σ-SPH 法による効率的な広域氾濫解析に向けた基礎検討

九州大学　学生会員　○藤岡　秀二郎
九州大学　正 会 員　　浅井　光輝

1.　目的

SPH，MPS などの粒子法では，一般的に着目粒子から近傍粒子までの距離に応じた固定したカーネル関数（重み関数の一種）を使った内挿近似を行うため，規則的な粒子配置の場合のみ，計算精度が担保される．粒子配置が乱れるほど近似精度が低下するため，粒子配置を規則的な状態へと再配置を行う粒子のシフティング法と，粒子の乱れに応じた近似モデルの補正の両者を適切に用いることで高精度化に繋がる．勾配モデルの補正については広く用いられているのに対し，2 階微分の離散近似モデルでは補正が与えられることがほとんどない．

例えば，津波遡上現象を粒子法で解く場合，粒子配置が均等であることが要求されるため，不必要な場所にも細かな粒子配置が要求され，計算コストが膨大になる．効率的の計算のためには，不規則な粒子配置でも解析可能なアルゴリズムが必要である．

そこで本研究では，**図-1** のように水深に応じて鉛直方向の座標系を歪ませる σ 座標系を用いた σ-SPH 法の構築を目指し，座標変換時に求められる 2 階微分の離散近似モデル（特に混合微分）の提案を行った．

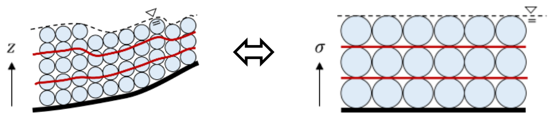

図-1 通常の座標系(左)と σ 座標系(右)

2.　高精度離散近似モデルの導出

2.1 一般的な離散近似モデルの問題点

標準的な SPH 法の離散近似モデルでは，離散近似をする以前の積分形でのみ成立する近似を用いて導出するため，導出された離散近似モデルは近似精度が保証されない．そこで本研究では，微分の離散近似モデルを代入した状態において，Taylor 展開の低次項までが成立するように離散近似モデルの補正を行った．

2.2 勾配モデル

勾配補正モデルは Taylor 展開の 1 次の項まで満足するように，勾配補正行列 $\boldsymbol{L}$ を定義し，通常の勾配モデルに補正行列を作用することで高精度化している．

$$\langle\nabla\phi\rangle_i := \boldsymbol{L}_i\sum_j V_j(\phi_{ij}-R)\nabla w_{ij}$$

$$\cong \sum_j V_j(\phi_{ij})\boldsymbol{L}_i\nabla w_{ij} := \sum_j V_j(\phi_{ij})\tilde{\nabla} w_{ij} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{L}_i := \left[\sum_j V_j(\nabla w_{ij}\otimes\boldsymbol{r}_{ij})\right]^{-1}$$

V_jはj粒子の代表体積，$\boldsymbol{\phi}_i$はi粒子の物理量($\phi_{ij}=\phi_j-\phi_i$)，w_{ij}はj粒子のi粒子に対する重み，$\boldsymbol{r}_i$はi粒子の位置ベクトル$(\boldsymbol{r}_{ij}=\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)$を示す．$R$は Taylor 展開の剰余項であり，この場合は 2 次以上の高次項となる．つまり，上記の勾配補正モデルは 2 次の項以上の高次の項を無視したモデルである．

2.3 2 階微分・混合微分モデル

先の勾配補正モデルは，Taylor 展開の 2 次の項以上の剰余項を含んでいたことを踏まえ，離散近似した勾配補正モデルを代入した後でも Taylor 展開の 2 次の項まで満足するように，2 階微分・混合微分の高精度な離散近似モデルを導出した．2 次元の場合，この補正 2 階微分モデルは次式となる．

$$\sum_j V_j\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\tilde{\nabla}w_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^4}\boldsymbol{q}_{ij}\boldsymbol{p}_{ij}^T\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2} & 2\dfrac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}^T$$

$$=2\sum_j V_j\frac{\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\tilde{\nabla}w_{ij}}{|\boldsymbol{r}_{ij}|^4}\boldsymbol{q}_{ij}\left\{\phi_{ij}-\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\left(\sum_k V_k\phi_{ik}\tilde{\nabla}w_{ik}\right)\right\} \quad (2)$$

ただし，$\boldsymbol{q}_{ij}$と$\boldsymbol{p}_{ij}$は次の式で定義される．

$$\boldsymbol{q}_{ij}=\begin{bmatrix}x_{ij}^2 & y_{ij}^2 & x_{ij}y_{ij}\end{bmatrix}^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{p}_{ij}=\begin{bmatrix}A(x,x) & A(y,y) & A(x,y)\end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$A(a,b)=a_{ij}^2b_{ij}^2-\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\sum_k V_k a_{ik}b_{ik}\tilde{\nabla}w_{ik} \quad (5)$$

ここで，式(2)において係数行列の逆行列を求めることで，最終的な 2 階微分モデルは評価できる．

3.　規定関数による微分モデルの精度検証

3.1 概要

精度の比較として，一般的なラプラシアンモデル NORMAL と既往研究[1]で提案されている 3 つのモデル

（NAÏVE (2*), SUM(2*), INVERSE(2*)），式(2)の係数行列の近似数を変化させた 4 つのモデル（NAÏVE(2), SUM(2), PART_INVERSE(2), FULL_INVERSE(2)）の計 8 つのモデルの比較を行った．ここで，(2*)は混合微分を除いて導出されたモデル，(2)は混合微分を含めて導出したモデルである．検証は以下の手順で行った．

1. 粒子を配置し，関数の情報を与える．
   $\phi(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\quad(0\leq x,y\leq 2)$
2. 各粒子でラプラシアンとその誤差を求める．
3. 影響域に十分粒子が存在する粒子に対して誤差の平均をとる．
4. 粒径を小さくし，1~3 の操作を繰り返す．

※ 乱れを与えている場合は，1~3 の操作を 100 回繰り返し，その平均値で評価する．

また誤差評価関数は，外れ値の影響を大きく評価する RMSE (Root Mean Squared Error)とする．

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_i(\langle\nabla^2\phi\rangle_i-\nabla^2\phi_i)^2}{\sum_i(\nabla^2\phi_i)^2}} \tag{6}$$

3. 2 関数による精度の検証結果

検証結果を**図-2** に示す．一般的なラプラシアンモデル NORMAL では，乱れの有無に関わらず収束性は見られなかった．また，乱れがある場合，混合微分を除いたモデル(2*のシリーズ)の間では大差はなく，混合微分を含めたモデル(2 のシリーズ)では導出時の近似が少ないほど高精度なモデルであることが確認できた．続いて，勾配モデルと FULL_INVERSE(2)より導出した混合微分モデルにおいても同様の検証を行った．勾配において一般的なモデルでは，乱れがない場合でもラプラシアンと同様に収束性が見られなかった．また混合微分モデルの検証結果（**図-3**）も，ラプラシアンモデル（**図-2**）と同様の傾向を示した．

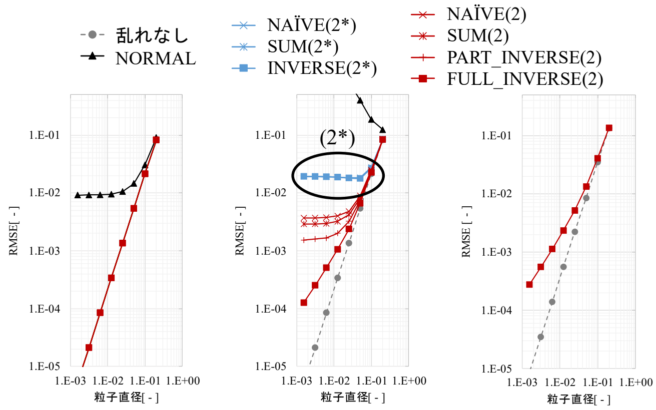

図-2 (a) ラプラシアン（乱れなし）　**図-2 (b) ラプラシアン（乱れあり）**　**図-3 混合微分（乱れあり）**

4. 流体解析による精度検証

4. 1 解析手法・モデル

ここでは，提案した微分の離散近似モデルを用い，非圧縮性流体を ISPH 法で解いた際の性能を確認する．ラプラシアンは FULL_INVERSE(2)を，勾配は 1 次精度のモデルを用いた．修正モデルでも乱れに伴う精度低下が生じるため，粒子配置の疎密を防ぐ OPS[(2)]を併用した．解析モデルは 1 辺が 1 (m)の正方形領域の流体（無粘性）であり，初期条件として正方形領域の図心を中心に角速度2.0 (rad/sec)を与えた．初期粒子間隔は 1 (cm)，また時間増分は2.0×10^{-4} (sec)とした．

4. 2 解析結果

解析結果を**図-4** に示す．一般的な離散近似モデルを用いたものと高精度な離散近似モデルを用いたものの比較より，後者の粒子配置と圧力分布の精度の向上が確認できた．

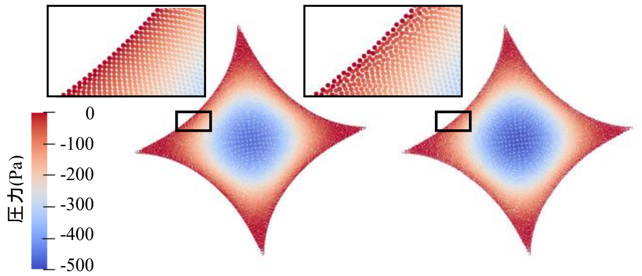

図-4 0.4秒後の解析結果比較（左：高精度モデル，右：通常モデル）

5. 結論

本研究では，σ-SPH 法開発の基礎検討として，SPH 法における座標変換に対応可能な混合微分の離散近似モデルを導出すると同時に，ラプラシアンの高精度モデルを提案した．まずは，規定関数により誤差評価を行った後に，流体解析における検証により精度の向上を確認した．今後は，本研究で導出した離散近似モデルを用いて σ-SPH 法へと発展させる予定である．

参考文献

(1) Josip Basic, Nastia Degiuli, Dario Ban : A class of renormalised meshless Laplacians for boundary value problems, *J. Comput. Phys.*, Vol.354 pp.269-287, 2018.
(2) Abbas Khayyer, Hitoshi Gotoh, Yuma Shimizu : Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context, *J. Comput. Phys.*, Vol.332 pp.236-256, 2017.