2 次精度を有する高精度 SPH 法による自由表面解析

九州大学　学生会員　○白神　嘉也
九州大学　学生会員　　藤岡秀二郎
九州大学　正 会 員　　浅井　光輝

1. 目的

ラグランジュ記述による粒子法である SPH 法（Smoothed Particle Hydrodynamics）では，粒子配置が乱れるほど計算精度が悪化する．藤岡ら[1]は粒子の乱れに対しても精度が落ちにくい高精度 SPH 法を提案し，キャビティ流れやカルマン渦など自由表面のない流体問題でその有用性を確認してきた．粒子配置の乱れは，粒子法などのメッシュレス法が得意とする自由表面流れにおいてより顕著となり，高精度 SPH 法の適用が期待される．しかしながら，自由表面近傍での粒子の欠損だけではなく，自由表面判定などの追加技術が必要となり，高精度 SPH 法の多くは自由表面のない例題に限定して使われることが多い．本研究では，高精度 SPH 法による自由表面流体の解析の適用性を示すとともに，注意事項を整理することにした．

2. 解析手法

SPH 法は連続体を粒子で表現し，着目粒子iとその近傍粒子jの距離$|\boldsymbol{r}_{ij}|$の関数である重みW_{ij}から，位置ベクトル$\boldsymbol{r}_i$での物理量ϕを近似する．

$$\phi(\boldsymbol{r}_i,t) \cong \langle\phi\rangle_i = \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i}\frac{m_j}{\rho_j}W_{ij}\phi(\boldsymbol{r}_j,t) \qquad (1)$$

ここで粒子が代表する質量をm_j，物質の密度をρ_j，着目粒子iに対する近傍粒子の集合を$\mathbb{S}_i$とする．

3. 高精度モデル

3.1 勾配モデル

高精度な勾配モデルとして，Taylor 展開の 1 次の項までを満足するモデルを用いた．

$$\langle\nabla\phi\rangle_i \coloneqq \boldsymbol{L}_i\sum_{j\in\mathbb{S}}V_j(\phi_{ij}-R)\nabla W_{ij}$$

$$=\sum_{j\in\mathbb{S}}V_j(\phi_{ij}-R)\boldsymbol{L}_i\nabla W_{ij}=\sum_{j\in\mathbb{S}}V_j(\phi_{ij}-R)\tilde{\nabla}W_{ij} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{L}_i=\left[\sum_{j\in\mathbb{S}}V_j(\nabla W_{ij}\otimes\boldsymbol{r}_{ij})\right]^{-1}$$

これは, Taylor 展開に勾配を乗じ，粒子和をとることで得られる勾配で，勾配補正モデルと呼ぶ．ϕ_{ij}および$\boldsymbol{r}_{ij}$は，それぞれ$\phi_{ij}\coloneqq\phi_j-\phi_i$，$\boldsymbol{r}_{ij}\coloneqq\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$の定義を与える．また，$R$は Taylor 展開の剰余項である．

3.2 高精度 2 階微分・ラプラシアン

先の勾配補正モデルにおいて，2 次以上の剰余項を含ませて再び Taylor 展開へと代入することで 2 階微分・混合微分の高精度な離散近似モデルを導出する．2 次元の場合，2 階微分モデルは次式となる．

$$\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i}\frac{m_j}{\rho_j}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\nabla W_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^4}[\boldsymbol{p}_{ij}][\boldsymbol{p}_{ij}]^T\left[\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\;\frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\;2\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right]^T$$

$$=2\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i}\left[\frac{m_j}{\rho_j}\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\nabla W_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^4}[\boldsymbol{p}_{ij}]\left\{\phi_{ij}-\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\left(\bigcup_{k\in\mathbb{S}_i}\frac{m_k}{\rho_k}\phi_{ik}\tilde{\nabla}W_{ik}\right)\right\}\right] \qquad (3)$$

ここで(3)式左辺の係数行列の逆行列を求めることで，２階微分およびラプラシアン$\langle\nabla^2\phi\rangle$ を評価することができる．このモデルを FULL_INVERSE と呼ぶ．

4. 連続関数による離散微分モデルの精度検証

4.1 概要

微分可能な連続関数の微分を解析的に評価し，関数値と粒子による離散微分値との比較検証を通して，高精度モデルの有用性を示す．ここでは，高精度モデル(FULL_INVERSE)の比較対象として，標準的なラプラシアンモデル（NORMAL)と比較検証した．

1. 粒子を配置し、関数の情報を与えた.（図-1(a)）

$$\phi(x,y)$$

$$=0.75\exp\left\{-\frac{(9x-2)^2}{4}-\frac{(9y-2)^2}{4}\right\}+0.75exp\left\{-\frac{(9x+1)^2}{49}-\frac{9y+1}{10}\right\}$$

$$+0.5exp\left\{-\frac{(9x-7)^2}{4}-\frac{(9y-3)^2}{4}\right\}-0.2exp\{-(9x-4)^2-(9y-7)^2\}$$

$$(0\le x,y\le 1)$$

2. 外部境界周辺で影響域に粒子欠損がある粒子（図-1(b)）についてラプラシアンとその誤差を評価し，平均値を求める．
3. 粒子径を小さくし、1~3 の操作を繰り返す.

また，誤差評価関数は外れ値の影響を大きく評価するRMSE(Root Mean Squared Error)とした．

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_i (\langle \nabla^2 \phi \rangle_i - \nabla^2 \phi_i)^2}{\sum_i (\nabla^2 \phi_i)^2}} \tag{4}$$

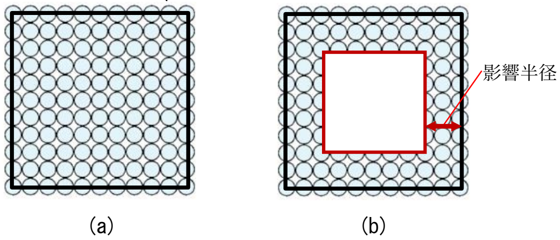

図-1 粒子配置図

4.2 関数による精度検証の結果

検証結果を図-2に示す．標準的なラプラシアンモデルNORMALでは，乱れの有無に関わらず粒子欠損があれば収束性が見られなかった．高精度モデルFULL_INVERSEでは，粒子欠損がみられる時でも粒子の乱れに関わらず一次収束を確認した．

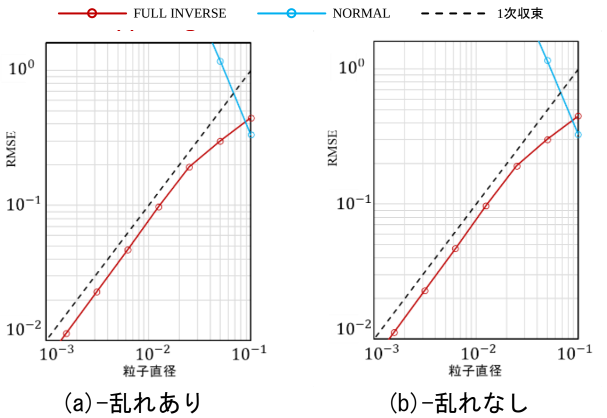

図-2 検証結果

5. 流体解析による検証

5.1 解析手法

自由表面を含む非圧縮性流体を対象とし，上記の高精度モデルによるISPH法により解析した事例を示す．この際，勾配モデルは1次精度勾配補正モデル，ラプラシアンはFULL_INVERSEを採用した．また，粒子の乱れによる離散近似精度の低下は避けられないため，粒子配置の疎密を防ぐOptimized Particle Shifting (OPS)[2]を導入した．解析モデルは30[cm]×40[cm]の水塊を，100[cm]×300[cm]の水槽に設置したダムブレイク問題である．解析パラメータの一覧を表1にまとめて示す．

表1　解析パラメータ

初期粒子間隔(cm)	時間増分(sec)	滑り係数	シフト係数
1.0	5×10^{-4}	0.80	0.10

5.2 解析結果

解析結果を図-3に示す．水塊が右側壁に衝突した際に発生する波が見られ，安定した圧力分布が評価できた．ただし図-4に示すように自由表面判定に少しでも誤判定が生じると，虚偽の圧力振動を与えていることがあった．

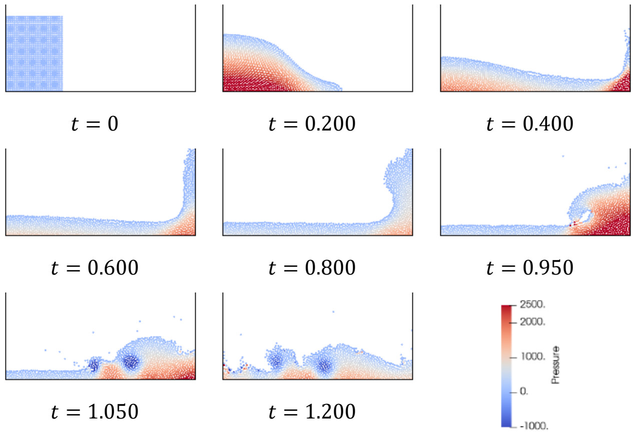

図-3 各時間ステップにおける粒子圧力分布

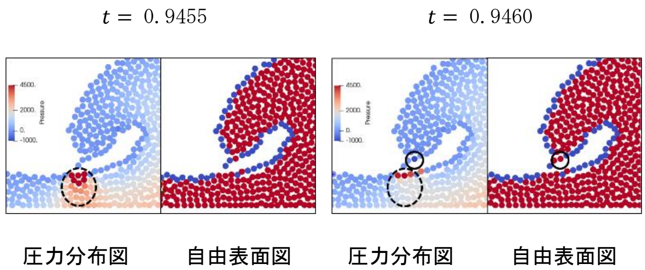

図-4 圧力分布と自由表面判定の関係

6. 結論

自由表面を含む流体解析への高精度モデルの適用に向け，まずは境界付近での近傍粒子の欠損に関する影響についての基礎検討を行った．その後，具体的なダムブレイク問題を解析し，高精度SPH法の有用性を示した．その中で，自由表面の誤判定による圧力振動がより顕著となり計算が不安定になる例も確認された．

参考文献

[1] 藤岡秀二郎，辻勲平，浅井光輝：高精度SPH法 ～空間2次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～，土木学会論文集，Vol. 79, No. 15, 2023.

[2] Abbas Khayyer, Hitoshi Gotoh, Yuma Shimizu : Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context, *Journal of Computational Physics*, Vol.332 pp.236-256, 2017.