

粒状体地盤を対象とする等価巨視的粘性モデルを用いた SPH 解析

九州大学 学生会員 ○岡野 翔大
九州大学 正会員 浅井 光輝

1. はじめに

我が国は急峻な地形が多く、各地で大規模な土砂災害が発生している。たとえば、平成 28 年熊本地震や令和 2 年 7 月豪雨など、その発生要因は様々であり、土質の地域性も相まって予測は困難を極まる。特に、大雨や短時間強雨の発生頻度が全国的に増加しており、土砂災害の被害予測技術の高度化へのニーズが高まっている。そこで、本研究では、発生規模の予測のみならず被害規模の想定まで可能な数値解析技術の向上を試みた。

本研究では、物体の大変形・分裂・結合を伴う形状変化の激しい問題を効率よく計算できる粒子法の一つである SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を採用し、地盤災害に特化した材料モデルの改良を試みた。本来地盤は、直径 0.001~10mm 程度の土粒子と間隙水で構成されている。地盤をこの土粒子のスケールで離散化すると、粒子数が膨大なものになり、計算コストが膨大となるため、本研究では巨視的な観点から地盤を等価な固体特性あるいは流動特性 (レオロジー) を持つ連続体とみなすことにした。具体的には、SPH 法により連続体近似できる安定した地盤状態から、土砂災害発生後の不連続な状態までを統一して解析することを検討している。前者は、弾塑性固体としてモデル化し、流動化した状態である後者は高粘性流体として近似することで統合的な評価を試みる方針である。本発表では特に流動化後のレオロジー特性のモデル化に特化した研究成果を報告する。

2. 解析手法

2.1 巨視的モデル

地盤は、その土のせん断強度を超えるせん断応力が働くと、破壊に至り動き出す。この特徴から、本研究では、地盤を粘塑性流体 (塑性流動を示す非ニュートン流体) としてモデル化した。

非圧縮の非ニュートン流体の支配方程式は、式(1)の Navier-Stokes 方程式と式(2)の連続の式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \frac{1}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{g} \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu(\dot{\gamma})\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{v} は速度、 ρ は密度、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 \mathbf{g} は外力、 p は圧力、 ν は動粘性係数である。

非ニュートン流体とニュートン流体との違いは、動粘性係数 ν がひずみ速度 $\dot{\gamma}$ ($=\sqrt{2\mathbf{D}:\mathbf{D}}$, \mathbf{D} は変形速度テンソル)によって変化する点である。非ニュートン流体に対しては既往の研究によってさまざまな粘性モデルが提案されているが、本研究では、粒状体の流動の再現精度が高いことから、Wang ら^[1]によって修正された $\mu(I)$ レオロジーモデルを使用した。修正された $\mu(I)$ レオロジーモデルでは、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ は次の式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\mu p + c}{\dot{\gamma}}\mathbf{D} \quad (3)$$

$$\mu = \mu_s + \frac{(\mu_d - \mu_s)\dot{\gamma}}{I_0\sqrt{p/(\rho_s d_g^2) + \dot{\gamma}}} \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{I} は恒等テンソル、 μ は摩擦係数、 c は粘着力、 μ_s は静摩擦係数、 μ_d は動摩擦係数、 I_0 は材料定数、 ρ_s は材料の密度、 d_g は材料の粒径である。

2.2 時間離散化手法

本研究では、時間離散化手法に 1 次の前進差分を選んだ。また、支配方程式に対して、射影法によって解を求めた。射影法は次の時間ステップへの遷移において、圧力勾配項を無視した仮の状態場を定義することで、速度場と圧力場を分離して計算する手法である。速度場を陽的に、圧力場を陰的に解くことを半陰解法と呼び、両方とも陰的に解くことを完全陰解法と呼ぶ。

半陰解法の場合、時間増分 Δt は式(5)に示す CFL 条件を満たす必要がある。

$$\Delta t \leq C_{CFL} \min\left(\frac{d}{v_{max}}, \frac{h^2}{8\nu}\right) \quad (5)$$

ここで、 C_{CFL} は CFL 係数、 d は連続体を離散化した粒子の直径、 h は後述する重み関数の影響半径である。本研究では高粘性流体を扱うので、式(5)から、時間増分を非常に小さくする必要があり、計算コストが非常に大きくなる。そこで本研究では、完全陰解法を用いることで時間増分の条件を緩和させた。

2.3 空間離散化手法

本研究では、空間離散化手法に SPH 法を選んだ。SPH 法は、対象とする連続体を粒子として離散化する手法である。着目粒子 i の物理量 ϕ_i はその近傍粒子 j との位置ベクトル \mathbf{r}_{ij} 、近傍粒子 j の代表体積 V_j および重み関数 W_{ij} を用いて式(6)で離散近似される。

$$\langle \phi \rangle_i = \sum_j V_j W_{ij} \phi_j \quad (6)$$

また、着目粒子 i の物理量の勾配 $\nabla \phi_i$ は、物理量の差 ϕ_{ij} を用いて式(7)で離散近似される。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \sum_j V_j \nabla W_{ij} \phi_{ij} \quad (7)$$

しかし、この式は規則的な粒子配置のもとで導出されるため、乱れた粒子配置の場合に近似精度が保証されない。そこで本研究では、Taylor 展開の1次の項まで満足するように粒子の乱れに応じた補正を行い、式(8)で物理量の勾配 $\nabla \phi_i$ を離散近似した。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \phi \rangle_i &= \left[\sum_j V_j (\nabla W_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}) \right]^{-1} \sum_j V_j \nabla W_{ij} \phi_{ij} \quad (8) \\ &:= \sum_j V_j \tilde{\nabla} W_{ij} \phi_{ij} \end{aligned}$$

また、補正した2階微分・混合微分の離散近似は次の式のようになる^[2]。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} & 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z \partial x} \end{bmatrix}^T \\ = 2 \sum_j V_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} W_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{s}_{ij} \left\{ \phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij} \cdot \left(\sum_k V_k \phi_{ik} \tilde{\nabla} W_{ik} \right) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

ただし、 \mathbf{M}_i と \mathbf{s}_{ij} は次の式で定義される。

$$\mathbf{M}_i = \sum_j V_j \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} W_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \left\{ \mathbf{s}_{ij} - \left(\sum_k V_k \mathbf{s}_{ik} \otimes \tilde{\nabla} W_{ik} \right) \mathbf{r}_{ij} \right\} \quad (10)$$

$$\mathbf{s}_{ij} = [x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad z_{ij}^2 \quad x_{ij}y_{ij} \quad y_{ij}z_{ij} \quad z_{ij}x_{ij}]^T \quad (11)$$

ここで、式(9)において係数行列 \mathbf{M}_i の逆行列を求めることで、最終的な2階微分モデルは評価できる。

3. 事前検証 (高粘性流体の安定化・高速化)

ここまでの手法を用いて、静止した流体の底面の圧力を計算した結果を図-1に示す。従来法での結果と比較すると、安定して理論解に近い圧力を計算できていることがわかる。

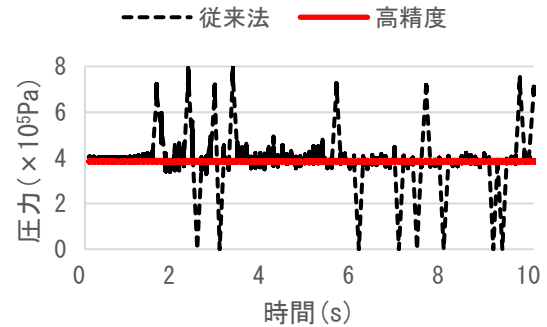


図-1. 静水圧の数値解の時系列変化

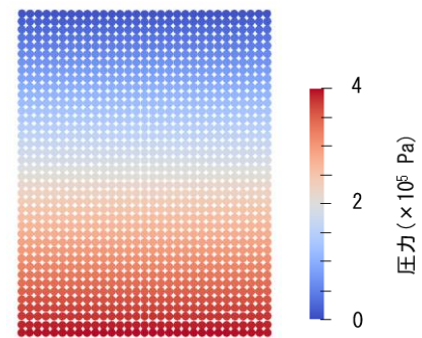


図-2. 静水圧分布の理論解

4. 結論

地盤を連続体とみなして、安定した状態から不連続な状態までを統一して解析することを目的に、まずは粒子離散化用の高精度な微分オペレータを完全陰解法型の SPH 法に導入し、解析精度の向上を試みた。

今後は、粒状体の流動の実験結果や個別要素法による微視的モデルでの解析との比較を行うことで巨視的粘性モデルの妥当性を確認し、より実際の地盤の土質を考慮したモデルに改良していくことで、土砂災害の被害予測に役立てることを目指す。

参考文献

- [1] G.Wang, A.Riaz and B.Balachandran : Smooth particle hydrodynamics studies of wet granular column collapses, *Acta Geotechnica.*, Vol. 15, No. 3, pp. 1205-1217, 2020.
- [2] 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝 : 高精度 SPH 法 ～空間2次精度の勾配・ラブラシアン・混合微分～, 土木学会論文集, Vol. 79, No. 15, 2023 (in press).