広域な陸域氾濫予測のための高精度・高効率な浅水長波ソルバーの開発

九 州 大 学 学生会員 ○松本 礼央
広島工業大学 正 会 員 田中 聖三
九 州 大 学 正 会 員 浅井 光輝

1. 目的

河川の氾濫や高潮などの数値解析には，浅水長波方程式が広く用いられている．浅水長波方程式は双曲型の方程式であり，不連続な解を有することによる数値不安定性が生じるため，離散化に CG（Continuous Galerkin）法に基づく安定化有限要素法を用いることが多い．ただし，CG 法では，流れの FEM においては質量保存などの保存則を厳密に満足することは困難である．そこで，保存性を満足できる有限体積法の良さを持ち合わせる DG（Discontinuous Galerkin）法が期待されている．また，DG 法はローカルに解を高精度化できるといったメリットも併せ持つ．例えば，局所的に高次補間要素を適用することで高精度化を図り，さらに直交基底関数を用いることで陽的な処理が可能となるため，高速かつ高精度なソルバーへとの発展も期待できる．

本研究は，浅水長波方程式の離散化に DG 法を適用し，従来の CG 法（SUPG 法に基づく安定化有限要素法[1)]）との数値解析結果の比較により，まずは DG 法の有効性の検討からはじめた．

2. 数値解析手法

2.1 支配方程式

支配方程式には，以下に示す浅水長波方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{R} = 0 \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{U}$は保存変数，$\mathbf{F}(\mathbf{U})$は流束関数，$\mathbf{R}$はソース項であり，以下のように定義される．

$$\mathbf{U} = [h,\quad uh,\quad vh]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = [\mathbf{F}_1(\mathbf{U}),\quad \mathbf{F}_2(\mathbf{U})]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_2(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \left[0 \quad -gh\frac{\partial z}{\partial x} \qquad -gh\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

ここで，hは水深，uおよびvはx，y軸方向の断面平均流速，gは重力加速度であり，zは基準面からの高さである（**図-1** 参照）．

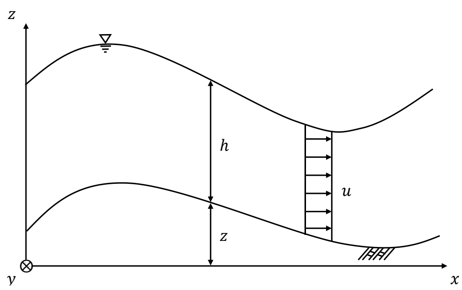

図-1 座標系

2.2 空間方向の離散化

支配方程式に対して，各内部要素の集合を$\widetilde{\Omega}$，その要素境界の集合をΓ_{int}とし，空間方向の離散化として DG 法を適用すると，以下に示す弱形式が得られる．

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \boldsymbol{w}^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} \mathrm{d}\Omega - \int_{\widetilde{\Omega}} \nabla \boldsymbol{w}^h \cdot \boldsymbol{F}(\mathbf{U}^h) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{\mathrm{int}}} [\![\boldsymbol{w}^h]\!] \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}^{h-}) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\widetilde{\Omega}} \boldsymbol{w}^h \cdot \mathbf{R} \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{w}^h$は要素ごとに定義される不連続な重み関数であり，$[\![\boldsymbol{w}^h]\!] = \boldsymbol{w}^{h+} - \boldsymbol{w}^{h-}$である．要素境界における$+, -$は，法線ベクトルが向く方向を$+$，もう一方を$-$と定義する．$\mathbf{n} = \left[n_x, n_y\right]^{\mathrm{T}}$は$\Gamma$の外向き法線ベクトルである．

2.3 時間方向の離散化

式(5)をまとめると，以下のように時間に関する常微分方程式として表される．

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) \tag{6}$$

式(6)に対して，陽的 3 段 3 次精度 Runge-Kutta 法を用いると，以下のように離散化できる．

$$\overline{\boldsymbol{U}}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{U}^n + \frac{\Delta t}{2}\dot{\boldsymbol{U}}^n \tag{7}$$

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{n+1} = \boldsymbol{U}^{n} + \Delta t\left(-\dot{\boldsymbol{U}}^{n} + 2\dot{\bar{\boldsymbol{U}}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^{n} + \frac{\Delta t}{6}\left(\dot{\boldsymbol{U}}^{n} + 4\dot{\bar{\boldsymbol{U}}}^{n+\frac{1}{2}} + \dot{\bar{\boldsymbol{U}}}^{n+1}\right) \tag{9}$$

2.4 移動境界手法

陸域での洪水氾濫を解く場合，移動する水際境界を考慮する必要がある．本研究では，あらかじめ広域にわたりメッシュ分割を行い，その中で水深の有無を判定しながら水流域を決めていく手法[2)]を用いる．

本手法では，設定した微小水深と，計算領域全体で浅水長波方程式を解き，得られた水深の大きさから陸水判定を行う．要素内の 3 節点全てが微小水深以下となった場合，その要素は陸域とし，重ね合わせから除外する．水際要素の流速については以下に示す境界条件を与える．

$$\mathrm{u}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{i(dry)}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{u_i}{3} \tag{6}$$

これにより，単純に流速 0 として計算を行う場合と比較して，水際要素における流速の減衰を抑え，自然な結果を得ることができる．

3. 数値解析例

本手法の有効性を検討するために，ダムブレークによる遡上問題を取り上げ，CG 法による計算結果との比較を行う．なお，CG 法の空間方向の離散化には SUPG 法に基づく安定化有限要素法，時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を用い，要素としては DG 法，CG 法ともに三角形 1 次要素を用いた．（DG 法の結果は当日発表予定）

解析モデルを**図-2** に示す．x方向，y方向分割幅はともに 0.05[m]，微小時間増分量は 0.001[s]とした．また，CG 法の微小水深は 5.0×10^{-3}[m]とした．解析結果として，**図-3**，**図-4** にそれぞれ 1 秒後，3.5 秒後の水面形状を示す．図より，CG 法では微小水深を十分に小さな値を設定することができず，波の先端が切り立ってしまう結果となった．

4. おわりに

本研究では，浅水長波方程式の離散化に DG 法を適用し，その有効性を検討した．数値解析例として，ダムブレークによる遡上問題を取り上げ，CG 法と DG 法（結果は当日発表予定）との比較を行った．

今後は，DG 法への気泡関数要素の導入など，浅水長波ソルバーの高精度・高効率化を検討していく計画である．

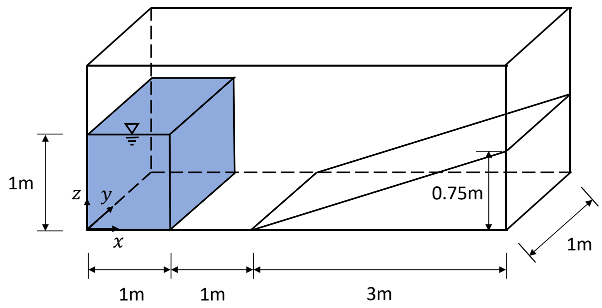

図-2 解析モデル

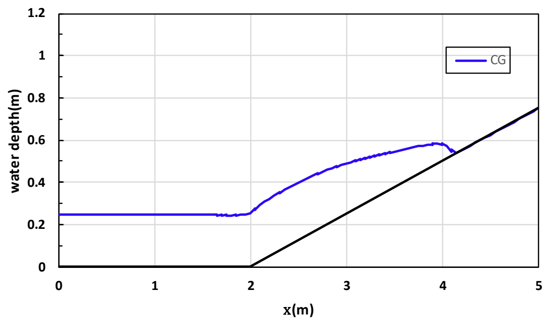

図-3 1 秒後の水面形状

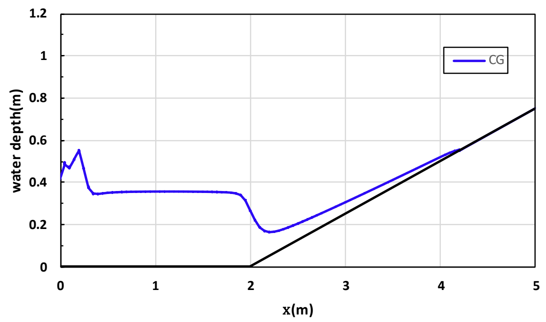

図-4 3.5 秒後の水面形状

参考文献

1) S.Takase, K.Kashiyama, S.Tanaka and T.E.Tezduyar : Space-time SUPG formulations of the shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.64, pp.1379-1394, 2010.

2) 松本純一，梅津剛，川原睦人：陰的有限要素法による浅水長波流れと河床変動解析，応用力学論文集, Vol.1, pp.263-272, 1998.