Pasternak 基礎上の弾性平板の自由振動の三次元理論解析

大分工業高等専門学校　学生会員　○田 川 達 也　　大分工業高等専門学校　学生会員　稲 田 真 大
大分工業高等専門学校　正 会 員　名 木 野 晴 暢　　豊 橋 技 術 科 学 大 学　非 会 員　足 立 忠 晴

1. はじめに

地震時の構造物の挙動を把握するためには，構造物の振動特性のみならず，流体や地盤との相互作用を考慮する必要がある．Pasternak 型の弾性基礎上の弾性平板の自由振動は平板理論[1)-3)]および三次元弾性論[4), 5)]に基づいて研究されている．三次元弾性論に基づく研究は Zhou ら[4)]によりなされた. その後も数値解析による研究が多く，理論解析による研究は少ない．

本研究では，Pasternak 基礎上にある等方・均質な弾性平板の自由振動性状を三次元弾性論に基づく理論解析により明らかにすることを目的としている．先ず，本問題の解析解（形式的な振動数方程式と固有関数）を半逆解法により導出した．次に，二つの地盤反力係数の取り得る範囲を調査した．最後に，得られた解析解を数値的に解くことで弾性平板の自由振動特性に与える弾性基礎の第二パラメータと板厚の影響を調べた．

2. 数理モデル

弾性平板の周面は単純支持されているとし，その運動は線形弾性論に従って調和振動すると仮定する．また，地盤は均質かつ等方な線形弾性であるとし，地表面付近の挙動は Pasternak 型の弾性基礎で理想化する．**図–1** に解析モデルと座標系を示す. 直交直線座標系 O-xyz は，平板の中央面に設定した．ここで，a, b, h は，それぞれ，平板の長さ，幅，厚さ，k_1 は鉛直方向の地盤反力係数であり，k_2 は地盤のせん断剛性に関する係数である．また，$u\,(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $v\,(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, $w\,(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ は，それぞれ x, y, z 方向の変位成分，ωは平板の固有円振動数，i は虚数単位である．

弾性平板の領域 V で成り立つ変位振幅 u, v, w に関する支配方程式は，$\boldsymbol{u} = (u, v, w)$とすると，

$$\mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) + \rho\omega^2\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{in } V. \tag{1}$$

ただし，Δ は三次元空間の Laplacian, $\boldsymbol{0}$ は零ベクトル，λ, μは Lamé の定数，ρは弾性平板の密度である．

平板の周面 S での境界条件式は，

$$\begin{aligned} &v = w = 0,\ \sigma_{xx} = 0 \quad \text{on} \quad x = 0, a, \\ &u = w = 0,\ \sigma_{yy} = 0 \quad \text{on} \quad y = 0, b. \end{aligned} \tag{2}$$

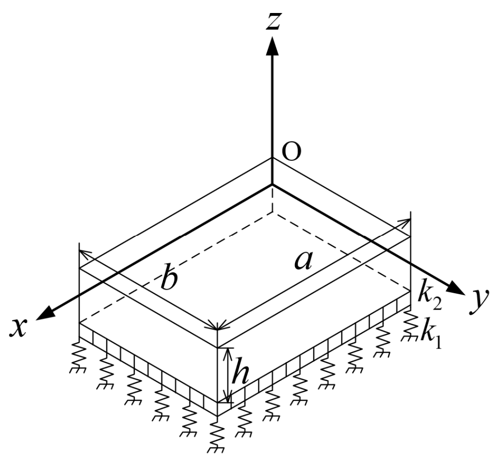

図-1　解析モデルと座標系

また，厚さ方向の境界Γ での境界条件式は，

$$\begin{aligned} &\sigma_{zz} = k_1 w - k_2\nabla^2 w,\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{on} \quad z = -\tfrac{h}{2}, \\ &\sigma_{zz} = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{on} \quad z = \tfrac{h}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ は垂直応力，τ_{xz}, τ_{yz} はせん断応力であり，∇^2 は xy 平面空間の Laplacian である．

3. 数理モデルの解析解

本研究では，半逆解法を用いて強形式の解析解を求めた．式(1)の解 u, v, w が変数分離形で表されると仮定し，更に式(2)を満たすように次式で解を仮定する[6)].

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}(z)\cos\left(\tfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\tfrac{n\pi y}{b}\right), \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}(z)\sin\left(\tfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\tfrac{n\pi y}{b}\right), \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(z)\sin\left(\tfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\tfrac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$m, n \in \mathbb{N}$ は，それぞれ，x 軸方向および y 軸方向の固有関数の半波数の数であり，$U_{mn}(z)$, $V_{mn}(z)$, $W_{mn}(z)$は z 方向の未知の固有関数である．式(4)を式(1)に代入して一般解を求め，式(3)を満足するように解くことで Pasternak 基礎上の弾性平板の振動数方程式と未知の固有関数の形式的な解を導出した．導出した振動数方程式の妥当性は，Ritz 解[4)]と FE-DQ 解[5)]と比較することで確認したが，ここでは割愛する．

4. 二つの弾性基礎パラメータの調査

理論解析にあたっては k_1 と k_2 の設定が重要になる．

本研究では無次元化された二つのパラメータ k_1a/E, k_2/Ea を用いることとし，コンクリート（$E=23.1\times10^3$ MPa）および鋼（$E=206\times10^3$ MPa）からなる弾性平板を対象としたときに k_1a/E と k_2/Ea の取り得る範囲を調査した．ただし，E は平板のヤング率である．

弾性地盤のヤング率を E_s，ポアソン比を ν_s，剛基盤から地表面までの高さを H_s とするとき，浅い地盤を想定すると，k_1 と k_2 は，それぞれ [7]，

$$k_1=\frac{(1-\nu_s)E_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)H_s},\quad k_2=\frac{E_sH_s}{6(1+\nu_s)}. \qquad (5)$$

砂質の弾性地盤を仮定すると $0.25\le\nu_s\le0.35$ であり [8]，そのヤング率は文献 9)によれば $30\ \mathrm{MPa}\le E_s\le320\ \mathrm{MPa}$ である．H_s/a を 1/3 から 5/3 とすると，

$$1.05\times10^{-4}\le\tfrac{k_1a}{E}\le6.67\times10^{-2},$$
$$5.99\times10^{-6}\le\tfrac{k_2}{Ea}\le3.08\times10^{-3}. \qquad (6)$$

5. 理論解析および考察

$h/a=0.2$ を有する弾性正方形平板（$b/a=1$, $\nu=0.2$）の基本振動（$m=n=1$）の無次元固有円振動数Ω_{111}に与える k_2/Ea と k_1a/E の影響を**図-2** に示す．ただし，

$$\Omega_{mnl}=\tfrac{\omega_{mnl}h}{c_2}. \qquad (7)$$

であり，$c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$，l は振動次数を意味する．k_1a/E は 10^{-1}（橙），10^{-2}（緑），10^{-3}（青）および 10^{-5}（赤）に設定し，k_2/Ea は 10^{-6} から 10^6 まで変化させた．なお，破線の一定値は $k_2/Ea=0$ のΩ_{111} を意味する．同図より，k_1a/E にかかわらず，k_2/Ea の変化が平板のΩ_{111} に影響するのは $10^{-4}\le k_2/Ea\le10^1$ であり，k_2/Ea の増大にともなってΩ_{111} は大きくなる．また，k_2/Ea の値を小さくすると Winkler 基礎の場合のΩ_{111}（$k_2/Ea=0$）に近づき，k_2/Ea を大きくすると滑らかな剛基礎（$w=0$, $\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$）上にある平板のΩ_{111} に近づく．なお，$k_2/Ea\le10^1$ の範囲では，k_1a/E が大きくなるとΩ_{111} も増大する．

図-3 は，**図-2** の $k_1a/E=10^{-2}$ のときの弾性基礎－平板系のひずみエネルギ成分に与える k_2/Ea の影響である．ここで，U_b, U_t, U_s, U_z の定義は文献 10)と同一とし，U_W, U_P は，それぞれ，k_1 及び k_2 に蓄積される弾性エネルギである．これらの値は全ひずみエネルギ U により正規化した．同図より k_2/Ea が 10^{-6} から 10^{-1} まで変化するとき，U_b, U_t, U_s, U_W は減少し，U_z, U_P は増加する．k_2/Ea が 10^{-1} より大きくなると，U_b, U_t は増加，U_z は減少し，U_W, U_P は零になる．これより，$k_2/Ea=10^{-1}$ を境に振動状態が変わっていることが予想される．

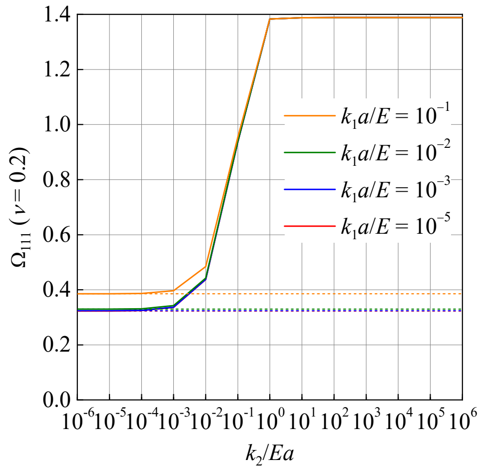

図-2　弾性平板のΩ_{111} に与える k_2/Ea の影響

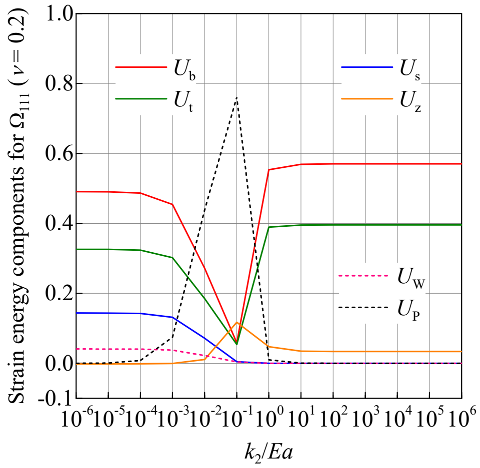

図-3　弾性平板のΩ_{111} の自由振動の正規化されたひずみエネルギ成分に与える k_2/Ea の影響：$k_1a/E=10^{-2}$

6. おわりに

本研究では，Pasternak 基礎上の弾性平板の自由振動の解析解を三次元弾性論に基づいて導出した．また，二つの弾性基礎パラメータの取り得る範囲を調査し，導出した解析解を用いて平板の自由振動に与える第二パラメータの影響の一部を明らかにした．弾性平板の固有振動モードに与える k_2/Ea の影響については，当日報告する予定である．

謝辞：支配方程式の一般解の導出にあたっては，明石工業高等専門学校 都市システム工学科 石丸和宏教授からご指導および資料の提供をいただきました．

参考文献

1) Omurtag et al.: Int. J. Numer. Meth. Eng., 40 (1997), 295-317.
2) Xiang et al.: Int. J. Mech. Sci., 36 (1994), 311-316.
3) Mastunaga, H.: J. Eng. Mech., 216 (2000), 27-34.
4) Zhou et al.: Int. J. Numer. Meth. Eng., 59 (2004), 1313-1334.
5) Dehghan and Baradaran: Appl. Math. Comput., 218 (2011), 2772-2784.
6) Srinivas et al.: J. Sound Vib., 12 (1970), 187-199.
7) Ozgan and Daloglu: Thin-Walled Struct., 46 (2008), 1236-1250.
8) 蔡飛：新版地盤 FEM 解析入門，フォーラムエイト，2013.
9) Obrzud: The Hardening Soil Model - A Practical Guidebook, Zace Services, 2010.
10) 名木野ら：構造工学論文集, Vol.60A (2014), 1-14.