

## Winkler 基礎上にある弾性平板の三次元自由振動問題の理論解析

大分工業高等専門学校 学生会員 ○稲田 真 大  
大分工業高等専門学校 正会員 名木野晴暢

大分工業高等専門学校 学生会員 田川 達也  
豊橋技術科学大学 非会員 足立 忠晴

### 1. まえがき

地上に建設される平板構造の挙動は地盤の影響を受ける。よって、変形する地盤との相互作用を考慮した平板の力学的特性を精確に把握することは重要である。

名木野らは、弾性平板の静力学的特性に及ぼす弾性地盤との静的相互作用の影響を三次元弾性論に基づく理論解析により明らかにし<sup>1)</sup>、基礎資料を提示してきた。また、Winkler 基礎上にある弾性平板の曲げ問題における平板理論の適用範囲についても明らかにした<sup>2)</sup>。今後の課題として、弾性地盤との相互を考慮した弾性平板の動力学的挙動の解明が残されていた。

本研究では、Winkler 基礎上にある弾性平板の自由振動特性を三次元弾性論に基づく理論解析により明らかにすることを目的としている。この問題の形式的な振動数方程式は Srinivas ら<sup>3)</sup>に提示されているが、数値的に解かれておらず、最も重要な三次元弾性論に基づく平板の自由振動特性の情報が不足している。そこで、本研究でも半逆解法を用いて解析解を導出し、文献<sup>3)</sup>に誤りがないかを確認した。また、得られた解析解を数値的に解いて、弾性平板の自由振動性状に与える地盤反力係数と板厚の影響を調べたので報告する。

### 2. 数理モデル

弾性平板の周面は単純支持されているとし、その運動は線形弾性論に従って調和振動すると仮定する。また、地表面付近の地盤の挙動は鉛直の線形弾性ばね(以下、地盤反力係数と呼ぶ)  $k_1$  を有する Winkler 型の弾性基礎に従うとする。図-1 に解析モデルと座標系を示す。ここで、 $a, b, h$  は、それぞれ、平板の長さ、幅、厚さであり、 $u(x, y, z)e^{i\omega t}, v(x, y, z)e^{i\omega t}, w(x, y, z)e^{i\omega t}$  は、それぞれ  $x, y, z$  方向の変位成分、 $\omega$  は平板の固有円振動数、 $i$  は虚数単位である。また、図-1 のように平板の中央面に直交直線座標系  $O-xyz$  を設定した。

弾性平板の領域  $V$  で成り立つ変位振幅  $u, v, w$  に関する支配方程式は、 $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$  とすると、

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } V. \quad (1)$$

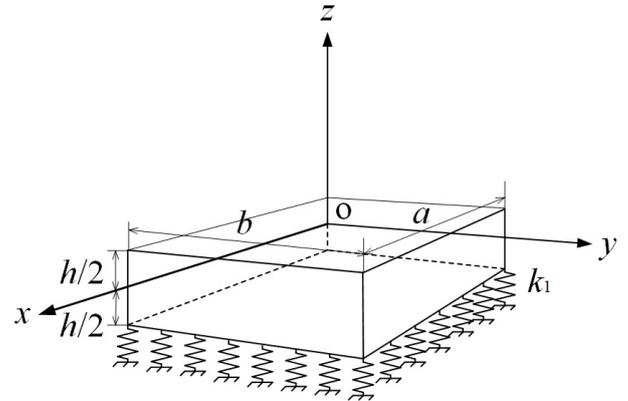


図-1 解析モデルと座標系

ただし、 $\nabla^2$  は Laplacian、 $\boldsymbol{\theta} = [0, 0, 0]^T$ 、 $\lambda, \mu$  は Lamé の定数、 $\rho$  は弾性平板の密度であり、 $T$  は転置を意味する。

平板の周面での境界条件式は、

$$\begin{aligned} v = w = 0, \quad \sigma_{xx} = 0 \quad \text{on } x = 0, a, \\ u = w = 0, \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \text{on } y = 0, b. \end{aligned} \quad (2)$$

また、厚さ方向の境界条件式は、

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = k_1 w, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{on } z = -\frac{h}{2}, \\ \sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{on } z = \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. 半逆解法による解析解の導出

本研究では、半逆解法を用いて強形式の解析解を求めた。式(1)の解  $u, v, w$  が変数分離形で表されると仮定し、更に式(2)を満たすように次式で解を仮定する<sup>3)</sup>。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(z) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $m, n \in \mathbb{N}$  は、それぞれ、 $x$  軸方向および  $y$  軸方向の固有関数の半波数の数であり、 $U_{mn}(z), V_{mn}(z), W_{mn}(z)$  は  $z$  方向の未知の固有関数である。本研究では、 $w = 0$  となる thickness-twist mode (distortion mode) および  $m = 0$  または  $n = 0$  のときに生じる面内振動モードは対象としていない。式(4)を式(1)に代入することで連立常微分方程式に変換し、一般解を求めた後に、式(3)を満足するように解いて、振動数方程式と未知の固有関数の形式的な解を求めた。

表-1 導出した解析解と先行研究による数値解との比較:  $b/a=1, \nu=0.3, l=1$

$h/a$	$\Phi_1$	Methods	$\Delta_{111}$	$\Delta_{121} = \Delta_{211}$	$\Delta_{221}$
0.01	$10^2$	Present	2.24131348872734	5.09726789837668	8.05274323711864
		Ritz <sup>4)</sup>	2.2413	5.0973	8.0527
		FE-DQ <sup>5)</sup>	2.2450	5.1643	8.1338
0.1	$10^3$	Present	3.70080892333105	5.56612702584469	7.73346223748128
		Ritz <sup>4)</sup>	3.7008	5.5661	7.7335
		FE-DQ <sup>5)</sup>	3.6978	5.5521	7.7193
0.5	10	Present	1.29027536025849	2.34795192704134	3.55495423840428
		Ritz <sup>4)</sup>	1.2903	2.3480	3.5550

4. 導出した解析解の妥当性

導出した解析解は双曲線関数の二倍角の公式を用いて変形すると, thickness-twist mode の振動数方程式 (本文中の  $\sinh(r)$ ) を除いた形式で Srinivas らの振動数方程式<sup>3)</sup>に一致した. 次に, 振動数方程式を数値的に解いて先行研究の離散化手法による数値解<sup>4), 5)</sup>と比較してみた. その結果を表-1に示す. ただし, 表中の $\Phi_1$ および $\Delta_{mnl}$ は, それぞれ, 次式のように平板の曲げ剛性 $D$ を用いて無次元化した地盤反力係数および固有円振動数であり,  $l$ は振動次数を意味する.

$$\Phi_1 = \frac{k_1 a^4}{D}, \Delta_{mnl} = \frac{\omega_{mnl} b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (5)$$

表-1より, 文献4)の Ritz 法による数値解は本研究で求めた解析解と有効数字5桁で一致しており, 導出した解析解は妥当であると判断できる. また, 文献4)は, 高い解析精度を有していることもわかる. 一方で, 文献5) (FE-DQ法)の解析精度は低いことも確認できる.

5. 数値解析および考察

振動数方程式は無次元固有円振動数 $\Omega = \omega h/c_2$  ( $c_2$ は横波の伝播速度), ポアソン比 $\nu$ ,  $g_{mn}$ および無次元化された地盤反力係数  $k_1 h/E$  の関数として表される. ここで,  $g_{mn}$ は  $m, n$ に関する無次元パラメータであり,

$$g_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi h}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi h}{b}\right)^2}. \quad (6)$$

まず,  $\nu=0.3$ に設定したときの弾性平板の $\Omega_1 = \omega_1 h/c_2$ と  $g_{mn}, k_1 h/E$ の関係を調べた. この結果を図-2に示す. 同図の縦軸は $\Omega_1/g_{mn}$ であることに注意されたい.  $\omega_1$ は平板の最低次の固有円振動数であり,  $k_1 h/E$ は  $10^{-6}$ から  $10^0 (=1)$ まで変化させた. なお,  $k_1 h/E=0$ は弾性基礎に接していない平板の結果であり,  $c_R$ は Rayleigh 波の伝播速度,  $c_3$ は板波の伝播速度である.

まず,  $k_1 h/E = 0$ の $\Omega_1/g_{mn}$ は  $g_{mn}$ が大きくなると増加し, 一定の値に収束する. これに対して, 弾性基礎にある平板の $\Omega_1/g_{mn}$ は  $k_1 h/E$ に係わらず,  $g_{mn}$ が大き

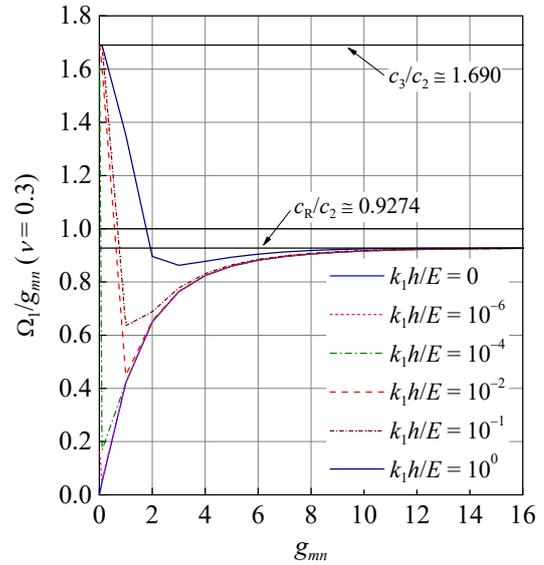


図-2 弾性平板の $\Omega_1/g_{mn}$ と  $g_{mn}, k_1 h/E$ の関係

なると減少するが, ある  $g_{mn}$ に達すると増加して一定の値に収束するように変化する. また,  $k_1 h/E$ が大きくなると $\Omega_1/g_{mn}$ は大きくなる.  $k_1 h/E < 10^{-1}$ の範囲<sup>1)</sup>に着目すると,  $\Omega_1/g_{mn}$ が  $k_1 h/E$ の影響を受けるのはおおよそ  $g_{mn} < 1$ の範囲であり,  $m, n \in \mathbb{N}$ であることを考えると弾性基礎の影響は  $m, n$ が 1, 2などに限定されると考えられる. なお, 導出した振動数方程式の  $g_{mn} \rightarrow 0$ は  $\Omega_1/g_{mn} \rightarrow \{2/(1-\nu)\}^{1/2} = c_3/c_2$ に収束し,  $g_{mn} \rightarrow \infty$ からは  $k_1$ を含む形式の Rayleigh の方程式が導出された.  $\nu = 0.3$ を与えてこの結果を数値化したものが図中の  $c_R/c_2$ と  $c_3/c_2$ であり, 両者とも  $k_1 h/E$ には無関係である.

弾性平板の自由振動に与える無次元地盤反力係数  $k_1 a/E$ と板厚比  $h/a$ の影響については, 当日報告する.

謝辞: 支配方程式の一般解の導出にあたっては, 明石工業高等専門学校 都市システム工学科 石丸和宏教授からご指導および資料の提供をいただきました.

参考文献

- 1) 名木野ら: 構造工学論文集, 58A (2012), 26-39.
- 2) 名木野ら: 応用力学論文集, 17 (2014), I-13\_1-24.
- 3) Srinivas et al.: J. Sound Vib., 12 (1970), 187-199.
- 4) Zhou et al.: Int. J. Numer. Meth. Eng., 59 (2004), 1313-1334.
- 5) Dehghan and Baradaran: Appl. Math. Comput., 218 (2011), 2772-2784.