面外せん断変形と初期応力を考慮した軸方向傾斜機能材料からなる長柱の線形座屈問題への B-spline Ritz 法の適用について

大分工業高等専門学校　学生会員　○伊 東 竜 哉　　大分工業高等専門学校　正 会 員　名 木 野 晴 暢
豊 橋 技 術 科 学 大 学　非 会 員　足 立 忠 晴

1. まえがき

傾斜機能材料は建設分野においても幅広い応用が期待され，研究者などから多くの注目を集めている[1]．著者らは傾斜機能材料を建設分野へ応用する際の基礎資料の収集を目的として，軸方向傾斜機能材料（Axially Functionally Graded Materials: 以下 AFGMs）からなる長柱（以下，傾斜機能長柱）の線形座屈性状を線形化された梁－柱理論に基づいて明らかにしてきた[2), 3)]．「断面形不変の仮定」および「Bernoulli-Euler の仮定」に従うこの理論は，断面の面外せん断変形と回転慣性の影響が無視されているため，その適用範囲は細長比が十分に大きな長柱に限定される．また，臨界座屈荷重は，真の値に対して過大評価される．傾斜機能長柱は軸方向にせん断剛性が変化するため，面外せん断変形の影響を考慮する必要があると考えられる．

一次せん断変形理論に基づく傾斜機能長柱の線形座屈問題は有限要素法（FEM）[4)]，べき級数法（PSM）[5)]や有限差分法（FDM）[6)]などにより解析されている．一次せん断変形理論では Trefftz の理論[7)]に基づいて初期応力を考慮したつり合い条件式を導出することが可能で，面外せん断変形に加えて初期応力による曲率項の影響も考慮される．しかし，これに基づいて傾斜機能長柱の線形座屈性状を解析した報告は見当たらない．

本稿では，まず，文献 7)を参考にして一次せん断変形理論と Trefftz の理論に基づく傾斜機能長柱の線形座屈問題の強形式を導出した．次に，本問題へ B-spline Ritz 法[2), 3)]を適用し，近似解と離散化条件の関係および解析精度について調査したので報告する．

2. 解析モデル

xz 平面内にある長さ L の AFGMs からなる等断面の長柱の両端に図心軸圧縮荷重 $P = -\sigma_0 A$ が作用するときの弾性分岐座屈問題を考える．ただし，σ_0 は長柱の断面積 A に一様にはたらく初期（引張）応力である．長柱の軸線を x 軸とし，その直角下向きに z 軸を設定する．また，x 軸および z 軸方向の変位を，それぞれ，$u_x(x, z)$ および $u_z(x, z)$ で表す．

3. Timoshenko 梁理論と Trefftz 理論[7)]に基づく基礎式

(1) 変位場

一次せん断変形理論では「断面は平面を保持し，軸線とはある一定の角度を保つ」という変形を表現できる．このとき，変位 u_x, u_z は，次のように仮定される．

$$u_x(x,z) = -z^1\phi(x)\,,\ \ u_z(x,z) = z^0 w(x) \tag{1}$$

ここで，$\phi(x)$は軸線の y 軸まわりの（曲げによる）断面回転角であり，$w(x)$は軸線の面外変位である．

(2) ひずみ－変位関係式

この変位場の Green-Lagrange ひずみは，

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}(x,z) &= \tfrac{\partial u_x}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\left\{\underline{\left(\tfrac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2} + \left(\tfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right\},\\ \varepsilon_{xz}(x,z) &= \tfrac{1}{2}\left\{\left(\tfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) + \left(\tfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right\} + \underline{\tfrac{1}{2}\left\{\left(\tfrac{\partial u_x}{\partial z}\tfrac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \left(\tfrac{\partial u_z}{\partial z}\tfrac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right\}}\end{aligned} \tag{2}$$

と表される．下線部は線形化された梁－柱理論では，考慮されない項である．

(3) 材料の構成式

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}(x,z) = E(x)\varepsilon_{xx}\,,\\ &\sigma_{xz}(x,z) = \mu(x)\varepsilon_{xz}\,,\ \ \mu(x) = G(x) = \tfrac{E(x)}{2\{1-\nu(x)\}}\,.\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$E(x)$と$\nu(x)$は AFGMs のヤング率とポアソン比であり，$G(x)$はせん断弾性率である．これらの材料定数は，時間に依存しないとする．

(4) 合応力および曲率

$$\begin{aligned}&N(x) = \int_A \sigma_{xx}\,\mathrm{d}A\,,\ \ Q(x) = \int_A \sigma_{xz}\,\mathrm{d}A\,,\\ &M(x) = \int_A z\sigma_{xx}\,\mathrm{d}A\,,\ \ \varphi(x) = -\tfrac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x}\,.\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，N は長柱の断面の外向き法線方向にはたらく軸力，Q はその正の接線方向にはたらくせん断力，M は曲げモーメントであり，φ は曲率である．

4. 汎関数と強形式

この系のひずみエネルギ密度 U_0 は[7)]，

$$U_0 = \left(\sigma_{xx} + \tfrac{1}{2}\sigma_0\right)\varepsilon_{xx} + (\tau_0 + \sigma_{xz})\varepsilon_{xz}\,. \tag{5}$$

ここで，τ_0 は初期せん断応力であるが，本稿では零とする．**第 3 章**で示した基礎式を式(5)に代入し，3 次以

表-1　均質長柱の線形座屈問題の本手法の数値解の収束性と精度比較: $p_x = 4$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0.3$, $L/r = 10$

	P-P		C-F	
m_x	Present ($\alpha = 0$)	Present ($\alpha = 1$)	Present ($\alpha = 0$)	Present ($\alpha = 1$)
11	7.545963393	7.1277191306	2.291030863	2.243234620
21	7.545963387	7.1277191250	2.291030866	2.243234623
31	7.545963389	7.1277191261	2.291030867	2.243234623
41	7.545963389	7.1277191263	2.291030867	2.243234624
Exact	7.54596338875827	7.12771912624157	2.29103086729168	2.24323462404270
PSM (15 terms)[5)]	7.54596338876	-	2.29103086729	-
FEM (30 elements)[4)]	7.5472	-	2.2911	-
FDM (50 segments)[6)]	4.546	-	2.291	-

表-2　傾斜機能長柱の線形座屈問題の本手法の数値解の収束性と精度比較: $p_x = 4$, $\kappa = 5/6$, $\nu = 0.3$, $L/r = 10$, $E_L/E_0 = 70/200$, $p = 2$

	P-P		C-F	
m_x	Present ($\alpha = 0$)	Present ($\alpha = 1$)	Present ($\alpha = 0$)	Present ($\alpha = 1$)
11	5.536908939	5.252719767	1.981251529	1.941826223
21	5.536908660	5.252719534	1.981251530	1.941826224
31	5.536908657	5.252719531	1.981251532	1.941826226
41	5.536908657	5.252719531	1.981251531	1.941826225
PSM (15 terms)[5)]	5.53690758385	-	1.98125152597	-
FDM (50 segments)[6)]	5.5558	-	1.9859	-

上の微小量を無視する．それを断面について積分すると，単位長さ当たりのひずみエネルギ U は,

$$U(x,w,\phi) = \tfrac{1}{2}E(x)I\left(\tfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa(x)G(x)A\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \phi\right)^2 + \tfrac{1}{2}\underbrace{\sigma_0 A}_{N_0=-P}\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \underline{\alpha\,\tfrac{1}{2}\underbrace{\left(\tfrac{I}{A}\right)}_{r^2}\underbrace{\sigma_0 A}_{N_0=-P}\left(\tfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)^2} \quad . \tag{6}$$

ここで，r は断面回転半径，N_0 は初期軸力，$\kappa(x)$は断面形状およびポアソン比に依存するせん断補正係数であり，$\alpha = \{0,1\}$ は曲率φを考慮するか否かを決定するパラメータである 7)．式(6)を全領域$[0, L]$にわたって積分して得られる汎関数Πが極値を持つための条件（$\delta\Pi = 0$）より，次式のような強形式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\left(-EI\tfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)}_{M(x)} + \underbrace{\kappa GA\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \phi\right)}_{Q(x)} + \underline{\alpha\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(N_0 r^2\tfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)} &= 0 \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\left\{\kappa GA\left(\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} - \phi\right)\right\}}_{Q(x)} + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(N_0\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega \in (0, L) \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} w = 0 \quad \text{or} \quad Q + N_0\tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \phi = 0 \quad \text{or} \quad -M + \underline{\alpha N_0 r^2\tfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{on} \quad \Gamma = \{0, L\} \tag{8}$$

5. B-spline Ritz 法による座屈方程式の定式化

第 4 章で説明した汎関数Π の変関数ϕ, w を文献 2)および文献 3)と同様に近似する．

$$\phi(x) \cong \sum_{i=1}^{i_x} A_i N_{i,p_x}(x)\ , \quad w(x) \cong \sum_{i=1}^{i_x} B_i N_{i,p_x}(x) \tag{9}$$

また，平均ヤング率 $E(x)$は線形複合則から推定し 3)，$N_0 = -P$（圧縮軸力）とする．汎関数Π の停留条件（$\delta\Pi = 0$）から，次式のような一般固有値問題が得られる．

$$(\boldsymbol{K} - \Lambda\boldsymbol{G})\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0}\ , \quad \Lambda = \tfrac{P_{cr}L^2}{E_0 I} \tag{10}$$

ここで, Λ は無次元化された Euler の座屈荷重である．

6. 数値実験および考察

(1) 均質材料　　**表-1** は, 均質長柱の座屈荷重Λ_{1st}の収束性と精度比較である．細長比 $L/r = 10$ とし，$\nu = 0.3$, $\kappa = 5/6$ とした．Spline 次数 p_xは4 次, ノットの数 m_xは 11 から 41 まで変化させた．本手法の精度は，主に厳密解及びべき級数解 5)と比較することで確認した．同表より，本手法の数値解の収束性は良好で，FEM4)やFDM6)よりも少ない離散化で高い精度が得られている．

(2) Al/ZrO2 系 AFGMs　　**表-2** は Al/ZrO_2 系傾斜機能長柱（傾斜分布パラメータ $p = 2$）3)を対象として，**表-1** と同様の調査をした結果である．AFGMs についても本手法の収束性と精度は良好であると言えよう．

7. まとめ

本稿では，面外せん断変形と初期応力の影響を考慮した傾斜機能長柱の線形座屈問題の強形式を導出した．また, 本問題への B-spline Ritz 法の適用性を確認した．

謝辞：本研究は，JSPS 科研費 22K04296 の助成を受けて行われています．

参考文献

1) Huong, T.T.: 学位論文の要旨, https://repository.nihon-u.ac.jp/xmlui/bitstream/handle/11263/1190/Trinh-Thanh-Huong-1.pdf?sequence=1&isAllowed=y （参照 2022/11/26）
2) 山本ら: 土木構造・材料論文集, 37 (2021) 39-51.
3) 新宮ら: 土木構造・材料論文集, 38 (2022).（登載決定）
4) Shahba et al.: Composites Part B: Eng., 42 (2011) 801-808.
5) Huang et al.: Acta Mechanica Solida Sinica, 29 (2016) 200-207.
6) Soltani et al.: AUT Journal of Civil Eng., 4 (2020) 91-102.
7) Sun, C.T.: Journal of Applied Mechanics, 39 (1972) 282-285.