線状の軸方向傾斜機能材料の縦自由振動問題への B-spline Ritz 法の適用性

大分工業高等専門学校　学生会員　○安　部　萌　　大分工業高等専門学校　正 会 員　名 木 野 晴 暢
豊 橋 技 術 科 学 大 学　非 会 員　足 立 忠 晴

1. まえがき

傾斜機能材料は建設分野においても幅広い応用が期待され，この材料からなる構造部材の自由振動に関する研究が国外で多くなされている．連続体の仮定の下で軸方向傾斜機能材料（以下，AFGMs）の自由振動性状を調べるとき，不均質な複合材料である AFGMs を等価な均質材料に置き換える平均化（または均質化）は重要な手続きである．

母相と粒子相からなる二成分系 AFGMs の最も単純な平均化は線形複合則 [1)]であろう．巨視的な材料特性は陽な形式で表現され，取り扱いも簡単である．しかし，母材と介在物の相互作用が十分に考慮されていない．Mori-Tanaka 法 [2), 3)]は，Eshelby の等価介在物法（代表体積要素による平均応力・ひずみ）に介在物間の相互作用を近似的に考慮した解析的な平均化手法の一つで, 線形複合則よりも精度の高い平均化が期待できる．

本稿では，二成分系 AFGMs の巨視的材料特性を Mori-Tanaka 法によって推定した線状の AFGMs（以下，不均質棒）の縦自由振動問題への B-spline Ritz 法 [1)]の適用性を調査したので報告する．

2. 解析モデル

有限長さ L を有する両端が自由な真っ直ぐな不均質棒の縦自由振動問題を考える．棒の軸線を x 軸とし，その方向の変位を $u_x(x, t)$で表す．棒は線形弾性であるとし, その運動は微小ひずみ, かつ固有円振動数ωで調和振動するとする．

3. Love の理論に基づく不均質棒の縦自由振動問題

変位振幅を $u(x)$で表すとき，Love の理論 [4)]に従う不均質棒の縦自由振動の支配方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}N(x)}{\mathrm{d}x} + \omega^2 \rho(x) A(x) u(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \in (0, L)\,. \tag{1}$$

ここで, $\rho(x)$は不均質棒の密度, $A(x)$は断面積である．また，$N(x)$は合応力であり，

$$\begin{aligned} N(x) &= E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \\ &\quad \underline{-\omega^2 \left\{ \rho(x)A(x)\nu^2(x)r^2(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \right\}}. \end{aligned} \tag{2}$$

ただし, $E(x)$は縦弾性係数，$\nu(x)$はポアソン比であり，$r(x)$は断面 2 次極モーメントに関する回転半径である．

境界$\Gamma = \{0, L\}$での境界条件式は,

$$u = \bar{u} \quad \text{or} \quad n_x N = \bar{N} \quad \text{on} \quad \Gamma = \{0, L\}\,. \tag{3}$$

ただし，n_xは棒の境界点に立てた外向き法線の方向余弦の x 方向の成分であり，$n_x = -1$ は境界$\Gamma_0 = \{0\}$を意味し，$n_x = +1$ は境界$\Gamma_L = \{L\}$を意味する．

4. Mori-Tanaka 法による AFGMs の巨視的特性の推定

材料 1（母相，metal）と材料 2（粒子相，ceramic）からなる二成分系 AFGMs を考える．Mori-Tanaka 理論に基づくとき，領域内の点 x における AFGMs の平均有効体積弾性係数 $K(x)$と平均有効せん断弾性係数 $G(x)$は，それぞれ，次式のように表される [2), 3)]．

$$\frac{K(x) - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2(x)}{1 + \{1 - V_2(x)\} f_K}\,, \quad f_K = \frac{K_2 - K_1}{K_1 + \frac{4}{3}\underline{G_1}} \tag{4}$$

$$\frac{G(x) - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2(x)}{1 + \{1 - V_2(x)\} f_G}\,, \quad f_G = \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \underline{\frac{(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} G_1}} \tag{5}$$

ここで，$V_2(x)$は材料 2 の体積分率であり,

$$K_j = \frac{E_j}{3(1 - 2\nu_j)}\,, \quad G_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)} \quad (j = 1, 2) \tag{6}$$

である．領域内の各点での二成分系 AFGMs の平均有効縦弾性係数 $E(x)$と平均有効ポアソン比$\nu(x)$は，体積弾性係数 $K(x)$とせん断弾性係数 $G(x)$との関係式

$$E(x) = \frac{9K(x)G(x)}{3K(x) + G(x)}\,, \quad \nu(x) = \frac{3K(x) - 2G(x)}{2\{3K(x) + G(x)\}}\,, \tag{7}$$

から求められ，陽な形の有理関数で表現される．

粒子相の体積分率 $V_2(x)$を次のように仮定する [1)]．

$$V_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^p\,, \quad V_1(x) + V_2(x) = 1 \tag{8}$$

ここで，p は傾斜分布パラメータ（材料の設計変数）であり，$V_1(x)$は材料 1 の体積分率である．

なお，二成分系 AFGMs の密度$\rho(x)$は，線形複合則により各点での平均密度を得ることができる．ρ_1 とρ_2を，それぞれ，材料 1 と材料 2 の密度とすれば,

$$\rho(x) = \rho_1 V_1(x) + \rho_2 V_2(x)\,. \tag{9}$$

本研究では，B-spline Ritz 法 [1)]に Mori-Tanaka 法を実装するために，式(7)および式(7)の x に関する一階導関数を計算する副プログラムを作成した．その妥当検証は，数式処理システム Maxima を用いて行った．

表-1　均質棒の縦自由振動問題における本手法の数値解の収束性と精度比較: $p_x = 4$, $\nu = 0.3$, $\Lambda_0^2 = 10$

	$L/r = 10$			$L/r = 100$		
m_x	Λ_{1st}	Λ_{2nd}	Λ_{3rd}	Λ_{1st}	Λ_{2nd}	Λ_{3rd}
5	3.127732379301	6.1747925318	9.072372287	3.14145341783	6.2824282359	9.42453225
11	3.127732099939	6.1744518850	9.069236853	3.14145313477	6.2820694639	9.42101749
21	3.127732099808	6.1744518043	9.069232821	3.14145313464	6.2820693788	9.42101297
31	3.127732099808	6.1744518040	9.069232811	3.14145313464	6.2820693786	9.42101296
41	3.127732099808	6.1744518040	9.069232811	3.14145313464	6.2820693786	9.42101296
Exact	3.127732099808	6.1744518040	9.069232811	3.14145313464	6.2820693786	9.42101296

表-2　架空の AFGMs 棒の縦自由振動問題における本手法の数値解の収束性と精度比較: $p_x = 4$, $L/r = 100$, $\Lambda_0^2 = 10$

	$\nu = 0$			$\nu = 0.3$		
m_x	Λ_{1st}	Λ_{2nd}	Λ_{3rd}	Λ_{1st}	Λ_{2nd}	Λ_{3rd}
5	2.94667201388	5.7951470914	8.673844561	2.94653499953	5.7940973518	8.670329634
11	2.94667175577	5.7949423117	8.666254447	2.94653474144	5.7938927500	8.662738813
21	2.94667175564	5.7949422265	8.666249803	2.94653474130	5.7938926649	8.662734173
31	2.94667175564	5.7949422263	8.666249791	2.94653474130	5.7938926646	8.662734161
41	2.94667175564	5.7949422263	8.666249791	2.94653474130	5.7938926646	8.662734161
p-Ritz[6)]	2.94667175564	5.79494223	8.66625	-	-	-

5. B-spline Ritz 法による振動数方程式の定式化

不均質棒が自由振動するときの運動エネルギを T, ひずみエネルギを U とするとき，汎関数 $\Pi = U + T$ の変関数 u を B-spline 基底関数で近似する [1)].

$$u(x) \cong \sum_{i=1}^{i_x} A_i N_{i,p_x}(x) = \boldsymbol{NA} \tag{10}$$

Mori-Tanaka 法で平均化した $E(x)$, $\nu(x)$および$\rho(x)$を汎関数Π に代入し，その停留条件（$\Pi = 0$）から,

$$(\boldsymbol{K} - \Lambda^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}\,,\ \ \Lambda = \omega L\sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}} = \frac{\omega L}{c_0} \tag{11}$$

を得る．ここで，Λ は無次元化された固有円振動数である. 両端自由の不均質棒は剛体運動を許すため, $\boldsymbol{K}$ は一般に正則でない．一方で，本手法の $\boldsymbol{M}$ は正則な正定値対称行列であるので，原点移動（シフト量Λ_0^2）により $\boldsymbol{K}$ を正則な対称行列に変換し，Λと $\boldsymbol{A}$ を求めた.

6. 数値実験および考察

本手法へ Mori-Tanaka 法を実装するための準備として，まず，均質材料および架空の AFGMs の縦自由振動問題を例題として, 作成したコードの検証を行った.

表-1 は，均質棒の縦自由振動問題における本手法の数値解の収束性と精度比較である．細長比 L/r は 10 と 100 に設定し，ポアソン比ν は 0.3 とした．Spline 次数 $p_x = 4$ に設定し，ノットの数 m_x を 5 から 41 まで増加させたときの基本固有円振動数Λ_{1st} から 3 次の固有円振動数Λ_{3rd} の変化を調べた．同表より，L/r と振動次数によらず, m_x の増加にともなってΛ は一定値へ収束する．本例題は剛体モードを含むが，数値計算は安定しており，有効数字 10 桁程度の収束値が得られている. また，その収束値は厳密解と一致している.

架空の AFGMs 棒の縦自由振動問題における本手法の数値解の収束性と精度比較を表-2 に示した. AFGMs の材料特性は，文献 5)の $E(x)/E_0 = 1 + (x/L)$, $\rho(x)/\rho_0 = 1 + (x/L) + (x/L)^2$ を採用した．この例題は $E(x)$と$\rho(x)$を意図的に異なる形式で与えるため，副プログラムのコードの検証に適している．細長比 $L/r = 100$ に設定し，ν は 0 と 0.3 を一様分布とした．前者は面外慣性を考慮しない古典理論，後者は面外慣性を考慮した Love の理論 [4)]の解を与える．離散化条件は，表-1 と同様である. なお, この例題の参照解が見当たらなかったので, $\nu = 0$ については文献 6)の計算コードを用いて比較解を求めた．表中の参照解の数値は p-Ritz 法の収束値であり, 高次になると有効桁数が少なくなる. 同表より, νや振動次数にかかわらず，本手法の収束性は良好であり, 有効数字 10 桁程度の収束値が得られる. 数値計算も安定しており, その計算精度は高いと考えられる.

現在，本手法への Mori-Tanaka 法の実装に取り組んでおり，数値実験結果は当日報告する予定である.

謝辞：本研究は，JSPS 科研費 22K04296 の助成を受けて行われています.

参考文献

1) 新宮ら: 土木構造・材料論文集, 38 (2022).（登載決定）
2) Mori and Tanaka: Acta Metallurgica, 21 (1973) 571-574.
3) Benveniste: Mechanics of Materials, 6 (1987) 147-157.
4) Graff: Wave motion in elastic solids, Dover Publications, Inc., New York (1991) 116-120.
5) Shahba et al.: Shock and Vibration 18 (2011) 683–696.
6) 名木野・足立: 土木構造・材料論文集, 36 (2020) 87-97.