Md(\xi-\eta_2)+\xi Mw}{fc\eta_2+f_{ct}} \text{ ----------------------(10)}$$

$$\frac{P}{Ac}=\frac{h_1h_2}{\eta_1(h_1+h_2)}\left\{f_c\frac{h_2+\eta_1h_1}{h_1h_2}-\frac{Md(1-\eta_1)+Mw}{fc}\right\} \text{ ---------(11)}$$

$$Pe=\frac{(h_1\eta_2+h_2\eta_1\xi)(Md+Mw)-Ic(f_{ct}\eta_1+f_c\eta_2)}{\eta_1\eta_2(h_1+h_2)} \text{ --------(12)}$$

(10)，(11)，(12)式の成立つ範囲はeが核半径よりも小であるから

$$\frac{P}{Ac}-\frac{Pe}{Ic}h_1\geqq 0 \text{ ---------------------(13)}$$

でなければならぬ。即ち(13)に(10)，(11)，(12)を代入して整理すれば

$$\frac{h_2}{h_1} \geq \frac{(Md+Mw)(f_{ct}+f_c\eta_2)}{f_c\{Md(\xi-\eta_2)+\xi Mw\}} \quad \text{------------} (14)$$

となる。

又、(10),(11),(12) に於て、(7)式が最も不利となるときが $t=t_2$ の場合には、

となるので($t=t_2$ の場合は特別な場合しか起らない)

$$\frac{I_c}{h_2} = \frac{Md(1-\eta_1)+Mw}{f_c\eta_1+f_{ct}} \quad \text{------------} (15)$$

$$\frac{P_c}{A_c} = \frac{f_c h_2 - f_{ct} h_1}{\eta_1(h_1+h_2)} \quad \text{------------} (16)$$

$$P_e = \frac{1}{\eta_1}\left\{(Md+Mw) - \frac{I_c(f_c+f_{ct})}{h_1+h_2}\right\} \quad \text{------------} (17)$$

となる。

Case B

(9)式より未知数を求めれば

$$\frac{I_c}{h_2} = \frac{Md(\xi-\eta_2)+Mw\xi}{f_{ct}+f_c\eta_2} \quad \text{------------} (18)$$

但し、$\dfrac{I_c}{h_1} \geqq \dfrac{(Md+Mw)}{f_c}$ ------------ (19)

$$\frac{P}{Ac} = \frac{f_c\xi(Md+Mw)+f_{ct}Md}{(1+\frac{h_2}{h_1})(Md(\xi-\eta_2)+Mw\xi)} \quad \text{------------} (20)$$

となりこの式の成立する範囲は、Case A の場合と同じく (14) 式で表はされる。

又(7)式の最も不利となる時間が $t=t_2$ のときには、

$$\frac{I_c}{h_2} = \frac{Md(1-\eta_1)+Mw}{f_{ct}+f_c\eta_1} \quad \text{------------} (21)$$

但し $\dfrac{I_c}{h_1} \geqq \dfrac{Md+Mw}{f_c}$

$$\frac{P}{Ac} = \frac{f_c(Md+Mw)+f_{ct}Md}{(1+\frac{h_2}{h_1})\{Md(1-\eta_1)+Mw\}} \quad \text{------------} (22)$$

となる。

§3．梁の設計

以上のようにして断面は簡単に設計ができるが、梁全体の設計に当つては次のようにするのが望ましい。

(1) 基準断面の設計

設計式をみれば判るように、断面の大きさは、有効率 $\eta(t)$ 及び $\xi(t)$ を合理的に仮定することによつて、[5] P及び e とは無関係に決めることができる。故に、梁全体で最も大きい断面の必要な所、即ち曲げモーメントが最大となる所について決めればよい。例へば単純梁に一様荷重が分布しているときには梁の中央部の断面に対して以上の設計をすればよいわけである。(このような断面を基準断面とよぶ。)

(2) 任意断面の設計

基準断面以外の設計は断面の大きさを例へば一様とすれば、初期応力は決まつているから結局、偏心距離 e の大きさで加減する。即ち任意断面の曲げモーメントを Mdx、Mwxとし、偏心距離を exとすれば、設計条件式は exが核半径より小さいときを

例にとれば

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe_x}{I_c}h_2\right)-\frac{h_2}{I_c}M_{dx}\leq f_c\\&\eta_1\left(\frac{P}{A_c}-\frac{Pe_x}{I_c}h_1\right)+\frac{h_1}{I_c}(M_{dx}+M_{wx})\leq f_c\\&-\eta_2\left(\frac{P}{A_c}+\frac{Pe_x}{I_c}h_2\right)+\xi\frac{h_2}{I_c}(M_{dx}+M_{wx})\leq f_{ct}\end{aligned}\right\}\text{------(23)}$$

であり、これより

$$e_x\leq\frac{1}{P}\left\{\frac{I_c}{h_2}\left(f_c-\frac{P}{A_c}\right)+M_{dx}\right\}\text{------------(24)}$$

$$e_x\geq\frac{1}{\eta_1 P}\left\{\left(\eta_1\frac{P}{A_c}-f_c\right)+(M_{dx}+M_{wx})\right\}\text{----------(25)}$$

$$e_x\geq\frac{1}{\eta_2 P}\left\{\xi(M_{dx}+M_{wx})-\frac{I}{h_2}\left(\eta_2\frac{P}{A_c}+f_{ct}\right)\right\}\text{------(26)}$$

となり、(23)がすべて成立つためには、(24)、(25)、(26) で示されるe xの範囲内へeを適当に選定すればよいことになる（図－3参照）

猶、途中で緊張材を減らしていつた方が経済的であるが、これは緊張材を減らす点を基準断面として再び前と同様に設計していけばよいわけで以上のべたことの応用となる。又断面を変断面とする場合も同様に応用として取扱ふことができる(6)がここでは省略する。

参考文献

(1) G.Magnel : Prestressed Concrete（１９５０）

(2) Y Guyon : Prestressed Concrete（１９５３）

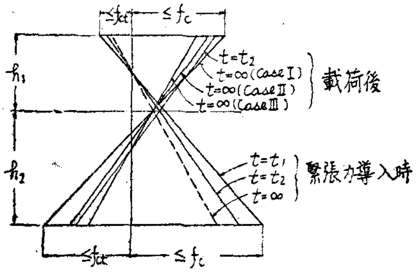
(3) S, Ban,K Okada, H, Muguruma : Calculation of Stress and Design Formula for the Prestressed Concrete Section
（Technical Reports of Eng, Research Inst., Kyoto Univ.
Vol Ⅳ No.2）

(4) 坂、六車：Ｐ．Ｓ．コンクリート梁の設計式について（その２）（建築学会研究報告第27号，昭２９，５）

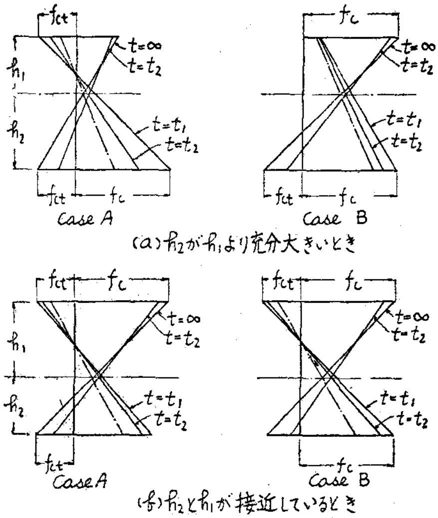
(5) 坂、六車：初期応力有効率について（補）
（建築学会研究報告、近畿支部研究会　昭２９．６）

(6) 坂、六車：Ｐ．Ｓコンクリート梁の設計式について（変断面の場合）（建築学会研究報告　第２４号　昭２８．１０）

図—1



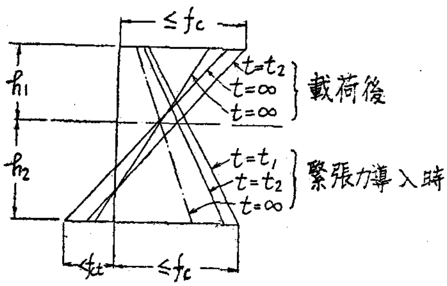
図—2



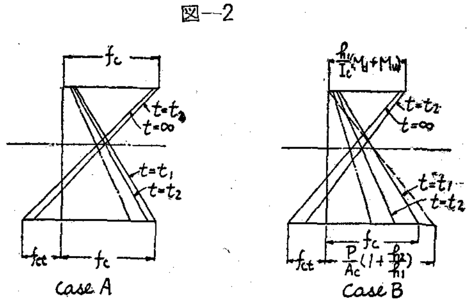
表—1

	Case I	Case II	Case III
(3)式	$t=\infty$	$t=t_2$	$t=t_2$
(4)式	$t=\infty$	$t=\infty$	$t=t_2$

図—1



図—2



図—3